А. В. ИВАНОВ, студ.
Киевский университет

СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ ОЦЕНОК НЕЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

В работе [1] изучалась регрессия вида

$$x_k = g(k, \alpha) + \varepsilon_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где функция g не является линейной относительно координат оцениваемого многомерного параметра α; ε_k — независимые, одинаково распределенные случайные величины со средним нуль и дисперсией σ^2.

В этой ситуации при выполнении ряда предположений была получена состоятельность оценок наименьших квадратов.

Предлагаемая заметка опирается на работу [1] и содержит обобщение сформулированных там результатов для одного класса случайных процессов.

I. Рассмотрим следующую схему регрессии:

$$x(t) = g(t, \alpha) + \varepsilon(t), \quad t \in [0, T]. \tag{1}$$

Предположим, что $\alpha \in \Omega \subset R^p$, g — непрерывная на $[0, \infty] \times \Omega$ функция. Относительно $\varepsilon(t)$ сделаем следующие предположения:

А) Процесс $\varepsilon(t)$ — вещественный строго стационарный (все конечномерные распределения инвариантны относительно сдвигов времени t) с нулевым средним и непрерывной корреляционной функцией $r(t)$;

Б) $$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} r^2(t)\,dt \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0;$$

В) $\varepsilon(t)$ — эргодический процесс.

Под оценками наименьших квадратов понимается случайная величина $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_p)$, минимизирующая выражение

$$L_T(\alpha) = \int_0^T [x(t) - g(t, \alpha)]^2\,dt.$$

Введем обозначения: $q(t, \alpha) = g(t, \alpha) - g(t, \alpha^0)$ (α^0 — истинное значение параметра);

$$Q_T(\alpha) = \int_0^T q^2(t, \alpha)\, dt.$$

Если $Q_T(\alpha) > 0$, положим $\lambda_T(t, \alpha) = \frac{q(t, \alpha)}{Q_T(\alpha)}$, $u_T(\alpha) = \int_0^T \lambda_T(t, \alpha)\, \varepsilon(t)\, dt$.

Если $Q_T(\alpha) = 0$, будем считать, что $u_T(\alpha) = 0$.

Лемма. Пусть для любого замкнутого множества $\omega \subset \Omega$, не содержащего α^0:

$$\inf_{\alpha \in \omega} Q_T(\alpha) > 0 \quad \text{для достаточно больших } T; \tag{2}$$

$$P\left\{\sup_{\alpha \in \omega} u_T(\alpha) \geqslant \frac{1}{2}\right\} \xrightarrow[T \to \infty]{} 0. \tag{3}$$

Тогда $\hat{\alpha}$ является состоятельной оценкой α^0.

Действительно,

$$\int_0^T \varepsilon^2(t)\, dt = \int_0^T [x(t) - g(t, \alpha^0)]^2\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^T [x(t) - g(t, \hat{\alpha})]^2\, dt =$$

$$= \int_0^T [x(t) - g(t, \alpha^0) + g(t, \alpha^0) - g(t, \hat{\alpha})]^2\, dt =$$

$$= \int_0^T \varepsilon^2(t)\, dt - 2\int_0^T \varepsilon(t)\, q(t, \hat{\alpha})\, dt + Q_T(\hat{\alpha}) =$$

$$= \int_0^T \varepsilon^2(t)\, dt + Q_T(\hat{\alpha})[1 - 2u_T(\hat{\alpha})].$$

Следовательно,

$$Q_T(\hat{\alpha})\,[2u_T(\hat{\alpha}) - 1] \geqslant 0.$$

Пусть $\omega \subset \Omega$ — замкнутое множество, не содержащее α^0. Предположим, что $\hat{\alpha} \subset \omega$. Тогда или $\inf_{\alpha \in \omega} Q_T(\alpha) = 0$, или $\sup_{\alpha \in \omega} u_T(\alpha) \geqslant \frac{1}{2}$. Первая возможность исключается условием (2). Поэтому

$$P\{\hat{\alpha} \in \omega\} \leqslant P\left\{\sup_{\alpha \in \omega} u_T(\alpha) \geqslant \frac{1}{2}\right\}$$

и оценка состоятельна. Лемма доказана.

