О. К. ЗАКУСИЛО, студ.
Киевский университет

РЕДЕЮЩИЕ ПОЛУМАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Пусть задан полумарковский процесс $\xi(t)$ с конечным числом состояний m, матрицей переходных вероятностей вложенной цепи Маркова $A = \|p_{ij}\|$, $i, j = \overline{1, m}$; временем пребывания τ_{ij} в состоянии i при условии следующего попадания в j с функцией распределения $F_{ij}(t)$.

Процесс $\bar{\xi}(t)$ строится следующим образом:

а) $\bar{\xi}(0) = \xi(0)$;

б) если $\xi(t)$ находится в состоянии i, а $\bar{\xi}(t)$ — в состоянии j, то процесс $\bar{\xi}(t)$ находится в состоянии j до конца времени пребывания процесса $\xi(t)$ в состоянии i. Если процесс $\xi(t)$ переходит в состояние j, то процесс $\bar{\xi}(t)$ остается в состоянии j, если же процесс $\xi(t)$ переходит в состояние $k \neq j$, то у процесса $\bar{\xi}(t)$ появляется возможность перейти в состояние k с вероятностью $1 - q$ или же остаться в состоянии j с вероятностью q.

Рассматривается поведение процесса $\bar{\xi}(t)$ при $q \to 1$. Процесс $\bar{\xi}(t)$ является полумарковским процессом с тем же множеством состояний. Для расчета его вложенной цепи Маркова введем следующие обозначения:

ξ_n, $\bar{\xi}_n$ — состояния вложенных цепей Маркова на их n-м шаге;

A_k^j — событие, заключающееся в том, что первый переход цепи $\bar{\xi}$ произойдет в момент k-го попадания цепи ξ в состояние j;

$\bar{A}_l^j$ — событие, заключающееся в том, что в момент l-го попадания цепи ξ в состояние j цепь $\bar{\xi}$ продолжает оставаться в состоянии i.

Тогда

$$\bar{P}_{ij} = P\{\bar{\xi}_1 = j/\bar{\xi}_0 = i\} = P\{\bar{\xi}_1 = j/\xi_0 = i\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P\{A_k^j, \bar{A}_e^j, l = \overline{1, k-1}/\xi_0 = i\} = P\{A_1^j/\xi_0 = i\} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} P\{A_k^j/\bar{A}_{k-1}^j\} \prod_{l=2}^{k-1} P\{\bar{A}_e^j/\bar{A}_{l-1}^j\} P\{\bar{A}_1^j/\xi_0 = i\}.$$

Поскольку $P\{A_1^i/\xi_0 = i\} \leqslant 1 - q$ для всех i и j, то

$$P\{A_1^j/\xi_0 = i\} \xrightarrow[q\to 1]{} 0, \quad P\{\overline{A}_l^j/\xi_0 = i\} \xrightarrow[q\to 1]{} 1.$$

Поэтому

$$\lim_{q\to 1} \overline{P}_{ij} = \lim_{q\to 1} \sum_{k=2}^{\infty} P\{A_k^j/\overline{A}_{k-1}^j\} \prod_{l=2}^{k-1} P\{\overline{A}_l^j/\overline{A}_{l-1}^j\}.$$

Введем в рассмотрение величину ν_k^i, равную числу попаданий цепи ξ в состояние i между k—1-м и k-м попаданиями в j. Величины ν_k^i независимы, одинаково распределены и имеют конечные математические ожидания [2]

$$M\nu_k^i = \frac{q_i}{q_j}.$$

Введем также величину ν_k, равную числу шагов между k — 1-м и k-м попаданиями в состояние j. Величины ν_k независимы, одинаково распределены и имеют конечные математические ожидания [2]

$$M\nu_k = \frac{1}{q_j}.$$

Поскольку

$$P\{\overline{A}_l^j/\overline{A}_{l-1}^j\} = M_j q^{\nu_l - \nu_l^i},$$

$$P\{A_l^j/\overline{A}_{l-1}^j\} = \frac{1-q}{q} M_j q^{\nu_l - \nu_l^i},$$

то

$$\lim_{q\to 1} \overline{P}_{ij} = \lim_{q\to 1} M_j q^{\nu_l - \nu_l^i} \frac{1-q}{q\cdot(1 - M_j q^{\nu_l - \nu_l^j})} = \lim_{q\to 1} \frac{1-q}{1 - M_j q^{\nu_l - \nu_l^j}}.$$

Раскрывая по правилу Лопиталя эту неопределенность (дифференцирование под знаком математического ожидания возможно из за равномерной сходимости по q), получаем

$$\lim_{q\to 1} \overline{P}_{ij} = \frac{1}{M_j(\nu_l - \nu_l^i)} = \frac{q_j}{1 - q_i}.$$

