Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 59, 1998, стор. 75–90

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 59, 1998, pp. 75–90

ТОЧНІСТЬ МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ В НОРМАХ ПРОСТОРІВ ОРЛИЧА. II

УДК 519.21

Ю. В. КОЗАЧЕНКО ТА А. О. ПАШКО

Резюме. В роботі побудовані моделі, що апроксимують строго субгауссові випадкові процеси з заданою надійністю та точністю в нормах просторів Орлича, зокрема просторів $L_p(T)$. Всі результати роботи мають місце також для гауссових процесів.

Робота є продовженням роботи [1].

6. Оцінки швидкості збіжності строго субгауссових випадкових рядів в просторах Орлича

Нехай $(T, \mathfrak{A}, \mu)$ — деякий вимірний простір, $L_U(T)$ — простір Орлича, що породжується C-функцією $U = \{U(x), x \in \mathbf{R}^1\}$.

Означення 6.1. Нехай $f = \{f_k(t), t \in T, k = 1, 2, \dots\}$ — сім'я функцій з простору $L_U(T)$. Ця сім'я належить класу $D_U(c)$, якщо існує така числова послідовність $c = \{c_k, k = 1, 2, \dots\}$, $0 \le c_k \le c_{k+1}$, що для будь- якої числової послідовності $r = \{r_k, k = 1, 2, \dots\}$ виконується нерівність

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} r_k f_k(t) \right\|_{L_U} \le c_n \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k f_k(t) \right\|_{L_2}. \tag{6.1}$$

Приклади сімей функцій, що належать класам $D_U(c)$, наведені в роботах [2, 3, 4] та будуть використані в наступних розділах.

Зауваження 6.1. В означенні 6.1 послідовність $c = \{c_k, k = 1, 2, \dots\}$ одна й та ж для будь-якої послідовності r, тобто, c залежить лише від f та U.

Розглянемо випадковий ряд (процес)

$$S(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k(t), \tag{6.2}$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60G99; Secondary 60E15, 65U05.

Робота виконана при частковому фінансуванні Фонду фундаментальних досліджень Державного комітету України з питань науки та технології.

де $\xi = \{\xi_k, k = 1,2,\dots\}$ — сім'я строго субгауссових випадкових величин. $f = \{f_k(t), t \in T,\ k = 1,2,\dots\}$ — сім'я функцій з простору $L_U(T)$, що належить класу $D_U(c)$. Нехай також виконується умова (3.2), тобто ряд (6.2) збігається в середньому квадратичному. Позначимо для $1 \le m \le n \le \infty$

$$S_m^n(t) = \sum_{j=m}^{n} \xi_j f_j(t).$$

Нехай $a = \{a_k, k = 1,2,\dots\}$ — деяка послідовність така, що $0 \le a_k \le a_{k-1}$. $a_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Позначимо для $1 \le n \le m$

$$S_m^n(a,t) = \sum_{j=m}^{n} a_j \xi_j f_j(t).$$

Легко перевірити, що має місце рівність

$$\int_T \left(S_m^k(a,t)\right)^2 d\mu(t) = \sum_{j=m}^{k}\sum_{i=m}^{k} a_j a_i \xi_i \xi_j \int_T f_i(t) f_j(t)\, d\mu(t) = \vec{\xi}_{mk}^{\,T} A_{mk}(f) \vec{\xi}_{mk}, \tag{6.3}$$

де $m \le k$, $\vec{\xi}_{mk}^{\,T} = (\xi_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_k)$,

$$A_{mk}(f) = \|a_{ij}(f)\|_{i,j=m}^{k}, \qquad a_{ij}(f) = a_i a_j \int_T f_i(t) f_j(t)\, d\mu(t).$$

Нехай

$$B_{mk} = \operatorname{cov} \vec{\xi}_{mk} = \left\| \mathsf{E}\, \xi_i \xi_j \right\|_{i,j=m}^{k}.$$

Позначимо

$$J_l(m,k,a) = \left(\operatorname{Sp}(B_{mk} A_{mk}(f))^l\right)^{1/l}.$$

Лема 6.1. *Для будь-якого $0 \le s < 1$, $N = 1,2,\dots$, будь-яких $m \le n$ та послідовності $a \doteq \{a_k, k = 1,2,\dots\}$ такої, що $a_k \le a_{k+1}$, має місце нерівність*

$$\mathsf{E}\exp\left\{\frac{\left(s\left\|S_m^n(t)\right\|_{L_U}\right)^2}{2(B_N(m,n,a))^2}\right\} \le \exp\left\{\frac{A_N(m,n,a,s)}{2B_N(m,n,a)} + \omega_N(s)\right\}, \tag{6.4}$$

де

$$A_N(m,n,a,s) = \sum_{k=m}^{n} b_{kn} (J_N(m,k,a))^{1/2} \sum_{l=1}^{N-1} \frac{(sJ_l(m,k,a))^l}{l J_N^l(m,k,a)},$$

при $N > 1$ та $A_1(m,n,a,s) = 0$,

$$B_N(m,n,a) = \sum_{k=m}^{n} b_{kn} (J_N(m,k,a))^{1/2},$$

$b_{kn} = c_k d_{kn}$, $d_{kn} = (a_k^{-1} - a_{k+1}^{-1})$, $k = m, m+1, \dots, n-1$, $d_{nn} = a_n^{-1}$, $\omega_N(s)$ *визначено в* (2.16).

Доведення. Має місце рівність (перетворення Абеля)*

$$S_m^n(t) = \sum_{k=m}^{n-1} \left(a_k^{-1} - a_{k+1}^{-1}\right) S_m^k(a,t) + a_n^{-1} S_m^n(a,t) = \sum_{k=m}^{n} d_{kn} S_m^k(a,t). \tag{6.5}$$

З (6.5) та означення 6.1 випливає нерівність

$$\|S_m^n(t)\|_{L_U} \leq \sum_{k=m}^{n} d_{kn} \left\|S_m^k(a,t)\right\|_{L_U} \leq \sum_{k=m}^{n} d_{kn} c_k \left\|S_m^k(a,t)\right\|_{L_2} = \sum_{k=m}^{n} b_{kn} \left\|S_m^k(a,t)\right\|_{L_2}. \tag{6.6}$$

Нехай $\delta_k > 0$, $k = m, m+1, \ldots, n$ такі числа, що $\sum_{k=m}^n \delta_k = 1$, $W_{m,n}$ — довільне число. З опуклості функції $y = x^2$ та нерівності Гельдера випливають такі співвідношення.

$$I_m^n = \mathsf{E}\exp\left\{\left(\frac{\sum_{k=m}^n b_{kn} \left\|S_m^k(a,t)\right\|_{L_2}}{W_{m,n}}\right)^2\right\} = \mathsf{E}\exp\left\{\left(\sum_{k=m}^{n} \frac{\delta_k b_{kn} \left\|S_m^k(a,t)\right\|_{L_2}}{\delta_k W_{m,n}}\right)^2\right\}$$

$$\leq \mathsf{E}\exp\left\{\sum_{k=m}^{n} \delta_k \left(\frac{b_{kn} \left\|S_m^k(a,t)\right\|_{L_2}}{\delta_k W_{m,n}}\right)^2\right\} \leq \prod_{k=m}^{n} \left(\mathsf{E}\exp\left\{\frac{b_{kn}^2 \left\|S_m^k(a,t)\right\|_{L_2}^2}{\delta_k^2 W_{m,n}^2}\right\}\right)^{\delta_k}. \tag{6.7}$$