II. Для всех α, $\beta \in \Omega$ определим функцию

$$\varphi_T(\alpha, \beta) = \frac{1}{T} \int_0^T [g(t, \alpha) - g(t, \beta)]^2 \, dt.$$

Заметим, что $\varphi_T(\alpha, \alpha^0) = \frac{1}{T} Q_T(\alpha)$.

Сделаем следующие предположения:

а) существует $\delta > 0$, компактное множество $K \subset \Omega$ такое, что $\alpha^0 \in K$ и следующее неравенство имеет место для $\alpha \notin K$ и всех $T > T_0$:

$$\frac{1}{T} Q_T(\alpha) \geqslant 4r(0) + \delta;$$

б) $\varphi_T(\alpha, \beta) \underset{T\to\infty}{\to} \varphi(\alpha, \beta)$ на $K \times K$ равномерно, $\varphi(\alpha, \beta)$ — непрерывная функция; функция от α, определенная как $\varphi(\alpha, \alpha^0)$, равна нулю только для $\alpha = \alpha^\circ$.

Теорема 1. Если выполнены предположения а) и б), то $\hat{\alpha}$ — состоятельная оценка α^0.

Доказательство. Данное замкнутое множество $\omega \subset \Omega$, не содержащее α^0, разобьем на подмножества $\omega^r (r = 1, 2, \ldots, s + 1)$ таким образом, чтобы условия леммы выполнялись для каждого из них. Так как

$$P\left\{\sup_{\alpha\in\omega} u_T(\alpha) \geqslant \frac{1}{2}\right\} \leqslant \sum_{r=1}^{s+1} P\left\{\sup_{\alpha\in\omega^r} u_T(\alpha) \geqslant \frac{1}{2}\right\},$$

то условие (3) леммы будет выполнено для всего ω.

Положим $\omega^{s+1} = \omega \cap \Omega \setminus K$. Предположение а) влечет выполнение условия (2) леммы для ω^{s+1}. Можно записать

$$|u_T(\alpha)|^2 \leqslant \int_0^T \lambda_T^2(t, \alpha) \, dt \int_0^T \varepsilon^2(t) \, dt =$$

$$= \frac{\frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon^2(t) \, dt}{\frac{1}{T} Q_T(\alpha)}.$$

Благодаря ограничениям на $\varepsilon(t)$ процесс $\varepsilon^2(t)$ также является эргодическим и для него выполняются условия эргодической теоремы Биркгофа — Хинчина. Следовательно,

$$\frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon^2(t) \, dt \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} r(0)$$

с вероятностью 1. Но для $T > T_0$

$$\frac{1}{T} Q_T(\alpha) \geqslant 4r(0) + \delta.$$

Таким образом,

$$P\left\{\sup_{\alpha\in\omega^{s+1}} |u_T(\alpha)|^2 < \frac{r(0)}{4r(0)+\delta}\right\} \xrightarrow[T\to\infty]{} 1;$$

а так как

$$P\left\{\sup_{\alpha\in\omega^{s+1}} |u_T(\alpha)|^2 < \frac{1}{4}\right\} \geqslant P\left\{\sup_{\alpha\omega\in^{s+1}} |u_T(\alpha)|^2 \leqslant \frac{r(0)}{4r(0)+\delta}\right\},$$

то

$$P\left\{\sup_{\alpha\in\omega^{s+1}} |u_T(\alpha)| \geqslant \frac{1}{2}\right\} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0,$$

и условие (3) леммы для ω^{s+1} выполнено.

Осталось разбить компактное множество $\omega \cap K$, не содержащее α^0, на подмножества, для каждого из которых выполняются условия леммы.

