И. Н. КОВАЛЕНКО, проф.
Московский институт электронного машиностроения

СТРОЕНИЕ СЛУЧАЙНОГО ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА

В настоящей статье решается задача о строении случайного ориентированного графа, в котором дуга от i-й вершины к j-й существует с вероятностью p_{ij}, независимо от существования остальных дуг. Число вершин n стремится к бесконечности. Устанавливаются условия на поведение $\{p_{ij}\}$, при которых множество вершин графа с вероятностью, стремящейся к 1, разбивается на три множества A_0, A_1, A_2 со следующими свойствами. Вершины, входящие в A_1, являются входными полюсами графа; вершины, входящие в A_2 — выходными полюсами. Мощности множеств A_1 и A_2 — асимптотически независимые, асимптотически пуассоновские случайные величины. Вершины, входящие в A_0, и дуги между ними образуют связный граф, в котором от любой вершины имеется путь к любой другой вершине. В частности, эти условия выполняются в предположении, что $p_{ij} = \frac{\ln n + x_{ij}}{n}$, где x_{ij} — ограниченные величины.

Решенная нами задача близка по постановке задаче, рассмотренной В. Е. Степановым [1, 2] для неориентированных случайных графов в предположении, что $p_{ij} = a_i b_j$.

Пусть ξ_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ — независимые случайные величины, причем

$$P(\xi_{ij} = 1) = 1 - P(\xi_{ij} = 0) = p_{ij} = 1 - q_{ij}. \qquad (1)$$

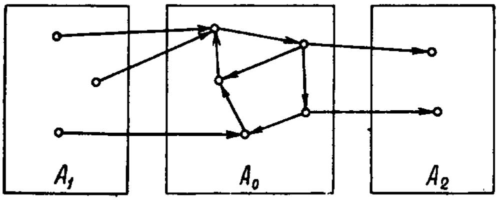
Для единообразия положим $p_{ii} = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. В дальнейшем p_{ij} будем рассматривать как функции n, однако не будем писать $p_{ij}(n)$, чтобы упростить обозначения. Это относится и к различным функциям от $\{p_{ij}\}$.

Будем считать, что матрица $\|\xi_{ij}\|$ определяет случайный ориентированный граф с вершинами $1, 2, \ldots, n$; дуга от i-й вершины к j-й вершине существует в том и только в том случае, если $\xi_{ij} = 1$.

Любое непустое множество B вершин графа будем считать замкнутым, если для всех $i \in B$, $j \bar{\in} B$ $\xi_{ij} = 0$. Определим A_1 как множество вершин j графа, для которых $\xi_{ij} = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Пусть A_2 — множество вершин i графа, для которых $\xi_{ij} = 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$. A_1 будет множество входных полюсов, A_2 — множество выходных полюсов случайного графа. Обозначим $A_0 = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{A_1 \cup A_2\}$.

Будем говорить, что выполняется условие Ω, если случайный граф обладает следующими свойствами.

1. Для любого $i \in A_1$ существует такое $j \in A_0$, что $\xi_{ij} = 1$.
2. Для любого $i \in A_1$ и всех $j \in A_2$ $\xi_{ij} = 0$.
3. Для любого $j \in A_2$ найдется такое $i \in A_0$, что $\xi_{ij} = 1$.
4. Множество вершин A_0 и дуг с началом и концом в этом множестве образует связный ориентированный граф, в котором от любой вершины имеется путь к любой другой вершине.



Заметим, что условие Ω равносильно следующему условию, связанному со структурой замкнутых множеств вершин случайного графа. Непустое множество C замкнуто в том и только в том случае, если $C \subset A_2$ или $A_0 \cup A_2 \subset C$. Пример графа, удовлетворяющего условию Ω, показан на рисунке.