Покладемо

$$\delta_k = \frac{\sqrt{2} b_{kn}((J_N(m,k,a))^{1/2}}{\sqrt{s} W_{m,n}}, \qquad W_{m,n} = \sqrt{\frac{2}{s}} \sum_{k=m}^{n} b_{kn}((J_N(m,k))^{1/2}.$$

Тоді з (6.3) та наслідку 2.1 при $N > 1$ випливає така нерівність

$$\mathsf{E}\exp\left\{\frac{b_{kn}^2 \|S_m^k(a,t)\|_{L_2}^2}{\delta_k^2 W_{m,n}^2}\right\} = \mathsf{E}\exp\left\{\frac{s\|S_m^k(a,t)\|_{L_2}^2}{2J_N(m,k)}\right\}$$

$$\leq \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N-1} \frac{(sJ_l(m,k,a))^l}{lJ_N^l(m,k,a)} + \omega_N(s)\right\}. \tag{6.8}$$

З (6.6), (6.8) та (6.7) випливає, що

$$\mathsf{E}\exp\left\{\frac{s\left\|S_m^n(t)\right\|_{L_U}^2}{2\left(\sum_{k=m}^n b_{kn}(J_N(m,k,a))^{1/2}\right)^2}\right\} \leq I_m^n$$

$$\leq \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=m}^{n}\sum_{l=1}^{N-1} \frac{(sJ_l(m,k,a))^l}{lJ_N^l(m,k,a)} \delta_k + \omega_N(s)\right\}.$$

Якщо тепер в останню нерівність підставимо значення δ_k, то отримаємо нерівність (6.4). При $N = 1$ доведення аналогічне. □

Лема 6.2. *Нехай мають місце припущення леми* 6.1, *тоді для будь-якого* $x > 0$, $0 \leq s < 1$, *має місце нерівність*

$$\mathsf{P}\left\{\|S_m^n(t)\|_{L_U} > x\right\} \leq \exp\left\{-\frac{sx^2}{2(B_N(m,n,a))^2}\right\}\exp\left\{\frac{A_N(m,n,a)}{2B_N(m,n,a)} + \omega_N(s)\right\}. \tag{6.9}$$

Доведення. З нерівності Чебишева випливають співвідношення

$$\mathsf{P}\left\{\|S_m^n(t)\|_{L_U} > x\right\} = \mathsf{P}\left\{\frac{s\|S_m^n(t)\|_{L_U}^2}{2(B_N(m,n,a))^2} > \frac{sx^2}{2(B_N(m,n,a))^2}\right\}$$

$$\leq \exp\left\{-\frac{sx^2}{2(B_N(m,n,a))^2}\right\} \cdot \mathsf{E}\exp\left\{\frac{s\|S_m^n(t)\|_{L_U}^2}{2(B_N(m,n,a))^2}\right\}.$$

Нерівність (6.9) випливає з останньої нерівності та нерівності (6.4). □

Теорема 6.1. *Нехай мають місце припущення леми 6.1. Якщо для деякої послідовності $a = \{a_k, k = 1, 2, \dots\}$ такої, що $a_k < a_{k+1}$, $a_k \to \infty$ при $k \to \infty$, деякого цілого $N \geq 1$, всіх $0 \leq s < 1$ виконуються умови*

$$B_N(m, n, a) \to 0 \quad \text{при } m, n \to \infty, \tag{6.10}$$

$$A_N(m, n, a, s) \to 0 \quad \text{при } m, n \to \infty, \tag{6.11}$$

де $B_N(m, n, a)$, $A_N(m, n, a, s)$ визначені в (6.4). Тоді випадковий процес

$$S(t) = S_1^\infty(t) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k f_k(t)$$

з ймовірністю 1 належить простору $L_U(\Omega)$. Якщо при цьому існують границі

$$B_N(m, a) = \limsup_{n\to\infty} B_N(m, n, a) < \infty,$$

$$A_N(m, a, s) = \limsup_{n\to\infty} A_N(m, n, a, s) < \infty,$$

то для будь-якого $x > 0$, $0 \leq s < 1$ та $m = 1, 2, \dots$ має місце нерівність

$$\mathsf{P}\left\{\|S_m^\infty(t)\|_{L_U} > x\right\} \leq \exp\left\{-\frac{sx^2}{2(B_N(m, a))^2}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{A_N(m, a, s)}{2B_N(m, a)} + \omega_N(s)\right\}, \tag{6.12}$$

де $\omega_N(s)$ визначено в (2.16).

Доведення. З (6.9) випливає, що при всіх $x > 0$, $0 \leq s < 1$

$$\mathsf{P}\left\{\|S_m^n(t)\|_{L_U} > x\right\} \leq \exp\left\{-\frac{sx^2 - A_N(m, n, a, s)B_N(m, n, a)}{2(B_N(m, a))^2}\right\} \cdot \exp\left\{\omega_N(s)\right\}.$$

Отже з (6.10) та (6.11) випливає, що для будь-якого $x > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\|S_m^n(t)\|_{L_U} > x\right\} \to 0 \quad \text{при } m, n \to \infty,$$

тобто

$$\|S_m^n(t)\|_{L_U} \to 0 \quad \text{при } m, n \to \infty \quad \text{за ймовірністю.}$$

Тому існують послідовності $m_k < n_k$, $k = 1, 2, \dots$, що

$$\|S_{m_k}^{n_k}(t)\|_{L_U} \to 0 \quad \text{при } m_k \to \infty \quad \text{з ймовірністю 1.}$$

Це означає, що з ймовірністю 1 $S(t)$ належить простору $L_U(\Omega)$. Оскільки $S_m^\infty(t) = S(t) - S_1^{m-1}(t)$ також з ймовірністю одиниця належить $L_U(\Omega)$, то легко показати, що

$$\|S_m^\infty(t) - S_m^n(t)\|_{L_U} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty \quad \text{за ймовірністю.} \tag{6.13}$$

Отже для будь-якого $x > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\|S_m^n(t)\|_{L_U} > x\right\} \to \mathsf{P}\left\{\|S_m^\infty(t)\|_{L_U} > x\right\}$$

при $n \to \infty$. З (6.13), нерівності (6.9) та умов теореми випливає нерівність (6.12). □

Зауваження 6.2. $A_1(m, n, a, s) = 0$ при $N = 1$, тому для того, щоб мала місце теорема 6.1 достатньо, щоб виконувалась умова

$$B_1(m, n, a) \to 0 \quad \text{при } m, n \to \infty.$$

При $N > 1$ (див. зауваження 2.2) з умови (6.11) випливає умова (6.10).