В последнем преобразовании был сделан предельный переход под знаком математического ожидания по теореме Беппо—Леви. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Переходные вероятности вложенной цепи Маркова процесса $\xi(t)$ в пределе имеют вид

$$\lim_{q\to 1} \overline{P}_{ij} = \frac{q_j}{1 - q_i}.$$

Рассмотрим время пребывания процесса $\bar{\xi}(t)$ в состоянии i. Если обозначить его через $\bar{\tau}_i$, то событие $\{\bar{\tau}_i > t\}$ наступит тогда и только тогда, когда в моменты попаданий процесса $\xi(s)$, $0 \leqslant s < t$

в состояния $j \neq i$ процесс $\bar{\xi}(s)$ остается в состоянии i. Исходя из этого:

$$P\{\bar{\tau}_i > t\} = M_i q^{N(t)-N_i(t)},$$

где $N(t)$ — число скачков процесса $\xi(\cdot)$ за время t; $N_i(t)$ — число попаданий в состояние i за время t.

В случае существования $m_{ij} = M\tau_{ij}$ имеет место соотношение

$$N(t) \overset{p}{\sim} \frac{t}{\sum\limits_{k=1}^{m} q_k m_k}, \text{ где } m_k = \sum_{l=1}^{m} p_{kl} m_{kl}.$$

Кроме того, во всех случаях

$$N_i(t) \overset{p}{\sim} q_i N(t),$$

поэтому при нормировке $1-q$

$$\lim_{q\to 1} P\{(1-q)\bar{\tau}_i > t\} = \exp\left\{-t\frac{1-q_i}{\sum\limits_{k=1}^{m} q_k m_k}\right\}.$$

Таким образом, получена следующая теорема.

Теорема 2. В случае существования $m_{ij} = M\tau_{ij}$ процесс $\bar{\xi}(t)$ в пределе является марковским.

В оставшихся случаях предполагаем, что величины τ_{ij} зависят лишь от индекса i. Схема рассуждений выглядит следующим образом:

а) полумарковский процесс $\xi(t)$ рассматриваем как процесс восстановления, время восстановления которого равно времени возвращения из i-го состояния в i-е;

б) с помощью доказываемой ниже леммы получаем асимптотику хвоста врѐмени восстановления;

в) на основании этой асимптотики получаем асимптотику числа восстановлений, т. е. величины $N_i(t)$, и, следовательно, величины $N(t) - N_i(t)$;

г) при соответствующих нормировках находим предельное распределение величины $\bar{\tau}_i$.

Лемма. Если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, ν — не зависящая от них целочисленная величина с производящей функцией $P(s)$ и конечным математическим ожиданием $M\nu = P'(1)$ и

$$P\{\xi_i > t\} \sim t^{-\alpha} L(t),$$

где $0 < \alpha \leqslant 1$, $L(t)$ — медленно меняющаяся функция, то

$$P\left\{\sum_{k=1}^{\nu} \xi_k > t\right\} \sim t^{-\alpha} M\nu L(t).$$

Доказательство. Воспользуемся следующей тауберовой теоремой [1]:

$$1 - F(x) \sim x^{-\alpha} L(x) \Longleftrightarrow 1 - \varphi(s) \sim s^{\alpha} L\left(\frac{1}{s}\right) c(\alpha),$$

где $0 < \alpha \leqslant 1$, $\varphi(s) = Me^{-s\xi}$.

Поскольку

$$Me^{-s\sum\limits_{k=1}^{\nu}\xi_k} = P(\varphi(s)),$$

то из того, что

$$\lim_{s\to 0}\frac{1-P(\varphi(s))}{1-\varphi(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{P'(\varphi(s))\varphi'(s)}{\varphi'(s)} = P'(1) = M\nu,$$

т. е.

$$1 - P(\varphi(s)) \sim s^{\alpha} C(\alpha) M\nu L\left(\frac{1}{s}\right),$$

следует утверждение леммы.

Из того, что время возвращения τ_{ii} равно

$$\tau_{ii} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{\nu_i^k}\tau_k^l,$$

где ν_k^l — число попаданий в состояние k между двумя попаданиями в i, и из леммы следует

$$P\{\tau_{ii} > t\} \sim \sum_{k=1}^{m} M\nu_i^k P\{\tau_k > t\}.$$

Рассмотрим 2 случая.

1. Оценка для $P\{\tau_{ii} > t\}$ имеет вид

$$P\{\tau_{ii} > t\} = 1 - P\{t\} \sim t^{-1} L(t).$$

В данном случае

$$N_i(t) \overset{p}{\sim} \frac{t}{\int\limits_0^t x dP(x)},$$

поэтому

$$N(t) - N_i(t) \overset{p}{\sim} (1 - q_i) f(t) + o(f(t));$$

$$\lim_{q\to 1} P\left\{\bar{\tau}_i > f^{-1}\left(\frac{t}{1-q}\right)\right\} = e^{-t(1-q_i)}.$$

2. Если у времени возвращения хвост распределения имеет вид

$$1 - P(t) \sim q_i t^{-\alpha} L(t),\ 0 < \alpha < 1,$$

то

$$P\left\{(1 - P(t)) N_i(t) \geqslant \frac{2-\alpha}{\alpha} x^{-\alpha}\right\} \xrightarrow[t\to\infty]{} G_\alpha(x),$$

где $G_\alpha(x)$ — устойчивое распределение с параметром α [1].