Обозначим через μ_i мощность множества A_i $(i = 1, 2)$. Введем, далее, следующие обозначения:

$$Q_i = \prod_{j=1}^{n} q_{ij1}, \quad Q_j^* = \prod_{i=1}^{n} q_{ijk}, \tag{2}$$

$$R_{ik} = \min_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant n} q_{ij_1} \cdots q_{ij_k}, \tag{3}$$

$$R_{jk}^* = \min_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} q_{i_1 j} \cdots q_{i_k j},$$

$$1 \leqslant i \leqslant n, \; 1 \leqslant j \leqslant n, \; 1 \leqslant k \leqslant n,$$

$$\lambda_1 = \sum_{j=1}^{n} Q_j^*, \quad \lambda_2 = \sum_{i=1}^{n} Q_i. \tag{4}$$

Рассмотрим некоторые условия, связанные с поведением $\{q_{ij}\}$ при $n \to \infty$:

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} Q_i \to 0, \quad \max_{1 \leqslant j \leqslant n} Q_j^* \to 0, \tag{5}$$

$$\lambda_1 \leqslant \Lambda, \; \lambda_2 \leqslant \Lambda, \; \Lambda = \text{const} < \infty, \tag{6}$$

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{R_{ik}} \right)^k - (e^{\lambda_2} - 1) \to 0, \tag{7}$$

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}} \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{Q_j^*}{R_{jk}} \right)^k - (e^{\lambda_1} - 1) \to 0. \tag{8}$$

Прежде чем выводить из данных условий следствия, докажем, что эти условия выполняются в одном известном в теории графов случае. Именно, пусть

$$p_{ij} = \frac{\ln n + x_{ij}}{n}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{9}$$

где $|x_{ij}| \leqslant T$ для всех i, j.

Имеем

$$Q_i = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{\ln n + x_{ij}}{n}\right) = \frac{1}{n} \exp\left\{-\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right\} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right), \tag{10}$$

$$Q_j^* = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{\ln n + x_{ij}}{n}\right) = \frac{1}{n} \exp\left\{-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right\} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right). \tag{11}$$

Условие (5) выполняется очевидным образом.

Так как

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp\left\{-\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right\} \leqslant e^T,$$

то $\lambda_2 \leqslant e^T$; аналогично, $\lambda_1 \leqslant e^T$. Отсюда следует выполнение условия (6). Проверим теперь условия (7) и (8), остановившись, ввиду полной их аналогии, лишь на первом из них. Очевидно,

$$1 \geqslant R_{ik} \geqslant \left(1 - \frac{\ln n + T}{n}\right)^k, \tag{12}$$

так что

$$\lambda_2 = \sum_{i=1}^{n} Q_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{R_{ik}} \leqslant \lambda_2 \left(1 - \frac{\ln n + T}{n}\right)^{-k}. \tag{13}$$

Оценим общий член суммы (7). Так как $k \leqslant \frac{n}{2}$, то $\left(1 - \frac{\ln n + T}{n}\right)^{-k} \leqslant$ $\leqslant c_1 \sqrt{n}$ при достаточно большом n. Отсюда

$$\frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{R_{ik}}\right)^k \leqslant \frac{1}{k!} (\lambda_2 c_1 \sqrt{n})^k \leqslant \left(\frac{\lambda_2 c_1 \sqrt{n}}{k}\right)^k. \tag{14}$$

Если выполняется условие $k > c_2 \sqrt{n}$, где $c_2 \geqslant 2\lambda_2 c_1$, то

$$\frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{R_{ik}}\right)^k \leqslant 2^{-k},$$

так что

$$\sum_{k \geqslant c_2 \sqrt{n}} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{R_{ik}}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Если же $k < c_2 \sqrt{n}$, то

$$\left(1 - \frac{\ln n + T}{n}\right)^{-k} \leqslant 1 + \gamma, \text{ где } \gamma = O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right).$$

Таким образом,

$$\sum_{1\leqslant k<c_2\sqrt{n}} \frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{R_{ik}}\right)^k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}[\lambda_2(1+\gamma)]^k = e^{\lambda_2}-1+o(1). \quad (15)$$

Нижняя оценка того же вида тривиальна. Итак, условия (7) и (8) выполняются.

Всюду в дальнейшем будем считать, что условия (5) — (8) выполняются.