Зауваження 6.3. Легко показати (див. зауваження 2.3), що при досить великих x нерівність (6.12) тим точніша, чим більше N. Але застосувати цю нерівність при великих N досить складно, бо це вимагає громіздких обчислень. При $N = 1$ або $N = 2$ легко вдається мінімізувати по s праву частину нерівності (6.12) і отримати досить точні прості нерівності

Наслідок 6.1. *Нехай виконуються умови леми* 6.1. *Якщо для деякої послідовності* $a = \{a_k, k = 1, 2, \dots\}$ *такої, що* $a_k < a_{k+1}$, $a_k \to \infty$ *при* $k \to \infty$, *при будь-якому* $m = 1, 2, \dots$ *існує границя*

$$B_1(m,a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} b_{kn}(J_1(m,k,a))^{1/2} \tag{6.14}$$

та виконується умова (6.10) *при* $N = 1$, *тоді випадковий процес* $S(t)$ *з ймовірністю одиниця належить простору Орлича* $L_U(\Omega)$. *При цьому для будь-якого* $x \geq B_1(m,a)$ *має місце нерівність*

$$\mathsf{P}\left\{\|S_m^\infty(t)\|_{L_U} > x\right\} \leq \exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{x}{B_1(m,a)} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(B_1(m,a))^2}\right\}. \tag{6.15}$$

Доведення. Оскільки $A_1(m,n,a,s) = 0$, то за умовою (6.11) теореми 6.1 процес $S(t)$ належить з ймовірністю одиниця простору $L_U(\Omega)$. Нерівність 6.12 в цьому випадку має вигляд (див. приклад 2.2)

$$\mathsf{P}\left\{\|S_m^\infty(t)\|_{L_U} > x\right\} \leq \frac{1}{\sqrt{1-s}} \exp\left\{-\frac{sx^2}{2(B_1(m,a))^2}\right\}. \tag{6.16}$$

Права частина нерівності (6.16) приймає мінімальне значення на $0 \leq s < 1$ у точці

$$s = 1 - \frac{B_1^2(m,a)}{x^2}.$$

Розглядаючи (6.16) з цим s, ми отримаємо нерівність (6.15) для $x \geq B_1(m,a)$. □

Наслідок 6.2. *Нехай мають місце припущення леми* 6.1. *Якщо для деякої послідовності* $a = \{a_k, k = 1, 2, \dots\}$ *такої, що* $a_k < a_{k+1}$, $a_k \to \infty$ *при* $k \to \infty$, *при будь-якому* $m = 1, 2, \dots$ *існують границі*

$$\begin{aligned} B_2(m,a) &= \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} b_{kn}(J_2(m,k,a))^{1/2} < \infty, \\ C_2(m,a) &= \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} b_{kn}\frac{J_1(m,k,a)}{(J_2(m,k,a))^{1/2}} < \infty \end{aligned} \tag{6.17}$$

та виконується умова

$$\sum_{k=m}^{n} b_{kn}\frac{J_1(m,k,a)}{(J_2(m,k,a))^{1/2}} \to 0 \quad \text{при } m,n \to \infty, \tag{6.18}$$

тоді випадковий процес $S(t)$ *з ймовірністю 1 належить простору Орлича* $L_U(\Omega)$. *При цьому для будь-якого* $x \geq \left(B_2(m,a)C_2(m,a)\right)^{1/2}$ *має місце нерівність*

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}\left\{\|S_m^\infty(t)\|_{L_U} > x\right\} \\ &\leq \frac{\left(x^2 - C_2(m,a)B_2(m,a) + (B_2(m,a))^2\right)^{1/2}}{B_2(m,a)} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(B_2(m,a))^2} + \frac{C_2(m,a)}{2B_2(m,a)}\right\}. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Доведення. Наслідок 6.2 випливає з теореми 6.1, якщо в цій теоремі покласти $N = 2$. Дійсно, легко перевірити, що

$$B_2(m,n,a) = \sum_{k=m}^{n} b_{kn}(J_2(m,k,a))^{1/2},$$

$$A_2(m,n,a) = s\sum_{k=m}^{n} b_{kn}\frac{J_1(m,k,a)}{(J_2(m,k,a))^{1/2}}.$$

Тому з умови (6.18) випливають умови (6.10) та (6.11) при $N = 2$ (дивись зауваження 2.2). Отже $S(t)$ з ймовірністю одиниця належить простору $L_U(\Omega)$. Нерівність (6.12) в цьому випадку для будь-яких $x > 0$, $0 \le s < 1$ та $m = 1, 2, \dots$ має вигляд

$$\mathsf{P}\left\{\|S_m^\infty(t)\|_{L_U} > x\right\} \le \frac{1}{\sqrt{1-s}}\exp\left\{-\frac{s}{2}\right\}\exp\left\{-\frac{sx^2}{2(B_2(m,a))^2}\right\}\exp\left\{\frac{sC_2(m,a)}{2B_2(m,a)}\right\}.$$

Права частина цієї нерівності приймає мінімальне значення на $0 \le s < 1$ у точці

$$s = 1 - \frac{x^2 - C_2(m,a)B_2(m,a) + B_2^2(m,a)}{B_2^2(m,a)}.$$

Застосовуючи останню нерівність з таким s та $x^2 \ge C_2(m,a)B_2(m,a)$, ми отримаємо нерівність (6.19). □

7. Строго субгауссові випадкові ряди з некорельованими або ортогональними членами

Розглянемо випадковий ряд (6.2)

$$S(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k(t),$$

де $f = \{f_k(t), t \in T, k = 1, 2, \dots\}$ — сім'я функцій з простору $L_U(T)$, що належить класу $D_U(c)$, а $\xi = \{\xi_k, k = 1, 2, \dots\}$ — сім'я строго субгауссових випадкових величин.

У цьому пункті вивчається швидкість збіжності ряду (6.2), якщо випадкові величини ξ_k некорельовані або функції $f_k(t)$ — ортогональні. В цьому випадку оцінки пункту 6 істотно спрощуються.

Теорема 7.1. *Розглянемо випадковий ряд (процес) (6.2). Нехай мають місце припущення леми 6.1, випадкові величини $\xi = \{\xi_k, k = 1, 2, \dots\}$ — некорельовані або функції $f = \{f_k(t), t \in T, k = 1, 2, \dots\}$ — ортогональні:*

$$\int_T f_k(t) f_l(t)\, d\mu(t) = 0, \qquad k \ne l;$$

$\mathsf{E}\xi_k^2 = \sigma_k^2 > 0$, $\int_T |f_k(t)|^2\, d\mu(t) = b_k^2 > 0$. *Якщо існує послідовність $a = \{a_k, k = 1, 2, \dots\}$ така, що $0 \le a_k \le a_{k+1}$, $a_k \to \infty$ при $k \to \infty$, для якої збігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\left(a_k^{-1} - a_{k+1}^{-1}\right)\left(\sum_{j=1}^{k}\sigma_j^2 b_j^2 a_j^2\right)^{1/2} < \infty, \tag{7.1}$$

тоді випадковий процес $S(t)$ *з ймовірністю одиниця належить простору* $L_U(\Omega)$ *та для будь-якого* $x > \tilde{B}_1(m,a)$ *має місце нерівність*

$$\mathsf{P}\left\{\|S_m^\infty(t)\|_{L_U} > x\right\} \le \exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{x}{\tilde{B}_1(m,a)} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(\tilde{B}_1(m,a))^2}\right\}, \tag{7.2}$$