Предположение б) влечет существование двух положительных чисел d^2 и D^2 таких, что

$$d^2 \leqslant \varphi(\alpha, \alpha^0) \leqslant D^2 \quad \text{для всех } \alpha \in \omega \cap K. \tag{4}$$

Более того, из непрерывности $\varphi(\alpha, \beta)$ и $\frac{1}{\varphi(\alpha, \alpha^0)}$, рассматриваемых как функции от α на компакте $\omega \cap K$, следует, что можно найти конечное разбиение $\omega \cap K$ на множества ω^r и вектор $\alpha^r \in \omega^r$ такие, что

$$\varphi(\alpha, \alpha^r) \leqslant \frac{d^4}{100r(0)} \text{ для всех } \alpha \in \omega^r \text{ и всех } r; \tag{5}$$

$$\left|\frac{1}{\varphi(\alpha, \alpha^0)} - \frac{1}{\varphi(\alpha^r, \alpha^0)}\right| \leqslant \frac{1}{10\sqrt{r(0)}\,D} \text{ для всех } \alpha \in \omega^r \text{ и всех } r. \tag{6}$$

Из (4) следует выполнение условия (2) леммы для множества $\omega \cap K$. Проверим выполнение (3). Рассмотрим

$$\sup_{\alpha\in\omega^r} u_T(\alpha) = \sup_{\alpha\in\omega^r} [u_T(\alpha) - u_T(\alpha^r)] + u_T(\alpha^r).$$

Покажем, что $u_T(\alpha^r) \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$ по вероятности. Действительно,

$$Mu_T^2(\alpha^r) = M\left[\int_0^T \lambda_T(t, \alpha^r)\,\varepsilon(t)\,dt\right|^2 =$$

$$= \int_0^T\int_0^T \lambda_T(t, \alpha^r)\,\lambda_T(s, \alpha^r)\,r(t-s)\,dtds \leqslant$$

$$\leqslant \left[T^2 \int_0^T\int_0^T \lambda_T^2(t, \alpha^r)\,\lambda_T^2(s, \alpha^r)\,dtds\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T r^2(t-s)\,dtds\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Но

$$\left[T^2 \int_0^T\int_0^T \lambda_T^2(t, \alpha^r)\,\lambda_T^2(s, \alpha^r)\,dtds\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{T}{Q_T(\alpha^r)} = \frac{1}{\varphi_T(\alpha^r, \alpha^0)},$$

и

$$\frac{1}{\varphi_T(\alpha^r, \alpha^0)} \xrightarrow[T\to\infty]{} \frac{1}{\varphi(\alpha^r, \alpha^0)} \neq \infty.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T r^2(t-s)\,dt\,ds = \frac{2}{T^2}\int_0^T t\left[\frac{1}{t}\int_0^t r^2(s)\,ds\right]dt.$$

Привлекая условие Б), получаем, что

$$\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T r^2(t-s)\,dt\,ds \xrightarrow[T\to\infty]{} 0.$$

Замечание. Предположим, что $\varepsilon(t)$ — гауссовский процесс. Покажем сходимость $u_T(\alpha^r)$ к нулю по вероятности иным образом. Можно написать

$$\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T r^2(t-s)\,dt\,ds = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{T^2}M\int_0^T\int_0^T \varepsilon^2(t)\,\varepsilon^2(s)\,dt\,ds - r^2(0)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}M\,\xi_T^2,$$

где

$$\xi_T = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon^2(t)\,dt - r(0).$$

Как было выяснено, $\xi_T \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$ с вероятностью 1 и, следовательно, $\xi_T^2 \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$ с вероятностью 1. Случайная величина ξ_T, благодаря тому, что процесс $\varepsilon(t)$ — гауссовский, имеет ограниченный при $T\to\infty$ момент 4-го порядка. Поэтому

$$M\,\xi_T^2 \xrightarrow[T\to\infty]{} 0\,^{*)}.$$

Условие леммы (3) будет выполнено, если

$$P\left\{\sup_{\alpha\in\omega r}\,[u_T(\alpha) - u_T(\alpha^r)] \geqslant \frac{1}{3}\right\} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0. \tag{7}$$

