И. Ш. ИБРАМХАЛИЛОВ, доц.
Азербайджанский институт народного хозяйства

ОБ ОЦЕНКАХ ФУНКЦИОНАЛЬНО СВЯЗАННЫХ ПАРАМЕТРОВ

§ 1. В статье изучаются оценки параметров распределений, связанных между собой некоторыми функциональными соотношениями. В этом случае нежелательно использовать методы, применяемые для несвязанных параметров, поскольку оценки не будут удовлетворять уравнениям связи, а исключить часть параметров так, чтобы оставшиеся параметры были уже несвязанными, практически не всегда возможно. Поэтому целесообразно использовать метод неопределенных множителей Лагранжа. Согласно этому методу к уравнениям, из которых определяются параметры при отсутствии связей, добавляются продифференцированные уравнения связи неопределенными множителями и сами уравнения связи. Решения таких уравнений приводят к оценкам, удовлетворяющим уравнениям связи и обладающим теми же свойствами, что и в случае отсутствия связи. Такое видоизменение уравнений максимума правдоподобия на случай связанных параметров рассматривалось в работе [2].

В работах автора [6, 7] был рассмотрен более общий метод определения параметров, пригодный и в тех случаях, когда плотности либо не существуют, либо не могут быть выписаны в явном виде, либо могут обращаться в нуль в некоторых интервалах. Предложенный там метод во многих случаях приводит к уравнениям, которые могут быть решены в явном виде, или к уравнениям, степень сложности которых не зависит от числа наблюдений. Поясним этот метод на одном простейшем примере.

Пусть $F(x, \theta)$ — семейство распределений, зависящее от одного вещественного параметра θ, а $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые наблюдения. Если функция $\varphi(x, \theta)$ такова, что $\int \varphi(x, \theta)\, dF(x, \theta) = 0$ для всех θ, то оценка параметра θ — $\bar{\theta}$ ищется как решение уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i, \bar{\theta}) = 0.$$

Такая оценка при весьма широких условиях оказывается состоятельной асимптотически нормальной с ненулевой эффективностью. В статье изучаются видоизменения указанного уравнения (и его обобщений, рассмотренных в [7] на случай связанных параметров). Доказывается существование состоятельной асимтотически нормальной оценки.

§ 2. Пусть ξ_i — выборка из n независимых наблюдений случайных величин с функцией распределения $F(x, \theta)$, содержащей неизвестный параметр θ из h-мерного евклидова пространства. Обозначим s-мерное евклидово пространство R^s, $s = 1, 2, \ldots$ и неизвестное истинное значение параметра $\theta = \theta_0 \in R^h$. Оценки для неизвестных параметров будем обозначать $\theta_n(\xi)$. Для любого малого $\alpha > 0$ вводим множество $R^h_\alpha = \{\theta : \|\theta - \theta_0\| < \alpha\}$, функция распределения $F(x, \theta)$ определена на $R^1 \times R^h$ и параметры распределения функционально связаны соотношениями $f_i(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta^h) = 0$ или $f(\theta) = 0$, где $f(\theta) \in R^q$, $q < h$, $i = \overline{1, q}$.

1. Функции $f_i(\theta)$, $i = \overline{1, q}$ непрерывны для любого $\theta \in R^h_\alpha$, и существуют непрерывные частные производные до второго порядка, кроме того, при истинном значении параметра $\theta = \theta_0$ $f_i(\theta_0) = 0$, $i = \overline{1, q}$.

2. Пусть существуют функции $\varphi_k(x, \theta)$, $k = \overline{1, h}$ такие, что для любого $\theta \in R^h_\alpha$ $M_\theta\{\varphi_k(\xi, \theta)\} = 0$.

Оценки для неизвестных параметров (если они функционально независимы) обычно находятся из уравнений [7] вида

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_k(\xi_i, \theta) = 0, \quad k = \overline{1, h}.$$

Поскольку неизвестные параметры функционально связаны, оценки для них можно найти различными способами. Мы введем так называемые множители Лагранжа $\lambda \in R^q$ и будем искать оценки параметров как решения системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_k(\xi_i, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_h) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j f'_{j.\theta_k}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_h) = 0, \tag{1}$$
$$f_i(\theta_1\, \theta_2, \ldots, \theta_h) = 0, \quad k = \overline{1, h}, \; i = \overline{1, q}.$$

При исследовании системы (1) удобно употреблять матричные обозначения. Тогда (1) можно написать в виде

$$A(\xi, \theta) + \Phi(\theta)\lambda = 0, \tag{2}$$
$$f(\theta) = 0,$$

где $A(x, \theta)$ есть матрица $h \times 1$,

$$A(x, \theta) = (A_1(x, \theta), A_2(x, \theta), \ldots, A_h(x, \theta)) \in R^h,$$
$$A_k(\xi, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_k(\xi_i, \theta)$$

и $\Phi(\theta) = \|f'_{j.\theta_k}(\theta)\|$ матрица $h \times q$, $j = \overline{1, q}$, $k = \overline{1, h}$.

3. Предположим, что $\varphi_k(x, \theta)$ имеет непрерывные производные второго порядка почти для всех $x \in R^1$ и для любого $\theta \in R_\alpha^h$.