де

$$\tilde{B}_1(m,a) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k \left(a_k^{-1} - a_{k+1}^{-1}\right) \left(\sum_{j=m}^{k} \sigma_j^2 b_j^2 a_j^2\right)^{1/2}.$$

Доведення. Твердження теореми випливає з наслідку 6.1. Дійсно, легко бачити, що за умов теореми

$$J_1(m,k,a) = \sum_{j=m}^{k} \sigma_j^2 b_j^2 a_j^2.$$

Тому має місце рівність

$$B_1(m,n,a) = \sum_{k=m}^{n-1} c_k \left(a_k^{-1} - a_{k+1}^{-1}\right) \left(\sum_{j=m}^{k} \sigma_j^2 b_j^2 a_j^2\right)^{1/2} + \frac{c_n}{a_n}\left(\sum_{j=m}^{n} \sigma_j^2 b_j^2 a_j^2\right)^{1/2}. \tag{7.3}$$

З умови 7.1 легко випливає, що

$$\sum_{k=m}^{n-1} c_k \left(a_k^{-1} - a_{k+1}^{-1}\right) \left(\sum_{j=m}^{k} \sigma_j^2 b_j^2 a_j^2\right)^{1/2} \le \sum_{k=m}^{n-1} c_k \left(a_k^{-1} - a_{k+1}^{-1}\right) \left(\sum_{j=1}^{k} \sigma_j^2 b_j^2 a_j^2\right)^{1/2} \to 0 \tag{7.4}$$

при $m,n \to \infty$.

Аналогічно з 7.1 випливають співвідношення

$$\frac{c_n}{a_n}\left(\sum_{j=m}^{n} \sigma_j^2 b_j^2 a_j^2\right)^{1/2} \le \frac{c_n}{a_n}\left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 b_j^2 a_j^2\right)^{1/2} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(a_k^{-1} - a_{k+1}^{-1}\right) c_n \left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 b_j^2 a_j^2\right)^{1/2}$$
$$\le \sum_{k=n}^{\infty} \left(a_k^{-1} - a_{k+1}^{-1}\right) c_k \left(\sum_{j=1}^{k} \sigma_j^2 b_j^2 a_j^2\right)^{1/2} \to 0 \tag{7.5}$$

при $n \to \infty$.

Отже, з (7.3), (7.4) та (7.5) випливає, що $B_1(m,n,a) \to 0$ при $n,m \to \infty$, тобто виконується умова (6.10). Зрозуміло також, що виконується умова (6.14), а саме,

$$B_1(m,a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} b_{kn}\left(\sum_{j=m}^{k} \sigma_j^2 b_j^2 a_j^2\right)^{1/2} = \sum_{k=m}^{\infty} c_k \left(a_k^{-1} - a_{k+1}^{-1}\right) \left(\sum_{j=1}^{k} \sigma_j^2 b_j^2 a_j^2\right)^{1/2}$$
$$= \tilde{B}_1(m,a).$$

Нерівність (7.2) випливає з нерівності (6.15). □

З теореми 7.1 зразу ж випливає такий наслідок.

Наслідок 7.1. *Нехай виконуються припущення теореми* 7.1, *а замість умов* (7.1) *та* (7.2) *має місце умова: для деякої послідовності* $a = \{a_k, k = 1,2,\dots\}$ *такої, що* $0 \le a_k \le a_{k+1}$, $a_k \to \infty$ *при* $k \to \infty$, *та*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(a_k^{-1} - a_{k+1}^{-1}\right) < \infty, \tag{7.6}$$

збігається ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 b_j^2 a_j^2 < \infty.$$

Тоді випадковий процес $S(t)$ з ймовірністю одиниця належить простору $L_U(\Omega)$ та для будь-яких $x > \check{B}_1(m,a)$ має місце нерівність

$$\mathsf{P}\left\{\|S_m^{\infty}(t)\|_{L_U} > x\right\} \le \exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{x}{\check{B}_1(m,a)} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(\check{B}_1(m,a))^2}\right\}, \tag{7.7}$$

де

$$\check{B}_1(m,a) = \left(\sum_{j=m}^{\infty} \sigma_j^2 b_j^2 a_j^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=m}^{\infty} c_j \left(a_j^{-1} - a_{j+1}^{-1}\right)\right).$$

Для того, щоб знаходити послідовність $a = \{a_k, k = 1, 2, \dots\}$, для якої виконується умова (7.6), корисна така лема.

Лема 7.1. *Нехай існує така функція $c = \{c(u), u \ge 1\}$, що $c(k) = c_k$ та $c(u)$ монотонно зростає. Якщо $a = \{a(u), u \ge 1\}$ — така функція, що $a(u) > 0$, $a(u)$ монотонно зростає, $a(u) \to \infty$ при $u \to \infty$ та існує похідна $a'(u)$, якщо збігається інтеграл*

$$\int_1^{\infty} \frac{c(x)a'(x)}{a^2(x)}\, dx < \infty, \tag{7.8}$$

то для послідовності $a = \{a_k, k = 1, 2, \dots\}$ виконується умова (7.6).

Доведення. Твердження леми випливає з таких нерівностей

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_k^{k+1} d\left(-\frac{1}{a(x)}\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} c(x)\, d\left(-\frac{1}{a(x)}\right)$$
$$= \int_1^{\infty} c(x) \frac{a'(x)}{a^2(x)}\, dx < \infty. \qquad \square$$

Теорема 7.2. *Розглянемо випадковий ряд (процес)* (6.2). *Нехай мають місце припущення леми* 6.1, *випадкові величини $\xi = \{\xi_k, k = 1, 2, \dots\}$ — некорельовані, а функції $f = \{f_k(t), t \in T, k = 1, 2, \dots\}$ — ортогональні;* $\mathsf{E}\xi_k^2 = \sigma_k^2 > 0$,

$$\int_T |f_k(t)|^2\, d\mu(t) = b_k^2 > 0.$$

Якщо існує послідовність $a = \{a_k, k = 1, 2, \dots\}$ така, що $0 \le a_k \le a_{k+1}$, $a_k \to \infty$ при $k \to \infty$, для якої збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) \left(\sum_{j=1}^{k} |\sigma_j b_j a_j|^{4/3}\right)^{3/4} < \infty, \tag{7.9}$$

то випадковий процес $S(t)$ з ймовірністю одиниця належить простору $L_U(\Omega)$ та для будь-якого $x \ge (\tilde{B}_2(m,a)\tilde{C}_2(m,a))^{1/2}$ має місце нерівність

$$\mathsf{P}\left\{\|S_m^{\infty}(t)\|_{L_U} > x\right\}$$
$$\le \frac{\left(x^2 - \tilde{C}_2(m,a)\tilde{B}_2(m,a) + (\tilde{B}_2(m,a))^2\right)^{1/2}}{\tilde{B}_2(m,a)} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(\tilde{B}_2(m,a))^2} + \frac{\tilde{C}_2(m,a)}{2\tilde{B}_2(m,a)}\right\}, \tag{7.10}$$