Если функция $f(q)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\alpha}{2-\alpha} q_i L\left(\frac{1}{f(q)}\right) f^{\alpha}(q) \sim 1-q,$$

то с помощью несложных преобразований и предельных переходов под знаком интеграла по теореме Лебега получим

$$\lim_{q\to 1} P\left\{\bar{\tau}_i > \frac{t}{f(q)}\right\} = \lim_{q\to 1} M_i q^{N\left(\frac{t}{f(q)}\right) - N_i\left(\frac{t}{f(q)}\right)} =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(1-q_i)\left(\frac{t}{z}\right)^{\alpha}} dG_{\alpha}(z),$$

т. е.

$$f(q)\bar{\tau}_i \underset{q\to 1}{\overset{\text{сл}}{\Rightarrow}} \left(\frac{\xi}{1-q_i}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \eta_{\alpha},$$

где ξ — показательно распределенная со средним 1, η_{α} — устойчивая с параметром α, ξ и η_{α} независимы.

Таким образом, получено следующее утверждение.

Теорема 3. Если у времени возвращения хвост распределения имеет вид $1 - P(t) \sim t^{-1} L(t)$, то существует функция $f(\cdot)$, такая, что

$$\lim_{q\to 1} P\left\{\bar{\tau}_i > f^{-1}\left(\frac{t}{1-q}\right)\right\} = e^{-t(1-q_i)},$$

т. е. предельный процесс будет марковским. Если же хвост распределения имеет вид $1 - P(t) \sim t^{-1}\alpha L(t)$, где $0 < \alpha < 1$, то существует нормировка $f(q)$ такая, что

$$f(q)\bar{\tau}_i \underset{q\to 1}{\overset{\text{сл}}{\Rightarrow}} \left(\frac{\xi}{1-q_i}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \eta_{\alpha}.$$

Одним из возможных обобщений рассмотренной выше схемы является следующее. В моменты перехода процесса $\xi(t)$ из состояния i в какое-либо другое состояние j процесс $\bar{\xi}(t)$ остается в состоянии, в котором он пребывал до этого, с вероятностью $\alpha_j = q^{a_j}$, и переходит в состояние j с вероятностью $1 - \alpha_j$. В начальный момент времени $\bar{\xi}(0) = \xi(0)$. Рассматривается поведение процесса $\bar{\xi}(t)$ при $q \to 1$. В этом случае имеют место следующие аналоги теорем 1, 2 и 3.

Теорема 4. Переходные вероятности вложенной цепи Маркова процесса $\bar{\xi}(t)$ в пределе имеют вид

$$\lim_{q\to 1} \bar{p}_{ij} = \frac{a_j q_j}{\sum_{r\neq i} a_r q_r}.$$

Теорема 5. При выполнении условий теоремы 2 процесс $\bar{\xi}(t)$ в пределе является марковским, и время его пребывания в состоянии i имеет предельную функцию распределения $P_i(t)$:

$$1 - P_i(t) = \exp\left\{- t \frac{\sum_{k=1}^{m} a_k q_k}{\sum_{k \neq i} q_k m_k}\right\}.$$

Теорема 6. При выполнении условий теоремы 3 существуют соответственно функция $f(\cdot)$ и нормировка $f(q)$ такая, что

$$\lim_{q \to 1} P\left\{\bar{\tau}_i > f^{-1}\left(\frac{t}{1-q}\right)\right\} = e^{-t \sum_{k \neq 1} a_k q_k},$$

$$f(q)\bar{\tau}_i \underset{q \to 1}{\overset{\text{сл}}{\Rightarrow}} \left(\frac{\xi}{\sum_{k \neq i} q_k a_k}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \eta_\alpha.$$

Обе задачи при соответствующей переформулировке сводятся к задаче нахождения асимптотики времени пребывания полумарковского процесса в заданном множестве состояний, когда вероятность выхода из множества стремится к нулю. Впервые эта задача была рассмотрена В. С. Королюком. Он показал, что при известных ограничениях время пребывания во множестве состояний будет иметь в пределе показательное распределение, с чем согласуются результаты данной работы.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. С. Королюку за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феллер В. Введение в теорию вероятности и ее приложения, т. 2. М., «Мир», 1967.
2. Чжун Кай-лай. Однородные цепи Маркова. М., «Мир», 1964.
3. Королюк В. С. Об асимптотическом поведении времени пребывания полумарковского процесса в подмножестве состояний. УМЖ, 1969, **21**, 6.

O. K. Zakusylo

THE RARING SEMI-MARKOV PROCESSES

Summary

Limit distributions of the occupation times for semi-Markov processes with finite number of states are investigated.

Поступила в редколлегию 15.XII.1970.