Тогда, разлагая функции $A(x, \theta)$ и $f(\theta)$ в точке $\theta = \theta_0$ по формуле Тейлора, (2) можно переписать в виде

$$A(\xi, \theta_0) + H(\xi, \theta_0)(\theta - \theta_0) + \eta_1(\xi, \theta) + \Phi(\theta)\lambda = 0, \qquad (3)$$
$$\Phi'(\theta_0)(\theta - \theta_0) + L_1(\theta) = 0,$$

где матрица

$$H(\xi, \theta_0) = \| A'_{i,\theta_j}(\xi, \theta_0) \|, \quad A'_{i,\theta_j}(\xi, \theta_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i(\xi_k, \theta_0)}{\partial \theta_j},$$

$$i, j = \overline{1, h}, \quad L_1(\theta) \in R^q, \quad \eta_1(\xi, \theta) \in R^h,$$

k-е компоненты этих векторов соответственно будут

$$\frac{1}{2}(\theta - \theta_0)' Q_k (\theta - \theta_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{h} A''_{k,\theta_i\theta_j}(\xi, \gamma^{(k)})(\theta_i - \theta_i^0)(\theta_j - \theta_j^0),$$

$$\frac{1}{2}(\theta - \theta_0)' P_k (\theta - \theta_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{h} f''_{k,\theta_i\theta_j}(\beta^{(k)})(\theta_i - \theta_i^0)(\theta_j - \theta_j^0),$$

$$\| \gamma^{(k)} - \theta_0 \| < \| \theta - \theta_0 \|, \quad \| \beta^{(k)} - \theta_0 \| < \| \theta - \theta_0 \|, \quad \gamma^{(k)} \in R^h, \ \beta^{(k)} \in R^q.$$

Теперь исследуем систему уравнений (3), эквивалентную (1). При некоторых ограничениях на функции $\varphi_k(x, \theta)$ и $f_l(\theta)$, если $\delta > 0$ достаточно малое и n достаточно большое число, в множестве ξ, для которых вероятностная мера приближается к единице при $n \to \infty$, уравнения (1) имеют решение $\theta_n(\xi)$, $\lambda_n(\xi)$ такое, что $\theta_n(\xi) \in R_\delta^h$. Это решение будет состоятельным и асимптотически нормальным.

Основная лемма. Пусть функции $\varphi_k(x, \theta)$ и $f_l(\theta)$, $k = \overline{1, h}$, $l = \overline{1, q}$ удовлетворяют условиям 1—3 и условиям:

4. Для любого $\theta \in R_\alpha^h$ и почти для всех $x \in R^1$

$$|\varphi'_{k,\theta_i}(x, \theta)| < G_1(x), \quad |\varphi''_{k,\theta_i\theta_j}(x, \theta)| < G_2(x),$$
$$M_\theta G_1(\xi) < \infty, \quad M_\theta G_2(\xi) < C_1 < \infty,$$

причем C_1 не зависит от θ и

$$|f''_{l,\theta_i\theta_j}(\theta)| < 2C_2 < \infty, \quad i, j, k = \overline{1, h}, \quad l = \overline{1, q}.$$

5. Ранг $\Phi(\theta) = q$.

6. $-H(\theta) = \|a_{ij}\|$, матрица $H(\theta)$ положительно определена,

$$a_{ij} = M_\theta \left\{ \varphi'_{i,\theta_j}(\xi, \theta) \right\}, \quad i, j = \overline{1, h}$$

для любого $\theta \in R_\delta^h$.

Тогда для всякого δ и ε ($0 < \delta < \alpha$, $0 < \varepsilon < 1$) существует такое $n(\varepsilon, \delta)$, что при $n > n(\varepsilon, \delta)$ можно указать такое множество $\mathfrak{X}_n \in R^n$ и непрерывную ограниченную функцию $L(x, \theta)$, определенную при $\xi \in \mathfrak{X}_n$, $\theta \in R^h_\delta$ и принимающую значения из R^h, что

а) $P_\theta\{\mathfrak{X}_n\} > 1 - \varepsilon$ для всех $\theta \in R^h_\delta$;

б) система уравнений (1) имеет решение $\theta_n(\xi)$, $\lambda_n(\xi)$ такое, что при $\xi \in \mathfrak{X}_n$, $\theta_n(\xi) \in R^h_\delta$ тогда и только тогда, когда уравнение

$$H(\theta_0)(\theta - \theta_0) - \delta^2 L(x, \theta) = 0 \tag{4}$$

имеет решение $\bar{\theta}_n(\xi) \in R^h_\delta$ и в этом случае $\theta_n(\xi) = \bar{\theta}_n(\xi)$.

Замечание 1. Другими словами, уравнение (4) при $\xi \in \mathfrak{X}_n$, $\theta \in R^h_\delta$ получается исключением из системы уравнений (2) неизвестных λ.