де

$$\tilde{B}_2(m,a) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) \left(\sum_{j=m}^{k} |\sigma_j b_j a_j|^4\right)^{1/4},$$

$$\tilde{C}_2(m,a) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) \left(\sum_{j=m}^{k} |\sigma_j b_j a_j|^{4/3}\right)^{3/4}.$$

Доведення. Твердження теореми випливає з наслідку 6.2. Дійсно, легко бачити, що за умов теореми

$$J_1(m,k,a) = \sum_{j=m}^{k} \sigma_j^2 b_j^2 a_j^2, \qquad J_2(m,k,a) = \left(\sum_{j=m}^{k} \sigma_j^4 b_j^4 a_j^4\right)^{1/2}.$$

З нерівності Гельдера випливає, що

$$\sum_{k=m}^{n} b_{kn} \frac{J_1(m,k,a)}{(J_2(m,k,a))^{1/2}} \le \sum_{k=m}^{n} b_{kn} \frac{\left(\sum_{j=m}^{k} |\sigma_j b_j a_j|^4\right)^{1/4} \left(\sum_{j=m}^{k} |\sigma_j b_j a_j|^{4/3}\right)^{3/4}}{(J_2(m,k,a))^{1/2}}$$
$$= \sum_{k=m}^{n-1} c_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) \left(\sum_{j=m}^{k} |\sigma_j b_j a_j|^{4/3}\right)^{3/4} + \frac{c_n}{a_n}\left(\sum_{j=m}^{k} |\sigma_j b_j a_j|^{4/3}\right)^{3/4}.$$

З останньої нерівності та умови (7.9) легко пересвідчитись, як і в попередній теоремі, що виконується умова (6.18) наслідку 6.2. Нерівність (7.10) випливає з нерівності (6.19), оскільки $B_2(m,a) = \tilde{B}_2(m,a)$, а з нерівності Гельдера легко отримати, що $C_2(m,a) \le \tilde{C}_2(m,a)$. □

Наслідок 7.2. *Нехай виконуються припущення теореми* 7.2. *Замість умови* (7.9) *виконується умова: для деякої послідовності* $a = \{a_k, k = 1, 2, \dots\}$ *такої, що* $0 \le a_k \le a_{k+1}$, $a_k \to \infty$ *при* $k \to \infty$, *та такої, що виконується умова* (7.6) *збігається ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\sigma_j b_j a_j|^{4/3} < \infty. \tag{7.11}$$

Тоді випадковий процес $S(t)$ *з ймовірністю одиниця належить простору* $L_U(\Omega)$ *та для будь-яких* $x \ge (\check{B}_2(m,a)\check{C}_2(m,a))^{1/2}$ *має місце нерівність*

$$\mathsf{P}\left\{\|S_m^\infty(t)\|_{L_U} > x\right\}$$
$$\le \frac{\left(x^2 - \check{C}_2(m,a)\check{B}_2(m,a) + (\check{B}_2(m,a))^2\right)^{1/2}}{\check{B}_2(m,a)} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(\check{B}_2(m,a))^2} + \frac{\check{C}_2(m,a)}{2\check{B}_2(m,a)}\right\}, \tag{7.12}$$

де

$$\check{B}_2(m,a) = \left(\sum_{j=m}^{\infty} |\sigma_j b_j a_j|^4\right)^{1/4} \sum_{k=m}^{\infty} c_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right),$$

$$\check{C}_2(m,a) = \left(\sum_{j=m}^{\infty} |\sigma_j b_j a_j|^{4/3}\right)^{3/4} \sum_{k=m}^{\infty} c_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right).$$

8. Побудова моделей випадкових процесів

Нехай випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ може бути зображений у вигляді ряду

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k(t),$$

який збігається у середньому квадратичному. Моделлю процесу X називатимемо суму $X_M = \{X_M(t), t \in T\}$, де

$$X_M(t) = \sum_{k=1}^{M} \xi_k f_k(t).$$

Нехай випадковий процес X та всі X_M, $M = 1, 2, \ldots$, належать певному функціональному банаховому простору $A(T)$ з нормою $\|\cdot\|$. Нехай задано два числа α та δ ($0 < \alpha < 1$, $\delta > 0$). Говоритимемо, що модель X_M наближає X з надійністю $1 - \alpha$ та точністю δ в нормі простору $A(T)$, якщо для цієї моделі має місце нерівність

$$\mathsf{P}\{\|X(t) - X_M(t)\| > \delta\} \le \alpha. \tag{8.1}$$

Отже, для побудови моделі потрібно знайти такі M, для яких при заданих δ та α виконується нерівність (8.1).

Нехай вдається встановити нерівність

$$\mathsf{P}\{\|X(t) - X_M(t)\| > \delta\} \le W_M(\delta),$$

де $W_M(\delta)$, $\delta > 0$ — відома функція, що монотонно спадає по M та δ. Якщо M таке число, що $W_M(\delta) \le \alpha$, то для моделей $X_{M'}$, де $M' \ge M$ виконується нерівність (8.1). Тобто для побудови моделі X_M, що наближає X з надійністю $1 - \alpha$ та точністю δ в нормі простору $A(T)$ досить знайти M (бажано найменше), для якого виконується нерівність $W_M(\delta) \le \alpha$.

Моделювання випадкових процесів з використанням зображень Карунена–Лоева. Нехай $T = [0, b]$ — інтервал в $\mathbf{R}$, $b > 0$, $X = \{X(t), t \in T\}$ — неперервний в середньому квадратичному випадковий процес, $\mathsf{E}\, X(t) = 0$, $t \in T$, $B(t,s) = \mathsf{E}\, X(t)X(s)$, $t, s \in T$. Випадковий процес X можна зобразити у вигляді ряду [5], що збігається в середньому квадратичному

$$X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n z_n(t), \tag{8.2}$$

де $z_n(t)$ — ортонормовані власні функції інтегрального рівняння

$$z(t) = \lambda \int_T B(t,s) z(s)\, ds, \tag{8.3}$$

ξ_n — некорельовані випадкові величини, $\mathsf{E}\,\xi_n = 0$, $\xi_n^2 = \lambda_n^{-2}$, λ_n^2 — відповідні $z_n(t)$ власні числа рівняння (8.3), занумеровані в порядку зростання.

Означення 8.1. Якщо ξ_n незалежні строго субгауссові величини такі, що $\xi_n^2 = \lambda_n^{-2}$, $n = 1, 2, \ldots$, то випадковий процес $X_M(t) = \sum_{n=1}^{M} \xi_n z_n(t)$ називається моделлю Карунена–Лоева (К.Л.-моделлю) строго субгауссового процесу X (приклад 2.4).