Лемма 1.

$$P(\mu_1=r,\mu_2=s)-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{\lambda_1^r}{r!}\frac{\lambda_2^s}{s!}\to 0, \quad (16)$$

$$r,\ s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$

Доказательство. Можно записать

$$\mu_1=\sum_{j=1}^{n}\xi_j,\quad \mu_2=\sum_{i=1}^{n}\eta_i, \quad (17)$$

где

$$\xi_j=\prod_{i=1}^{n}(1-\xi_{ij}),\ \eta_i=\prod_{j=1}^{n}(1-\xi_{ij}), \quad (18)$$

$$1\leqslant i\leqslant n,\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

Напомним, что ξ_{ij} — независимые случайные величины. Требуемое утверждение будет доказано, если мы установим, что для любых натуральных r, s $M\mu_1^r\mu_2^s$ сближается с $M\alpha^r\beta^s$, где α, β — независимые пуассоновские случайные величины с параметрами λ_1, λ_2. Легко видеть, что любой момент $M\mu_1^r\mu_2^s$ представляет собой конечную сумму слагаемых вида

$$I_{kl}=\sum_{j_1<j_2<\cdots<j_k}\ \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l} M\xi_{j_1}\xi_{j_2}\cdots\xi_{j_k}\eta_{i_1}\eta_{i_2}\cdots\eta_{i_l}. \quad (19)$$

Имеем

$$M\xi_{j_1}\cdots\xi_{j_k}\eta_{i_1}\cdots\eta_{i_l}=\left(\prod_{i=1}^{n}q_{ij_1}\cdots q_{ij_k}\right)\prod_{j\in\{j_1,\ldots,j_k\}}q_{i_1j}\cdots q_{i_lj}, \quad (20)$$

отсюда

$$M\xi_{j_1}\cdots\xi_{j_k}\eta_{i_1}\cdots\eta_{i_l}=Q^*_{j_1}\cdots Q^*_{j_k}Q_{i_1}\cdots Q_{i_l}\Big/\prod_{r=1}^{r}\prod_{s=1}^{k}q_{i_rj_s}. \quad (21)$$

Так как

$$R_{ik}\leqslant\prod_{s=1}^{k}q_{ij_s}\leqslant 1, \quad (22)$$

то

$$Q^*_{j_1}\cdots Q^*_{j_k}Q_{i_1}\cdots Q_{i_l}\leqslant M\xi_{j_1}\cdots\xi_{j_k}\eta_{i_1}\cdots\eta_{i_l}\leqslant$$

$$\leqslant Q^*_{j_1}\cdots Q^*_{j_k}\frac{Q_{i_1}}{R_{i_1k}}\cdots\frac{Q_{i_l}}{R_{i_lk}}. \quad (23)$$

Согласно условиям (4), (5) и (6), при $n \to \infty$

$$\sum_{j_1<\cdots<j_k} \sum_{i_1<\cdots<i_l} Q^*_{j_1} \cdots Q^*_{j_k} Q_{i_1} \cdots Q_{i_l} - \frac{\lambda_1^k}{k!} \frac{\lambda_2^l}{l!} \to 0. \tag{24}$$

Из условия (7) легко вывести, что при $n \to \infty$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{R_{ik}} - \sum_{i=1}^{n} Q_i \to 0, \tag{25}$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{Q_i}{R_{ik}} \to 0.$$

Из этих соотношений следует, что

$$\sum_{j_1<\cdots<j_k} \sum_{i_1<\cdots<i_l} Q^*_{j_1} \ldots Q^*_{j_k} \frac{Q_{i_1}}{R_{i_1k}} \cdots \frac{Q_{il}}{R_{i_lk}} - \frac{\lambda_1^k}{k!} \frac{\lambda_2^l}{l!} \to 0. \tag{26}$$

Соотношения (24) и (26) позволяют заключить, что $M\mu_1^r\mu_2^s$ сближаются с $M\alpha^r\beta^s$, что и требовалось доказать для установления леммы.

Лемма 2. Множества A_1 и A_2 не пересекаются с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$.

Доказательство. Существование общего элемента множеств A_1, A_2 равносильно событию S, состоящему в том, что для некоторого i все элементы i-й строки и i-го столбца матрицы $\|\xi_{ij}\|$ равны 0. В то же время

$$P(S) \leqslant \sum_{i=1}^{n} Q_i Q_i^* \leqslant \lambda_2 \max_{1\leqslant i\leqslant n} Q_i^* \to 0 \tag{27}$$

по условию (5).

Назовем непустое подмножество C множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ вершин случайного графа простым, если $C \subseteq A_2$ либо $A_0 \cup A_2 \subset C$. Обозначим число всех простых подмножеств через ρ.