Доказательство. Сначала докажем а). Обозначим $G(\xi) = \sum_{i=1}^{n} G_2(\xi_i)$. Очевидно, что $\frac{1}{n}A(\xi, \theta_0)$, $\frac{1}{n}H(\xi, \theta_0)$ и $G(\xi)$ сходятся по вероятности соответственно к величинам $0 \in R^h$, $-H(\theta_0)$ и C_1. Следовательно,

$$\frac{1}{n}|A''_{k,\theta_i\theta_j}(\xi, \theta)| = \left|\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} \varphi''_{k,\theta_i\theta_j}(\xi_l, \theta)\right| < G(\xi).$$

Отсюда вытекает утверждение, что существует $\mathfrak{X}_n$ множество тех $\xi \in R^h$, для которых

$$\left\|\frac{1}{n}A(\xi, \theta_0)\right\| < \delta^2, \tag{*}$$

$$\left\|\frac{1}{n}H(\xi, \theta_0) + H(\theta_0)\right\| \leqslant \delta, \tag{**}$$

$$\left\|\frac{1}{n}A''_{k,\theta_i\theta_j}(\xi, \theta)\right\| < 2C_1, \text{ для любого } \theta \in R^h_\delta,\ k, i, j = \overline{1, h}. \tag{***}$$

Тогда для всякого ε, δ существует такой номер $n(\varepsilon, \delta)$, что при $n > n(\varepsilon, \delta)$ $P_\theta\{\xi \in \mathfrak{X}_n)\} > 1 - \varepsilon$. Положим

$$\frac{1}{n}H(\xi, \theta_0) = -H(\theta_0) + \delta U_1(\xi, \theta_0),$$

где $U_1(\xi, \theta_0)$ — матрица $h \times h$ и элементы ограничены по вероятности при $n \to \infty$, если $\xi \in \mathfrak{X}_n$.

Теперь докажем б). *Необходимость.* Деля на n первое уравнение системы (3) и учитывая для $f(\theta)$ условия 4 и (*) — (***), получаем

$$H(\theta_0)(\theta - \theta_0) - \frac{1}{n}\Phi(\theta)\lambda + \delta^2\eta_2(\xi, \theta) = 0,$$

$$\Phi'(\theta_0)(\theta - \theta_0) + \delta^2 L_2(\theta) = 0, \tag{5}$$

где

$$\eta_2(\xi, \theta) \in R^h, \quad L_2(\theta) \in R^q,$$

$$L_1(\theta) = \delta^2 L_2(\theta) = f(\theta) - \Phi'(\theta_0)(\theta - \theta_0),$$

$$\eta_2(\xi, \theta) = -\frac{1}{n\delta^2}A(\xi, \theta_0) - \frac{1}{\delta}U_1(\xi, \theta_0)(\theta - \theta_0) - \frac{1}{n\delta^2}\eta_1(\xi, \theta),$$

$$\eta_3(\xi, \theta) = -\frac{1}{\delta^2}\left[H(\theta_0)(\theta-\theta_0) + \frac{1}{n}A(\xi, \theta)\right],$$

$$\eta_4(\xi, \theta) = \delta^2\eta_2(\xi, \theta) = \delta^2\eta_3(\xi, \theta) = -H(\theta_0)(\theta-\theta_0) - \frac{1}{n}A(\xi, \theta).$$

Если $\xi \in \mathfrak{X}_n$ и $\theta \in R_\delta^h$, очевидно, что

$$\frac{1}{n\delta^2}\|A(\xi, \theta_0)\| < 1, \ \|U_1(\xi, \theta_0)(\theta-\theta_0)\| < h^2\delta,$$

$$\frac{1}{n\delta^2}\|\eta_1(\xi, \theta)\| < h^2C_1, \ \|L_1(\theta)\| < h^3C_2\delta^2.$$

Следовательно, $\|\eta_2(\xi, \theta)\| < C_3$, $\|L_2(\theta)\| < C_4$, где C_3, C_4 есть константы.

Теперь предположим, что $\theta_n(\xi)$ и $\lambda_n(\xi)$ есть решение системы уравнений (1) и $\theta_n(\xi) \in R_\delta^h$. Докажем, что это и есть решение (4).

Умножая первое уравнение системы (5) на $P(\theta_0) = \Phi'(\theta_0)H^{-1}(\theta_0)$ и учитывая второе уравнение системы (5), получаем

$$\lambda_n(\xi) = -\delta^2 nQ^{-1}(\theta)\eta_3^{(1)}(\xi, \theta), \tag{6}$$

где

$$\eta_3^{(1)}(\xi, \theta) = L_2(\theta) + P(\theta_0)\eta_2(\xi, \theta),$$

$$Q(\theta) = \Phi'(\theta_0)H^{-1}(\theta_0)\Phi(\theta), \tag{7}$$

$Q(\theta)$ — положительно определенная матрица.

Существует окрестность θ_0, где $\det Q(\theta) \neq 0$ и ограничен. Заранее α можно выбрать так, чтобы R_α^h была именно этой окрестностью, следовательно, можно найти λ в зависимости θ. Элементы $Q^{-1}(\theta)$ есть непрерывные функции по $\theta \in R_\alpha^h$ и $0 \neq |\det Q(\theta)| < \infty$. Тогда множество R_α^h замкнуто, следовательно, элементы $Q^{-1}(\theta)$ в R_α^h равномерно ограничены. Теперь, исключив λ из системы (5), получим

$$H(\theta_0)(\theta-\theta_0) + \frac{1}{n}\Phi(\theta)[\delta^2 nQ^{-1}(\theta)\eta_3^{(1)}(\xi, \theta) - \delta^2\eta_2(\xi, \theta)] = 0. \tag{8}$$

Таким образом, обозначив

$$L(\xi, \theta) = -\Phi(\theta)Q^{-1}(\theta)\eta_3^{(1)}(\xi, \theta) + \eta_2(\xi, \theta),$$

получим (4).

Из непрерывности и ограниченности $L_1(\theta)$, $\eta_4(\xi, \theta)$ и $Q^{-1}(\theta)$ вытекает, что $L(\xi, \theta)$ в R_δ^h непрерывна и ограничена константой, скажем C_5.