Запишем

$$[u_T(\alpha) - u_T(\alpha^r)]^2 \geqslant \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon^2(t)\,dt\; T\int_0^T [\lambda_T(t,\alpha) - \lambda_T(t,\alpha^r)]^2\,dt.$$

---

*) Это вытекает из следующего утверждения [2]. Пусть $\eta_T \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$ по вероятности и для некоторого $p > 1$ $M\,|\eta_T|^p \leqslant C < \infty$. Тогда и

$$M\eta_T \xrightarrow[T\to\infty]{} 0.$$

У нас

$$\eta_T = \xi_T^2, \quad p = 2.$$

Очевидно,

$$P\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon^2(t)\,dt > \frac{16}{9}\,r(0)\right\}\xrightarrow[T\to\infty]{} 0.$$

Следовательно, вероятность (7) также стремится к нулю, если (для достаточно больших T) выполняется

$$\sup_{\alpha\in\omega^r}\left\{T\int_0^T[\lambda_T(t,\alpha)-\lambda_T(t,\alpha^r)]^2\,dt\right\}\leqslant\frac{1}{16r(0)}. \tag{8}$$

Можно написать

$$\lambda_T(t,\alpha)-\lambda_T(t,\alpha^r)=\frac{q(t,\alpha)-q(t,\alpha^r)}{Q_T(\alpha^r)}+q(t,\alpha)\left[\frac{1}{Q_T(\alpha)}-\frac{1}{Q_T(\alpha^r)}\right],$$

$$\left[\int_0^T[\lambda_T(t,\alpha)-\lambda_T(t,\alpha^r)]^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{Q_T(\alpha^r)}\left[\int_0^T[q(t,\alpha)-\right.$$

$$\left.-q(t,\alpha^r)]^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\int_0^T q^2(t,\alpha)\,dt\right]^{\frac{1}{2}}\left|\frac{1}{Q_T(\alpha)}-\frac{1}{Q_T(\alpha)^r}\right|=$$

$$=\frac{1}{Q_T(\alpha^r)}\,[T\varphi_T(\alpha,\alpha^r)]^{\frac{1}{2}}+Q_T^{\frac{1}{2}}(\alpha)\left|\frac{1}{Q_T(\alpha)}-\frac{1}{Q_T(\alpha^r)}\right|.$$

Для доказательства (8) нужно установить следующие два неравенства:

$$[\varphi_T(\alpha,\alpha^r)]^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{8\sqrt{r(0)}}\,\frac{1}{T}\,Q_T(\alpha^r), \tag{9}$$

$$\left|\frac{T}{Q_T(\alpha)}-\frac{T}{Q_T(\alpha^r)}\right|\leqslant\frac{1}{8\sqrt{r(0)}}\left[\frac{1}{T}\,Q_T(\alpha)\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{10}$$

для всех $\alpha\in\omega^r$ и всех больших T.

Докажем неравенство (9), переписав его в виде

$$\varphi_T(\alpha,\alpha^r)\leqslant\frac{1}{64\,r(0)}\,\varphi_T^2(\alpha^r,\alpha^0).$$

Так как стремление φ_T к φ равномерно на $K\times K$, то для всех $\alpha\in\omega^r$ и достаточно больших T, привлекая (5), получаем

$$\varphi_T(\alpha,\alpha^r)\leqslant\frac{d^4}{80\,r(0)}.$$

Но $\varphi^2(\alpha^r,\alpha^0)\geqslant d^4$ по (4).

Следовательно,

$$\varphi_T(\alpha,\alpha^r)\leqslant\frac{1}{80\,r(0)}\,\varphi^2(\alpha^r,\alpha^0)\leqslant\frac{1}{64\,r(0)}\,\varphi_T^2(\alpha^r,\alpha^0).$$

Неравенство (9) доказано.