Теорема 8.1. *Випадковий процес X_M наближає процес X з надійністю $1-\alpha$, $0<\alpha<1$, та точністю $\delta>0$ в $L_2(T)$, якщо M задовольняє нерівностям:*

$$\delta^2 > \hat{J}_{M+1,1}, \qquad \left(\frac{\delta^2 - \hat{J}_{M+1,1}}{\hat{J}_{M+1,2}} + 1\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{\delta^2 - \hat{J}_{M+1,1}}{2\hat{J}_{M+1,2}}\right\} \le \alpha, \tag{8.3}$$

де

$$\hat{J}_{M+1,1} = \sum_{k=M+1}^{\infty} \lambda_k^{-2}, \qquad \hat{J}_{M+1,2} = \sum_{k=M+1}^{\infty} \lambda_k^{-4}.$$

Твердження теореми випливає з нерівності 3.10 та прикладу 3.1.

Для отримання більш точних оцінок можна скористатися твердженням наслідку 3.2.

Для того, щоб знайти К.Л.-модель X_M, що наближає процес X з надійністю $1-\alpha$ та точністю δ в $L_p(T)$ треба скористатися теоремою 4.2 та наслідком 4.1. В цьому випадку

$$\sigma_{M+1}^2 = \sup_{t\in[0,b]} \sum_{k=M+1}^{\infty} \lambda_k^{-2} z_k^2(t).$$

В багатьох випадках M можна зменшити, якщо скористатися теоремою 7.2. Дійсно, в роботі [2] показано, що сім'я функцій $z = \{z_k(t), t \in t = [a,b], k = 1,2,\dots\}$ належить класу $D_U(c)$, $U(x) = |x|^p$, $p > 2$, а

$$c_k = \inf_{N\ge 1} \left(1 + \tilde{\Delta}\left(\frac{2b}{N}\right) \lambda_k \left(\frac{b}{2}\right)^{1/2}\right) \left(\frac{N}{4b}\right)^{1/2-1/p},$$

де

$$\tilde{\Delta}(h) = \sup_{|z_1-z_2|\le h} \left(\int_{-b}^{b} \left(\tilde{B}(z_1,s) - \tilde{B}(z_2,s)\right)^2 ds\right)^{1/2}, \tag{8.4}$$

а $\tilde{B}(z,s)$ — парна та $2b$-періодична по t, s функція, яка співпадає з $B(t,s)$ для $0 \le t$, $s \le b$. При цьому мають місце рівності

$$\tilde{B}_2(M+1,a) = \left(\sum_{j=M+1}^{k} \left(\lambda_j^{-1} a_j\right)^4\right)^{1/4} \sum_{k=M+1}^{\infty} c_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right),$$
$$\tilde{C}_2(M+1,a) = \left(\sum_{j=M+1}^{k} \left(\lambda_j^{-1} a_j\right)^{4/3}\right)^{3/4} \sum_{k=M+1}^{\infty} c_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right).$$

Зауважимо, що в цій ситуації простіше скористатися наслідком 7.2.

Для того, щоб знайти К.Л.–модель X_M, що наближає процес X з надійністю $1-\alpha$ та точністю δ в $L_U(T)$, де для U виконуються умови теореми 5.1, треба скористатися цією теоремою. При цьому $\hat{\mu}(T) = \max(b,1)$,

$$\tau^2 = \sigma_{M+1}^2 = \sup_{t\in T} \sum_{k=M+1}^{\infty} \lambda_k^{-2} z_k^2(t).$$

Якщо C-функція $U(x)$ така, що функції $\left(U(x)\right)^{1/2}$ та $U(|x|^{1/2})$ опуклі, то щоб знайти M, для якого X_M наближатиме процес X в $L_U(T)$ з заданою точністю δ та надійністю $1-\alpha$ треба скористатися теоремою 7.2 або наслідком 7.2. З роботи [2] випливає, що в цьому випадку функції $z_k(t)$ належать класу $D_U(c)$

$$c_k = \inf_{N\geq 1}\left(1+\tilde{\Delta}\left(\frac{2b}{N}\right)\lambda_k\left(\frac{b}{2}\right)^{1/2}\right)\left(\frac{N}{4b}\right)^{1/2}\left(U^{(-1)}\left(\frac{N}{4b}\right)\right)^{-1},$$

де $\tilde{\Delta}(2b/N)$ задано в (8.4). Зрозуміло також, що $\sigma_j = \lambda_j^{-1}$, $b_j = 1$.

Моделювання випадкових процесів з використанням їх розкладів у ряд Фур'є. Нехай $T = [0, b]$ — інтервал в $\mathbf{R}$, $b > 0$, $X = \{X(t), t \in T\}$ — неперервний в середньому квадратичному випадковий процес, $\mathsf{E}X(t) = 0$, $B(t,s) = \mathsf{E}X(t)X(s)$, $t, s \in T$. Функція $B(t,s)$ неперервна, тому вона може бути зображена у вигляді ряду Фур'є, що збігається в $L_2([0,b]\times[0,b])$

$$B(t,s) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}\cos\frac{\pi mt}{b}\cos\frac{\pi ns}{b}, \tag{8.5}$$

$$a_{mn} = \frac{4}{b^2}r_{mn}\int_0^b\int_0^b B(t,s)\cos\frac{\pi mt}{b}\cos\frac{\pi ns}{b}\,dt\,ds,$$

$r_{00} = \frac{1}{4}$, $r_{0n} = r_{m0} = \frac{1}{2}$, $r_{mn} = 1$, $m > 0$, $n > 0$. Оскільки функція $B(t,s)$ невід'ємно визначена, то $a_{mn} \geq 0$ для всіх m та n, тому за теоремою Карунена X можна зобразити у вигляді ряду, що збігається у середньому квадратичному,

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\xi_n\cos\frac{\pi nt}{b}, \tag{8.6}$$

де ξ_n — такі випадкові величини, що $\mathsf{E}\xi_n = 0$, $\mathsf{E}\xi_m\xi_n = a_{mn}$.

Означення 8.2. Якщо ξ_n, $n = 0,1,2,\ldots$, строго субгауссова сім'я випадкових величин, то випадковий процес

$$X_M(t) = \sum_{n=0}^{M}\xi_n\cos\frac{\pi nt}{b}$$

називається моделлю Фур'є (Ф-моделлю) строго субгауссового процесу X.

Для того, щоб побудувати Ф-модель, що наближає процес X з надійністю $1-\alpha$, $0 < \alpha < 1$, та точністю $\delta > 0$ в $L_2(T)$, можна скористатись наслідком 3.1. Легко пересвідчитись, що в цьому випадку $A_{M+1} = \frac{1}{2}b\sum_{k=M+1}^{\infty}a_{mn}$.

Для того, щоб побудувати Ф-модель, що наближає процес X з надійністю $1-\alpha$ та точністю δ в $L_p(T)$, можна скористатись теоремою 4.2. В цьому випадку

$$\sigma_{M+1}^2 = \sup_{t\in T}\sum_{k=M+1}^{\infty}\sum_{l=M+1}^{\infty}a_{kl}\cos\frac{\pi kt}{b}\cos\frac{\pi lt}{b}. \tag{8.7}$$

З книги [3] випливає, що сім'я функцій $\cos(\pi nt/b)$, $n = 0,1,2,\ldots$, належить класу $D_U(c)$, де $U(x) = |x|^p$, $c_n = 3(n/2)^{1/2-1/p}$. Тому для Ф-моделі, що наближає процес X в $L_p(T)$, $p \geq 2$, можна скористатисz теоремою 7.1.