Достаточность. Пусть (4) имеет решение $\bar{\theta}_n(\xi) \in R_\delta^h$. Покажем, что оно будет также решением системы уравнений (1). Возьмем уравнение (4) в виде (8) и запишем $\bar{\theta}_n(\xi)$ вместо θ. Умножая (8) слева на $P(\theta_0)$ и учитывая $L_1(\theta)$, заметим, что $\bar{\theta}_n(\xi)$ удовлетворяет второму уравнению системы (1). Теперь обозначим

$$V(\bar{\theta}_n(\xi)) = Q^{-1}(\bar{\theta}_n(\xi))P(\theta_0)$$

и определим

$$\lambda_n(\xi) = -V(\bar\theta_n(\xi)) A(\xi, \bar\theta_n(\xi)).$$

Тогда вместе со значениями $L_1(\bar\theta_n(\xi))$, $\eta_4(\xi, \bar\theta_n(\xi))$ из (8) следует справедливость леммы.

§ 4. Теперь докажем, что если $\delta > 0$ достаточно малое, то для уравнения (4) существует решение, следовательно, система уравнений (1) имеет решение. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Предположим, что для функций $\varphi_k(x, \theta)$ и $f_l(\theta)$, $k = \overline{1, h}$, $l = \overline{1, q}$ выполнены условия 1,5 леммы. Тогда для достаточно малого $\delta > 0$ и $\xi \in \mathfrak{X}_n$ система уравнений (4) имеет решение $\theta_n(\xi)$, $\lambda_n(\xi)$ такое, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} P_\theta\{\theta_n(\xi) \in R_\delta^h\} = 1$,

2) для всякого $\gamma_1 > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta\{\theta_n(\xi) \in R_\delta^h,\ \|\theta_n(\xi) - \theta_0\| > \gamma_1\} = 0.$$

Замечание 2. Если для всякого $\theta \in R_\delta^h$ функция $L(x, \theta)$ имеет ограниченные производные по θ при $\xi \in \mathfrak{X}_n$, то решение уравнения (4) при достаточно малом $\delta > 0$ будет единственным.

Для доказательства теоремы будем пользоваться следующим предложением. Этот результат эквивалентен теореме о неподвижной точке [5].

Предложение. $\psi(x)$ — есть непрерывное отображение многомерного пространства в самого себя, причем для всякого x, $\|x\| = 1$, $x'\psi(x) < 0$, тогда существует $y\ \|y\| = 1$ и $\psi(y) = 0$.

Доказательство теоремы 1. Пусть S_Φ^h — единичная сфера в h-мерном пространстве R^h. Минимальное характеристическое число матрицы $H(\theta_0)$ обозначим через h_0. Очевидно, что левая часть уравнения (4) непрерывна в S_Φ^h. Возьмем $\delta = \|\theta - \theta_0\|$. Тогда очевидно, что для всякого $\theta \in R_\delta^h$, для которого $\delta = \|\theta - \theta_0\|$, имеет место

$$-\delta y' H(\theta_0) y + \delta^2 y L(x, \theta) \leqslant \delta(C_5\delta - h_0),$$

где $y\delta = \theta - \theta_0$.

Следовательно, δ можно выбрать так, что $C_5\delta - h_0 < 0$, $C_5 < \frac{h_0}{\delta}$.

По предложению, существует точка $\theta_n'(\xi) \in R_\delta^h$ такая, что уравнения (4) удовлетворяются. Таким образом, при $\xi \in \mathfrak{X}_n$ $\theta_n(\xi)$ и $\lambda_n(\xi)$ есть решения системы (1), причем $\theta_n(\xi) \in R_\delta^h$.

Для доказательства существования состоятельной оценки параметра θ, являющейся решением уравнения (4), выберем последовательности $\varepsilon_m \to 0$ и $\delta_m \to 0$, и для каждого m число $n_m = n(\delta_m, \varepsilon_m)$, так чтобы $n_{m+1} > n_m$.

Пусть $\theta_n(\xi)$ при $n_m \leqslant n < n_{m+1}$, является решением (4), для которого $\theta_n(\xi) \in R^h_{\delta_m}$. Тогда

$$P_\theta\{\|\theta_n - \theta_0\| > \delta_m\} \leqslant \varepsilon_m.$$

Это и показывает, что $\theta_n(\xi)$ будет состоятельной оценкой. На основе леммы эти оценки будут удовлетворять с некоторыми $\lambda_n(\xi)$ системе уравнений (1). Теорема доказана.

Замечание 3. Оценки, определяемые в теореме 1, существуют не при всех $\bar{\xi}$, а лишь на множестве выборок, вероятность которого стремится к единице при $n \to \infty$. Чтобы избежать применения частично определенных статистик, можно доопределить оценку при $\bar{\xi} \in \mathfrak{X}_n$ произвольным образом и это не изменит ее асимптотических свойств.

Следующей теоремой устанавливается асимптотическая нормальность оценок $\theta_n(\xi)$ и $\lambda_n(\xi)$.