Неравенство (10) можно представить в таком виде:

$$\left|\frac{1}{\varphi_T(\alpha,\alpha^0)}-\frac{1}{\varphi_T(\alpha^r,\alpha^0)}\right|\leqslant\frac{1}{8\sqrt{r(0)}}\,[\varphi_T(\alpha,\alpha^0)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Равномерная сходимость φ_T^{-1} к φ^{-1} в ω^r вместе с (4) и (6) влечет для достаточно больших T и всех $\alpha \in \omega^r$ выполнение неравенств

$$\left|\frac{1}{\varphi_T(\alpha, \alpha^0)} - \frac{1}{\varphi_T(\alpha^r, \alpha^0)}\right| \leqslant \frac{1}{9\sqrt{r(0)}\,D} \leqslant \frac{[\varphi(\alpha, \alpha^0)]^{-\frac{1}{2}}}{9\sqrt{r(0)}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{8\sqrt{r(0)}}[\varphi_T(\alpha, \alpha^0)]^{-\frac{1}{2}},$$

что и требовалось. Теорема 1 доказана.

III. Рассмотрим некоторые достаточные условия, при которых выполняются а) и б).

1. Функция $g(t, \alpha) = g(z(t), \alpha)$, где z — непрерывное отображение полуоси $[0, \infty)$ в компактное множество $Z \subset R^m$. Для любого борелевского множества $V \subset R^m$ пусть

$$\mu_T(V) = \frac{1}{T} m\{[0, T] \cap \{t : t \in z^{-1}(V)\}\},$$

m — мера Лебега на $[0, \infty)$.

2. Семейство мер $\{\mu_T\}_{T \in (0, \infty)}$ слабо сходится к некоторой мере μ, т. е. для всякой действительной ограниченной непрерывной функции $f(z)$

$$\int f d\mu_T \xrightarrow[T\to\infty]{} \int f d\mu.$$

3. Функция $z(t)$ разделяет Ω в следующем смысле: для любых $\alpha \neq \beta$, $(\alpha, \beta \in \Omega)$ множество всех значений функции $z(t)$ таких, что $g(z, \alpha) \neq g(z, \beta)$ имеет положительную меру μ.

4. Функция $g(z, \alpha)$ непрерывна на $Z \times \Omega$.

5. Существует T_0 такое, что для всех $T > T_0$ и любого положительного числа G множество

$$\left\{\alpha : \frac{1}{T}\int_0^T g^2(z(t), \alpha)\, dt \leqslant G\right\}$$

ограничено, причем равномерно по T.

Теорема 2. При выполнении условий 1—5 $\hat{\alpha}$ является состоятельной оценкой α^0.

Доказательство. Покажем, как из этих условий следует а). Допустим, что а) не имеет места. Это означает, что существует неограниченная последовательность векторов $\{\alpha^n\}_{n=1}^{\infty}$ и некоторая последовательность $T_n \to \infty$, для которых

$$\frac{1}{T_n} Q_{T_n}(\alpha^n) < 4r(0) + \delta.$$

Применяя неравенство Буняковского к величине

$$g(z(t), \alpha^n) = [g(z(t), \alpha^n) - g(z(t), \alpha^0)] + g(z(t), \alpha^0),$$

получаем

$$\left[\frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} g^2(z(t), \alpha^n)\, dt\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\frac{1}{T_n} Q_{T_n}(\alpha^n)\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} g^2(z(t), \alpha^0)\, dt\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Но это противоречит условию 5, ибо $\{\alpha^n\}_{n=1}^{\infty}$ — неограниченная последовательность, в то время как правая часть ограничена числом G, не зависящим от T. Действительно,

$$\left[\frac{1}{T_n} Q_{T_n}(\alpha^n)\right]^{\frac{1}{2}} < \left[4\,r(0) + \delta\right]^{\frac{1}{2}},$$

а

$$\left[\frac{1}{T_n}\int\limits_0^{T_n} g^2(z(t), \alpha^0)\, dt\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant R < \infty$$

из-за компактности Z и непрерывности $g(z, \alpha^0)$.