В цьому випадку легко пересвідчитись, що

$$\check{B}_1(M+1,a) = 3\cdot 2^{1/p-1/2}\left(\frac{b}{2}\right)^{1/2}\sum_{k=M+1}^{\infty}k^{1/2-1/p}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)\left(\sum_{j=M+1}^{\infty}a_{jj}a_j^2\right)^{1/2}.$$

Зауважимо, що в цій ситуації простіше скористатися наслідком 7.2. Має місце, наприклад, така теорема.

Теорема 8.2. *Нехай для деякої послідовності* $a = \{a_k, k = 1, 2, \dots\}$ *такої, що* $0 \le a_k \le a_{k+1}$, $a_k \to \infty$ *при* $k \to \infty$, *для якої*

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} k^{1/2-1/p} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \le \infty \tag{8.8}$$

збігається ряд $\sum_{j=1}^{\infty} a_{jj} a_j^2 < \infty$. *Тоді Ф-модель* X_M *наближає* X *в* $L_p(T)$, $p > 2$, *з надійністю* $1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$, *та точністю* δ, *якщо* M *задовольняє нерівностям* $\delta > \check{B}_1(M + 1, a)$,

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta}{\check{B}_1(M+1,a)} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2(\check{B}_1(M+1,a))^2}\right\} \le \alpha,$$

$$\check{B}_1(M+1,a) = 3\left(\frac{b}{2}\right)^{1/2} \sum_{k=M+1}^{\infty} \left(\frac{k}{2}\right)^{1/2-1/p} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) \left(\sum_{j=M+1}^{\infty} a_{jj} a_j^2\right)^{1/2}.$$

Зауважимо, що з леми 7.1 випливає, що умові (8.8) задовольняє, наприклад, послідовність $a_k = k^{\beta}$, де β будь-яке число, що $\beta > 1/2 - 1/p$.

Якщо C-функція $U(x)$ задовольняє умовам теореми 5.1, то щоб знайти Ф-модель X_M, що наближає X з надійністю $1 - \alpha$ та точністю δ треба скористатися цією теоремою. При цьому $\hat{\mu}(T) = \max(b, 1)$, а $\tau^2 = \sigma_{M+1}^2$, де σ_{M+1}^2 визначено в (8.7).

Якщо C-функція $U(x)$ така, що функції $(U(x))^{1/2}$ та $U(|x|^{1/2})$ опуклі, то, щоб знайти M, для якого X_M наближає X з надійністю $1 - \alpha$ та точністю $\delta > 0$ в $L_U(T)$, треба скористатись теоремою 7.1 або наслідком 7.1. З роботи [4] випливає, що сім'я функцій $\cos(\pi n t/b)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, належить класу $D_U(c)$, де

$$c_n = \frac{(1+2b)\sqrt{2}}{\sqrt{b}} \frac{n^{1/2}}{U^{(-1)}(n/(2b))}.$$

Отже, в цьому випадку

$$\tilde{B}_1(M+1) = (1+2b) \sum_{k=M+1}^{\infty} c_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) \left(\sum_{j=M+1}^{k} a_{jj} a_j^2\right)^{1/2}.$$

Моделювання стаціонарних випадкових процесів з дискретним спектром. Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbf{R}\}$, $\mathsf{E}\, X(t) = 0$, стаціонарний випадковий процес з дискретним спектром, тобто такий процес , що $\mathsf{E}\, X(t+\tau)X(t) = B(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 \cos \lambda_k \tau$ та $\sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 < \infty$, $0 \le \lambda_k < \lambda_{k+1}$, $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Випадковий процес X можна зобразити у вигляді ряду, що збігається у середньому квадратичному

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\xi_k \cos(\lambda_k t) + \eta_k \sin(\lambda_k t)),$$

де ξ_k та η_k центровані та некорельовані випадкові величини, $\mathsf{E}\, \xi_k^2 = \mathsf{E}\, \eta_k^2 = b_k^2$.

Означення 8.2. Якщо ξ_k, η_k, $k = 1, 2, \dots$ — незалежні строго субгауссові випадкові величини, то випадковий процес

$$X_M(t) = \sum_{k=0}^{M} (\xi_k \cos(\lambda_k t) + \eta_k \sin(\lambda_k t)), \qquad t \in T = [0, b],$$

називається моделлю строго субгауссового стаціонарного процесу $X = \{X(t), t \in T\}$ ($D(T)$-модель).

Для того, щоб побудувати $D(T)$-модель, що наближає процес X з заданою надійністю та точністю в $L_2(T)$, можна скористатися наслідком 3.1. В цьому випадку $A_{M+1} = b \sum_{k=M+1}^{\infty} b_k^2$. Для того, щоб побудувати $D(T)$-модель, що наближає процес X з заданою надійністю та точністю в $L_p(T)$, можна скористатися теоремою 4.2. В цьому випадку $\sigma_{M+1}^2 = \sum_{k=M+1}^{\infty} b_k^2$. Нехай C-функція $U(X)$ задовольняє умовам теореми 5.1. Тоді для того, щоб побудувати $D(T)$-модель, що наближає процес X з заданою надійністю та точністю в $L_U(T)$, можна скористатися теоремою 5.2. В цьому випадку $\sigma_{M+1}^2 = \sum_{k=M+1}^{\infty} b_k^2$. Має місце також така теорема.

Теорема 8.3. *Нехай $a = \{a_k, k = 1, 2, \dots\}$ така послідовність, що $0 \le a_k \le a_{k+1}$, $a_k \to \infty$ при $k \to \infty$. C-функції $U(x)$ задовольняє умові: функції $(U(x))^{1/2}$ та $U(|x|^{1/2})$ — опуклі. Якщо збігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(U) \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) \left(\sum_{j=1}^{k} a_j^2 b_j^2\right)^{1/2} < \infty, \tag{8.9}$$

$$c_k(U) = \inf_{h>0} \left(h^{1/2} U^{(-1)}\left(\frac{1}{h}\right)\right)^{-1} \left(1 + h\left(\lambda_k \frac{2}{b}\right)\right), \tag{8.10}$$

то випадковий процес X_M є $D(T)$-моделлю, $T = [0, b]$, що наближає процес X з надійністю $1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$, та точністю $\delta > 0$ в $L_U(T)$, якщо M задовольняє нерівностям $G(M+1, a) \ge \delta$,

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta (\sin 1)^2}{G(M+1, a)} \exp\left\{-\frac{\delta^2 (\sin 1)^4}{2(G(M+1, a))^2}\right\} \le \alpha, \tag{8.11}$$

$$G(M+1, a) = \sum_{k=M+1}^{\infty} c_k(U) b^{1/2} S_4 \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) \left(\sum_{j=M+1}^{k} a_j^2 b_j^2\right)^{1/2},$$

$$S_4 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin u}{u}\right) du\right)^{1/2}.$$

Доведення. Розглянемо простір Орлича $L_U(\mathbf{R})$, тобто простір вимірних функцій на $\mathbf{R}$ з нормою

$$\|f\|_{L_U(\mathbf{R})} = \inf\left\{r \colon \int_{-\infty}^{\infty} U\left(\frac{f(t)}{r}\right) dt \le 1\right\}.$$