Теорема 2. Предположим, что:

1) выполняются условия леммы;

2) $\varphi_k(x, \theta) \in L_2(F)$, $k = \overline{1, h}$;

3) $V(\theta_0) = \|b_{ij}\|$ положительно определена,

$$b_{ij} = M_\theta\{\varphi_i(\xi, \theta)\,\varphi_j(\xi, \theta)\}, \quad i, j = \overline{1, h}.$$

Тогда величины $\sqrt{n}\,[\theta_n(\xi) - \theta_0]$ и $(\sqrt{n})^{-1}\lambda_n(\xi)$ асимптотически совместно нормально распределены с математическим ожиданием $0 \in R^{h+q}$ и ковариационно-дисперсионной матрицей

$$\begin{Vmatrix} AV(\theta_0)A & AV(\theta_0)B \\ B'V(\theta_0)A & B'V(\theta_0)B \end{Vmatrix} = G(\Lambda, \Lambda').$$

Доказательство. Разлагая элементы матрицы $\Phi(\theta_n(\xi))$ в ряд Тейлора по степеням $\theta_n(\xi) - \theta_0$, получаем

$$\Phi(\theta_n(\xi))\,\frac{1}{n}\lambda_n(\xi) = [\Phi(\theta_0) + D_2(\xi)]\,\frac{1}{n}\lambda_n(\xi), \tag{9}$$

где $h \times 1$-матрица

$$D_2(\xi) = \|d_{ij}\|,$$

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{h} f''_{j,\theta_k\theta_i}(\theta^{(j,i)})(\theta_{k,n}(\xi) - \theta_k^0),$$

$$i = \overline{1, h}, \ j = \overline{1, q}, \ \|\theta^{(j,i)} - \theta_0\| < \|\theta_n(\xi)) - \theta_0\|, \ \theta^{(j,i)} \in R^h_\delta.$$

Очевидно, что можно написать

$$\frac{1}{n}\eta_1(\xi, \theta_n(\xi)) = E(\xi, \theta_n(\xi))\,[\theta_n(\xi) - \theta_0],$$

$$L_1(\theta_n(\xi)) = D_3(\xi)\,[\theta_n(\xi) - \theta_0],$$

где элементы матрицы $E(\xi, \theta_n(\xi))$ и $D_3(\xi)$ приближаются к нулю, когда $\delta \to 0$.

Обозначим

$$D_1(\xi) = -\delta V_1(\xi, \theta_0) - E(\xi, \theta_n(\xi)),$$

тогда (2) окончательно можно написать в таком виде:

$$H(\theta_0)[\theta_n(\xi) - \theta_0] + D_1(\xi)[\theta_n(\xi) - \theta_0] - \frac{1}{n}[\Phi(\theta_0) + D_2(\xi)]\lambda_n(\xi) =$$

$$= \frac{1}{n} A(\xi, \theta_0),$$

$$\Phi'(\theta_0)[\theta_n(\xi) - \theta_0] = -D_3(\xi)[\theta_n(\xi) - \theta_0]. \tag{10}$$

Существует матрица R_1 такая, что

$$R_1 \begin{Vmatrix} H(\theta_0) & -\Phi(\theta_0) \\ -\Phi'(\theta_0) & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} I_h & 0 \\ 0 & I_q \end{Vmatrix},$$

где I_h и I_q есть соответственно единичные матрицы $h \times h$ и $q \times q$. Для элементов матрицы

$$R_1 = \begin{Vmatrix} A & B \\ B' & D \end{Vmatrix}$$

получим

$$A = H^{-1}(\theta_0) - P^{-1}(\theta_0) Q^{-1}(\theta_0) P(\theta_0),$$

$$B = -H^{-1}(\theta_0)\Phi(\theta_0) Q^{-1}(\theta_0),$$

$$D = -Q^{-1}(\theta_0).$$

По неравенству Сильвестера [3] получается, что ранг $A = h - q$. Следовательно,

$$R_1 = \begin{Vmatrix} H(\theta_0) & -\Phi(\theta_0) \\ -\Phi'(\theta_0) & 0 \end{Vmatrix}^{-1}.$$

Составим матрицу из коэффициентов $\theta_n(\xi) - \theta_0$ и $\lambda_n(\xi)$ системы уравнений (10). Если взять $\delta > 0$ достаточно малым, то матрица системы (10) также будет неособенная, т. е. будет существовать обратная матрица

$$R_2(\xi) = \begin{Vmatrix} A_1(\xi) & B_1(\xi) \\ B_2(\xi) & D(\xi) \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} H(\theta_0) + D_1(\xi) & -\Phi(\theta_0) - D_2(\xi) \\ -\Phi'(\theta_0) - D_3(\xi) & 0 \end{Vmatrix}^{-1}.$$

При $n \to \infty$ и $\xi \in \mathfrak{X}_n$ получим, что $\delta \to 0$. Следовательно,

$$D_i(\xi) \to 0,\ i = 1, 2, 3; \quad A_1(\xi) \to A,\ B_1(\xi) \to B,$$

$$B_2(\xi) \to B' \text{ и } D(\xi) \to D$$

(сходимость по вероятности).