Представим себе, таким образом, что K — компактное множество о котором идет речь в а). По условию 4 функция $[g(z(t), \alpha) - g(z(t), \beta)]^2$ непрерывна на компакте $Z \times K \times K$. Следовательно,

$$\varphi_T(\alpha, \beta) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T [g(z(t), \alpha) - g(z(t), \beta)]^2\, dt = \int\limits_Z [g(z, \alpha) - g(z, \beta)]^2\, d\mu_T(z)$$

сходится к

$$\varphi(\alpha, \beta) = \int\limits_Z [g(z, \alpha) - g(z, \beta)]^2\, d\mu(z).$$

Согласно условию 3 $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta$. Непрерывность $\varphi_T(\alpha, \beta)$ следует из непрерывности $g(z, \alpha)$. Поэтому непрерывность $\varphi(\alpha, \beta)$ на $K \times K$ будет доказана, если мы установим равномерную сходимость интегралов на $K \times K$. Воспользуемся следующим утверждением, аналогичным [1].

Пусть F — семейство действительных функций на Z, равностепеннонепрерывное и ограниченное. Тогда $\int f d\mu_T$ сходится равномерно к $\int f d\mu$ для семейства мер $\{\mu_T\}_{T \in (0, \infty)}$, сходящегося слабо к μ. Положим

$$f(z; \alpha, \beta) = [g(z, \alpha) - g(z, \beta)]^2,$$
$$F = \{f(z; \alpha, \beta) : (\alpha, \beta) \in K \times K\}.$$

Ограниченность и равностепенная непрерывность семейства F следует из непрерывности функции $f(z; \alpha, \beta)$ на компактном множестве $Z \times K \times K$. Таким образом, теорема 2 доказана.

VI. Пример. Пусть в (1)

$$g(t, \alpha) = e^{-\alpha t}, \quad \alpha \in (0, \infty).$$

Оценка наименьших квадратов $\hat{\alpha}$, удовлетворяющая уравнению

$$\int\limits_0^T [x(t) - e^{-\hat{\alpha} t}]\, t e^{-\hat{\alpha} t} dt = 0, \tag{11}$$

не является состоятельной оценкой параметра α^0. В самом деле, перепишем (11) в виде

$$\int_0^T \varepsilon(t)\, te^{-\alpha^0 t} + \int_0^T \varepsilon(t)\,[te^{-\hat{\alpha} t} - te^{-\alpha^0 t}]dt +$$
$$+ \int_0^T te^{-\hat{\alpha} t}\,[e^{-\alpha^0 t} - e^{-\hat{\alpha} t}]\,dt = 0. \qquad (12)$$

Считая $\hat{\alpha}$ состоятельной оценкой, можно показать, что 2-е и 3-е слагаемые левой части (12) стремятся к нулю по вероятности при $T \to \infty$. Первый же интеграл сходится к случайной величине

$$\varkappa = \int_0^\infty \varepsilon(t)\, te^{-\alpha^0 t}\, dt$$

и

$$D\varkappa = \int_0^\infty \int_0^\infty r(t-s)\, tse^{-\alpha^0(t+s)}\, dtds > 0,$$

если, например, $r(t) > 0$. Пришли к противоречию. Легко проверить, что предположения а) и б) здесь не выполнены.

Можно, однако, установить, что теорема 1 имеет место для функций $t\,\mathrm{arctg}\,\alpha t$, $[t^2 + \alpha t + 1]^{\frac{1}{2}}$ и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

1. Malinvaud E, The consistency of nonlinear regressions.— The annals of Mathematical Statistics, 1970, 41, 3.

2. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.

A. V. Ivanov

THE CONSISTENCY OF ESTIMATES OF NONLINEAR REGRESSIONS

Summary

The consistency of nonlinear regressions for certain class of stochastic processes is considered.

Поступила в редколлегию 19.I.1971.