Для будь-якого $\varepsilon > 0$ позначимо

$$d_\varepsilon(t) = \left(\frac{\sin t\varepsilon}{t\varepsilon}\right)^2.$$

Для будь-яких $0 \le l \le m$ функція

$$X_l^m(t,\varepsilon) = d_\varepsilon(t)\sum_{k=l}^{m}(\xi_k \cos(\lambda_k t) + \eta_k \sin(\lambda_k t))$$

є функцією експоненціального типу $(\lambda_m + 2\varepsilon)$, обмеженою на дійсній осі. Тому з [4] випливає, що послідовність функцій $d_\varepsilon(t)\cos(\lambda_k t)$, $d_\varepsilon(t)\sin(\lambda_k t)$, $k = 0, 1, \ldots$, належить класу $D_U(c)$ з простору $L_U(\mathbf{R})$, де $c_k = c_k(U)$, (див. (8.10)). Оскільки випадкові величини ξ_k, η_k некорельовані та

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_\varepsilon^2(t)\cos^2(\lambda_k t)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} d_\varepsilon^2(t)\sin^2(\lambda_k t)\,dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^4 du,$$

то з теореми 7.1 випливає, що при $x > G(m,a)$ має місце нерівність

$$\begin{aligned}\mathsf{P}&\left\{\left\|d_\varepsilon(t)\sum_{k=m}^{\infty}(\xi_k \cos(\lambda_k t) + \eta_k \sin(\lambda_k t)\right\|_{L_U(\mathbf{R})} > x\right\}\\ &\le \exp\left\{\frac{1}{2}\right\}\frac{x}{G(M,a)}\exp\left\{-\frac{x^2}{2(G(M,a))^2}\right\},\end{aligned}\tag{8.12}$$

де $G(M,a)$ задано в (8.11).

Оскільки $d_\varepsilon(t) > (\sin 1)^2$ при $0 \le t \le \varepsilon^{-1}$, то для будь-якої обмеженої на $\mathbf{R}$ функції $f(t)$ та будь-якого $r > 0$ мають місце нерівності

$$\int_0^b U\left(\frac{f(t)}{r}\right)dt \le \int_0^b U\left(\frac{d_\varepsilon(t)f(t)}{(\sin 1)^2 r}\right)dt \le \int_{-\infty}^{\infty} U\left(\frac{d_\varepsilon(t)f(t)}{(\sin 1)^2 r}\right)dt. \tag{8.13}$$

Якщо в (8.13) покласти $r = \|d_\varepsilon(t)f(t)\|_{L_U(\mathbf{R})}$, то отримаємо, що

$$\|f(t)\|_{L_U(T)} \le (\sin)^{-1}\|d_\varepsilon(t)f(t)\|_{L_U(\mathbf{R})}.$$

З останньої нерівності, якщо покласти $\varepsilon = b^{-1}$, випливає, що для будь-якого $x > 0$ має місце нерівність

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\{\|X - X_M\|_{L_U(T)} > x\}\\ &\quad\le \mathsf{P}\left\{\left\|d_{b^{-1}}(t)\sum_{k=M+1}^{\infty}(\xi_k \cos(\lambda_k t) + \eta_k \sin(\lambda_k t))\right\|_{L_U(\mathbf{R})} > x(\sin 1)^2\right\}.\end{aligned}$$

З останньої нерівності та (8.12) випливає твердження теореми. □

Для спрощення нерівностей для визначення M можна скористатися наслідком 7.1.

Зауваження 8.1. Якщо в (4.6) покласти $h = (\lambda_n + 2/b)^{-1}$, то отримаємо, що як $c_n(U)$ можна брати числа

$$c_n(U) = \frac{2(\lambda_n + 2/b)^{1/2}}{U^{(-1)}(\lambda_n + 2/b)}.$$

Моделювання стаціонарних випадкових процесів з використанням їх розкладів у ряд Фур'є. Нехай $Y = \{Y(t), t \in \mathbf{R}\}$ — неперервний в середньому квадратичному стаціонарний випадковий процес, $\mathsf{E}Y(t) = 0$, $\mathsf{E}Y(t+\tau)Y(t) = B(\tau)$,

$t, \tau \in \mathbf{R}$. Нехай на інтервалі $[0, 2b]$ кореляційну функцію процесу Y можна розкласти у ряд Фур'є за косінусами з невід'ємними коефіцієнтами

$$B(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^2 \cos \frac{\pi k \tau}{2b}.$$

Тоді [6] випадковий процес

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\xi_k \cos \frac{\pi k t}{2b} + \eta_k \sin \frac{\pi k t}{2b} \right),$$

де ξ_k, η_k, $k = 0, 1, \ldots$, — незалежні центровані величини такі, що $\mathsf{E}\,\eta_k^2 = \mathsf{E}\,\xi_k^2 = g_k^2$, є стаціонарним процессом, що на відрізку $[0, b]$ має ту ж кореляційну функцію, що і процес Y. Якщо ξ_k та η_k строго субгауссові випадкові величини, то на $[0, 2b]$ $X(t)$ є строго субгауссовий випадковий процес з коваріаційною функцію $B(\tau)$. Оскільки $X(t)$ це процес з дискретним спектром, то моделі цього процесу розглянуто вище.

Зауваження 8.2. Якщо коваріаційна функція $B(\tau)$ опукла на відрізку $[0, 2b]$, то з теореми Харді [7] випливає, що її коефіцієнти Фур'є g_k^2 невід'ємні.

Зауваження 8.3. При побудові моделей випадкових процесів ми використовували теореми, що дають прості та точні оцінки. Зрозуміло, що ці оцінки можна покращити, якщо використати інші теореми роботи, але це призведе до істотних технічних складнощів.

Література

1. Ю. В. Козаченко, А. О. Пашко, *Точність моделювання випадкових процесів в нормах просторів Орлича. I.*, Теор. ймовір. та матем. статист. **58** (1998), 45–60.
2. И.Н. Зелепугина, Ю.В. Козаченко, *О скорости сходимости разложений Карунена-Лоэва гауссовских случайных процессов*, Теори. вероятн. и матем. статист. **38** (1988), 41–51.
3. С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, "Наука", Москва, 1977.
4. И. Н. Зелепугина, В. В. Рязанцева, *О сходимости некоторых субгауссовских случайных рядов в нормах пространства Орлича*, Теор. вероятн. и матем. статист. **40** (1989), 28–36.
5. М. Лоэв, *Теория вероятностей*, "Иностр. литер.", Москва, 1962.
6. Ю. В. Козаченко, Л. Ф. Козаченко, *О точности моделирования в $L_2(0,T)$ гауссовских случайных процессов*, Вычисл. прикл. матем. **75** (1991), 108–115.
7. Г. Х. Харди, В. В. Рогозинский, *Ряды Фурье*, "Физматгиз", Москва, 1966.

252601, Київ–601, вул. Володимирська, 64, Київський університет ім. Тараса Шевченка, кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики

252601, Київ–601, вул. Володимирська, 64, Київський університет ім. Тараса Шевченка, кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики

Надійшла 06/09/1998