Из (10) получим (решая относительно $\sqrt{n}[\theta_n(\xi) - \theta_0]$ и $(\sqrt{n})^{-1}\lambda_n(\xi)$)

$$\begin{Vmatrix} \sqrt{n}[\theta_n(\xi) - \theta_0] \\ (\sqrt{n})^{-1}\lambda_n(\xi) \end{Vmatrix} = R_2(\xi) \begin{Vmatrix} (\sqrt{n})^{-1} A(\xi, \theta_0) \\ 0 \end{Vmatrix}. \tag{11}$$

Теперь рассмотрим, как распределена h-мерная случайная величина $\eta = (\sqrt{n})^{-1}A(\xi, \theta_0)$ при $n \to \infty$. Очевидно, что

$$M_\theta[(\sqrt{n})^{-1}A_k(\xi, \theta_0)] = 0,$$

$$D^2\eta = M\varphi_k^2(\xi, \theta_0), \quad k = \overline{1, h}.$$

Следовательно, каждая компонента данного вектора асимптотически нормальна со средним значением 0 и дисперсией $\int \varphi_k^2(x, \theta)\, dF(x, \theta)$. Следовательно, h-мерная случайная величина $\eta \in R^h$ асимптотически нормально распределена с нулевым средним значением и ковариационно-дисперсионной матрицей $V(\theta_0)$.

Очевидно, что $h+q$-мерная случайная величина

$$\zeta = [(\sqrt{n})^{-1}A(\xi, \theta_0), 0] \in R^{h+q}$$

асимптотически нормально распределена со средним значением $0 \in R^{q+h}$ и ковариационно-дисперсионной матрицей [1]

$$\begin{Vmatrix} V(\theta_0) & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Из известных теорем [1] вытекает, что вектор

$$\Lambda = \{\sqrt{n}[\theta_n(\xi) - \theta_0], (\sqrt{n})^{-1}\lambda_n(\xi)\} \in R^{h+q}$$

совместно асимптотически нормально распределен со средним $M_\theta\Lambda = 0$ и ковариационно-дисперсионной матрицей $G(\Lambda, \Lambda')$. Теорема доказана.

Замечание 4. Пусть $\frac{\partial F(x, \theta)}{\partial x} = p(x, \theta)$ существует. Тогда если

$$\varphi_k(x, \theta) = \frac{\partial \ln p(x, \theta)}{\partial \theta k}, \quad k = \overline{1, h},$$

то $V(\theta_0) = H(\theta_0)$ и, следовательно, $A = AV(\theta_0)A - A\Phi(\theta_0)B'$ симметрична и $AV(\theta_0)A = A$. Таким же образом получаем, что $AV(\theta_0)B = 0$ и $B'V(\theta_0)B = -D$. Следовательно, Λ асимптотически нормально распределена со средним $0 \in R^{h+q}$ и ковариационно-дисперсионной матрицей

$$\begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & Д \end{Vmatrix}.$$

§ 5. Вместо функций $\varphi_k(x, \theta)$, $k = \overline{1, h}$, рассмотрим функции $\psi_k(x, \theta)$, $k = 1, n$.

$$2'. \int \cdots \int \psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_s, \theta) \prod_{i=1}^{s} dF(x_i, \theta) = 0, \quad \bar{x} \in R^s.$$

Будем искать функционально связанные неизвестные параметры из систем уравнений

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_s = 1}^{n, \ldots, n} \psi_k(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots \xi_{i_s}, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_h) +$$

$$+\sum_{j=1}^{q}\lambda_j f'_{j,\theta_k}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_h) = 0, \qquad (1')$$

$$f_i(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_h) = 0, \; k = \overline{1, h}, \; i = \overline{1, q}, \; q < h.$$

В матричных обозначениях (1′) можно написать

$$T(\xi, \theta) + \Phi(\theta)\lambda = 0,$$

$$f(\theta) = 0, \qquad (2')$$

где $T(x, \theta)$ — матрица $h \times 1$,

$$T(x, \theta) = T_1(x, \theta), \; T_2(x, \theta), \; \ldots, \; T_h(x, \theta)) \in R^h,$$

$$T_k(\xi, \theta) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_s = 1}^{n, \ldots, n} \psi_k(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots \xi_{i_s}, \theta), \; k = \overline{1, h}.$$

3′. Если функции $\psi_k(x, \theta)$, $k = \overline{1, h}$, для всякого $\theta \in R^h_\alpha$ и почти для всех $\bar{x} \in R^s$ имеют непрерывные частные производные второго порядка, то аналогично системе уравнений (3) можно написать

$$T(\xi, \theta_0) + N(\xi, \theta_0)(\theta - \theta_0) + \zeta_1(\xi, \theta) + \Phi(\theta)\lambda = 0,$$

$$\Phi'(\theta_0)(\theta - \theta_0) + L_1(\theta) = 0, \qquad (3')$$

где матрица

$$N(\xi, \theta_0) = \| T'_{i,\theta_j}(\xi, \theta_0) \|,$$

$$T_{i,\theta_j}(\xi, \theta_0) = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_s=1}^{n} \frac{\partial\psi_i(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \cdots \xi_{i_s}, \theta_0)}{\partial\theta_j}, \; i, j = \overline{1, h},$$

k-я компонента вектора $\zeta_1(\xi, \theta) \in R^h$ будет

$$\frac{1}{2}(\theta - \theta_0)' E_k (\theta - \theta_0) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{h} T''_{k,\theta_i\theta_j}(\xi, \gamma_0^{(k)})(\theta_i - \theta_i^0)(\theta_j - \theta_j^0),$$

$$T''_{k,\theta_i\theta_j}(\xi, \gamma_0^{(k)}) = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_s=1}^{n} \frac{\partial^2\psi_k(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_s}, \gamma_0^{(k)})}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j},$$

$$k, i, j = \overline{1, h}, \qquad \|\gamma_0^{(k)} - \theta_0\| < \|\theta - \theta_0\|, \qquad \gamma_0^{(k)} \in R^h.$$

Определение. $g(\bar{x}) \in L_p^{(k)}(F)$ означает, что

$$\int \cdots \int |g(x_1, x_2, \ldots, x_k)|^p \prod_{i=1}^{k} dF(x_i, \theta) < \infty, \; p = 1, 2.$$

Лемма 1. Предположим, что функции $\psi_k(x, \theta)$ и $f_l(\theta)$, $k = \overline{1, h}$, $l = \overline{1, q}$ удовлетворяют условиям 1, 2′—3′ и условиям:

4′. Функции $\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_s, \theta)$, $k = \overline{1, h}$ симметричны относительно аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_s$; для любого $\theta \in R^h_\alpha$ и почти для всех $\overline{x} \in R^s$

$$|\psi'_{k,\theta_l}(\overline{x}, \theta)| < H_1(\overline{x}), \quad |\psi''_{k,\theta_l\theta_j}(\overline{x}, \theta)| < H_2(\overline{x}),$$

$$H_\gamma(\overline{x}) \in L_2^{(s)}(F), \ |f''_{l,\theta_i\theta_j}(\theta)| < 2k_0 < \infty,$$

$$\int \cdots \int H_2^2(y_1, y_2, \ldots y_s) \prod_{i=1}^{s} dF(y_i, \theta) \leqslant K_1 < \infty,$$

причем K_1 не зависит от θ, $k, i, j = \overline{1, h}$; $l = \overline{1, q}$, $\gamma = 1, 2$.

5'. Ранг $\Phi(\theta) = q$.

6'.— $N(\theta_0) = \|c_{ij}\|$, матрица $N(\theta_0)$ положительно определена,

$$c_{ij} = M_\theta \{\psi'_{i,\theta_j}(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_s}, \theta)\}; \ i, j = \overline{1, h}.$$

Тогда можно доказать, что для достаточно малых $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ можно найти такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon, \delta)$, что при $n > n_0$ можно указать такое множество $\mathfrak{X}_n \subset R^n$ и непрерывную ограниченную функцию $V(x, \theta)$, определенную при $\xi \in \mathfrak{X}_n$, $\theta \in R^h_\delta$ и принимающую значения из R^h, что:

а) $P_\theta\{\mathfrak{X}_n\} > 1 - \varepsilon$ для всех $\theta \in R^h_\delta$;

б) система уравнений (1') имеет решение $\theta_n(\xi)$, $\lambda_n(\xi)$ такое, что $\xi \in \mathfrak{X}_n$, $\theta_n(\xi) \in R^h_\delta$ тогда и только тогда, когда

$$N(\theta_0)(\theta - \theta_0) - \delta^2 V(x, \theta) = 0 \qquad (4')$$

имеет решение $\theta_n^{(1)}(\xi) \in R^h_\delta$, причем $\theta_n(\xi) = \theta_n^{(1)}(\xi)$.

Доказательство этих результатов почти аналогично доказательству основной леммы. Здесь и в дальнейшем часто применяется методика, изложенная в работах [6, 7].

Теорема 1'. В условиях леммы 1 для достаточно малого $\delta > 0$ и $\xi \in \mathfrak{X}_n$ система уравнений (4') имеет решение $\theta_n(\xi)$, $\lambda_n(\xi)$ такое, что при $n \to \infty$ с вероятностью 1 $\theta_n(\xi) \in R^h_\delta$ и

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta\{\|\theta_n(\xi) - \theta_0\| > \gamma\} \, 0$$

для всякого малого $\gamma > 0$.

Замечание 5. Если для всякого $\theta \in R^h_\alpha$ для $V(x, \theta)$ имеет место условие Липшица при $\xi \in \mathfrak{X}_n$, то решение уравнения (4') для достаточно малого $\delta > 0$ будет единственным.

Теорема 2'. Пусть:

1) выполняются условия леммы 1;

2) $\psi_k(x_1, x_2, \ldots x_s, \theta) \in L_2^{(s)}(F)$, $k = \overline{1, h}$ для всякого $\theta \in R^h_\delta$;

3) матрица $W(\theta_0) = \|w_{ij}\|$ положительно определена,

$$w_{ij} = \int \cdots \int \psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_s, \theta)\, \psi_j(x_1, x_2, \ldots, x_s, \theta) \prod_{i=1}^{s} dF(x_i, \theta),$$

$$i, j = \overline{1, h}.$$

Тогда случайный вектор $\{\sqrt{n}\,[\theta_n(\xi)-\theta_0],\ (\sqrt{n})^{-1}\lambda_n(\xi)\}\in R^{h+q}$ асимптотически совместно нормально распределен с математическим ожиданием $0\in R^{h+q}$ и ковариационной дисперсионной матрицей

$$\begin{Vmatrix} A^{(1)}W(\theta_0)A^{(1)} & A^{(1)}W(\theta_0)B^{(1)} \\ B^{(1)\prime}W(\theta_0)A^{(1)} & B^{(1)\prime}W(\theta_0)B^{(1)} \end{Vmatrix},$$

где

$$A^{(1)}=N^{-1}(\theta_0)\,[I_h-\Phi(\Phi'N^{-1}(\theta_0)\Phi)^{-1}\Phi'N^{-1}(\theta_0)],$$
$$B^{(1)}=N^{-1}(\theta_0)\,\Phi(\Phi'N^{-1}(\theta_0)\Phi)^{-1},$$
$$D^{(1)}=-(\Phi'N^{-1}(\theta_0)\Phi)^{-1},$$

причем $N(\theta_0)$ есть предел случайной матрицы $-n^{-s}N(\xi,\theta_0)$, сходящейся по вероятности при $n\to\infty$.

В качестве примера рассмотрим семейство устойчивых законов с характеристической функцией

$$f(t,\alpha,\beta,\gamma,c)=\exp\{i\gamma t-c|t|^{\alpha}(1+i\beta w(t,\alpha))\},$$

где

$$w(t,\alpha)=\begin{cases}\operatorname{sign} t\,\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}\alpha, & \alpha\neq 1\\[2mm] \dfrac{2}{\pi}\operatorname{sign} t\ln|t|, & \alpha=1\end{cases},$$

у которых параметры связаны функциональным соотношением

$$\Phi(\alpha,\beta,\gamma,c)=0.$$

Тогда, взяв функции

$$\varphi_1(x_1,x_2,\alpha,c)=\cos t(x_1-x_2)-e^{-2ct^{\alpha}},$$
$$\varphi_2(x_1,x_2,\alpha,c)=\cos t_0(x_1-x_2)-e^{-2ct_0^{\alpha}},$$
$$\varphi_3(x,\alpha,\beta,\gamma,c)=\cos x-e^{-c}\cos(\gamma-c\beta w(1,\alpha)),$$
$$\varphi_4(x,\alpha,\beta,\gamma,c)=\cos tx-e^{-ct^{\alpha}}\cos(\gamma t-c\beta t^{\alpha}w(t,\alpha)),$$

получим систему уравнений, в которой наблюдения и параметры разделены и система не зависит от количества наблюдений

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\cos t(\xi_i-\xi_j)-e^{-2ct^{\alpha}}+\gamma\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}=0,$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\cos t_0(\xi_i-\xi_j)-e^{-2ct_0^{\alpha}}+\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}=0,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\xi_i-e^{-c}\cos(\gamma-c\beta w(1,\alpha))+\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}=0,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos t\xi_i-e^{-ct^{\alpha}}\cos(\gamma t-c\beta t^{\alpha}w(t,\alpha))+\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial c}=0,$$

$$\Phi(\alpha,\beta,\gamma,c)=0.$$

Рассмотрим частный случай, когда параметры связаны соотношением $\Phi(\alpha, c) = c \cdot 2^{\alpha} - 1 = 0$. Возьмем функции

$$\varphi_1(x_1, x_2, c) = \cos(x_1 - x_2) - e^{-2c},$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, \alpha, c) = \cos 2(x_1 - x_2) - e^{-2c \cdot 2^{\alpha}}.$$

Очевидно, что получим систему уравнений

$$\bar{x}_1 - e^{-2c} + \lambda c \cdot 2^{\alpha} \ln 2 = 0,$$

$$\bar{x}_2 - e^{-2} + \lambda \cdot 2^{\alpha} = 0,$$

$$c \cdot 2^{\alpha} - 1 = 0,$$

где

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \cos(\xi_i - \xi_j),$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \cos 2(\xi_i - \xi_j).$$

Оценка для c может быть найдена из уравнения

$$\frac{\bar{x}_1}{\ln 2} - \frac{e^{-2c}}{\ln 2} = c\bar{x}_2 - ce^{-2},$$

оценки для α и λ получаем проще.

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. А. В. Скороходу за постоянное внимание и помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ. М., «Мир», 1963.
2. Aitehison, Silvey S. D. Maximum-likelihood estimation of parameteres subject.— Ann. Math. Statistics, 29, 3, 1958.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1966.
4. Крамер Г. Математические методы статистики. М., ИЛ, 1948.
5. Лефшец С. Алгебраическая топология. М., ИЛ, 1949.
6. Ибрамхалилов И. Ш. Некоторые методы нахождения оценок параметров.— ДАН Аз.ССР, № 3, 1964, 9—15.
7. Ибрамхалилов И. Ш. Об оценке параметров распределения.— Изв. АН Аз.ССР, № 2, 1964, 31—41.
8. Ибрамхалилов И. Ш. Оценки параметров некоторых семейств распределений.— Тезисы докладов первой республиканской математической конференции молодых исследователей. Изд. ИК АН УССР, К., 1965.

I. Sh. Ibramkhalilov

ON ESTIMATIONS OF FUNCTIONALLY CONNECTED PARAMETERS

Summary

Let ξ_i be a random sample of size n with distribution function F (x, θ), $\theta \in R^s$ and parameters $\theta = \{\theta_1, \theta_2, ..., \theta_s\}$ be connected with following equations f_i (θ_1

$\theta_2, \ldots, \theta_s) = 0$ $i = 1, 2, \ldots, q$, $q < s$. Let the function $\varphi_k(x, \theta)$ for all θ satisfy equality

$$M_\theta \{\psi_k(\xi, \theta)\} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, s.$$

Then under some general conditions the system of equations

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_k(\xi_i, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i f'_{i,\theta_k}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = 0,$$

$$f_i(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, s; \quad i = 1, 2, \ldots, q$$

has the solutions $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s$ that are consistente and asymptotically normal estimations of parameters $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$.

Поступила в редколлегию 5.XI.1970.