Лемма 3. При $n \to \infty$

$$\underline{\lim} \{M\rho - (e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2} - 1)\} \geqslant 0. \tag{28}$$

Доказательство. При $n \to \infty$ с вероятностью, стремящейся к 1, множество A_0 не пусто; множества A_1, A_2, по определению, содержат соответственно μ_1 и μ_2 элементов. Поэтому число простых подмножеств равно с вероятностью, стремящейся к 1, $2^{\mu_2} - 1$ (число непустых подмножеств A_2) плюс 2^{μ_1} (число множеств, содержащих $A_0 \cup A_2$). Так как неотрицательные случайные величины 2^{μ_1} и 2^{μ_2} сходятся по распределению к случайным величинам 2^α и 2^β, то

$$\underline{\lim} \{M\rho - (M\, 2^\alpha + M\, 2^\beta - 1)\} \geqslant 0,$$

откуда и следует (28).

Лемма 4. Пусть ρ_1 — число замкнутых подмножеств вершин случайного графа. Тогда при $n \to \infty$

$$\overline{\lim} \{M\rho_1 - (e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2} - 1)\} \leqslant 0. \tag{29}$$

Доказательство. Обозначим через ν_k число замкнутых подмножеств мощности k вершин случайного графа. Тогда

$$\rho_1 = \sum_{k=1}^{n} \nu_k, \quad M\rho_1 = \sum_{k=1}^{n} M\nu_k. \tag{30}$$

Оценим $M\nu_k$. Можно записать

$$\nu_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \xi_{i_1, \ldots i_k}, \tag{31}$$

где $\xi_{i_1 \ldots i_k}$ — индикатор события

$$\{\xi_{ij} = 0, \ i \in \{i_1, \ldots, i_k\}, \ j \bar{\in} \{i_1, \ldots, i_k\}\}.$$

Следовательно,

$$M\nu_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \prod_{\substack{i \in \{i_1, \ldots, i_k\} \\ j \bar{\in} \{i_1, \ldots, i_k\}}} q_{ij}. \tag{32}$$

Рассмотрим два случая: $k \leqslant \frac{n}{2}$ и $k > \frac{n}{2}$.

1. $k \leqslant \frac{n}{2}$. Используем оценку

$$\prod_{\substack{i \in \{i_1, \ldots, i_k\} \\ j \bar{\in} \{i_1, \ldots, i_k\}}} q_{ij} = \prod_{\substack{i \in \{i_1, \ldots, i_k\} \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} q_{ij} \Big/ \prod_{i, j \in \{i_1, \ldots, i_k\}} q_{ij} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Q_{i_1}}{R_{i_1 k}} \cdots \frac{Q_{i_k}}{R_{i_k k}}. \tag{33}$$

Просуммировав по всем индексам $i_1, \ldots, i_k$, удовлетворяющим условию $i \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$, найдем

$$M\nu_k \leqslant \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \frac{Q_{i_1}}{R_{i_1 k}} \cdots \frac{Q_{i_k}}{R_{i_k k}} \leqslant \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{R_{ik}} \right)^k. \tag{34}$$

Согласно условию (7) при $n \to \infty$

$$\overline{\lim} \Big\{ \sum_{1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}} M\nu_k - (e^{\lambda_2} - 1) \Big\} \leqslant 0. \tag{35}$$

2. $k > \frac{n}{2}$. Так как

$$\sum_{\frac{n}{2} < k \leqslant n} M\nu_k = \sum_{0 \leqslant k < \frac{n}{2}} M\nu_{n-k}, \tag{36}$$

то нужно оценить ν_{n-k} при $0 \leqslant k < \frac{n}{2}$. Прежде всего $M\nu_n = 1$, так как множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ с вероятностью 1 является замкнутым. При $1 \leqslant k < \frac{n}{2}$ используем формулу

$$M\nu_{n-k} = \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant n} \prod_{\substack{i \bar{\in} \{j_1, \ldots, j_k\} \\ j \in \{j_1, \ldots, j_k\}}} q_{ij}, \tag{37}$$

которая выводится аналогично формуле (32). Далее,

$$\prod_{\substack{i\bar{\in}\{j_1,\ldots,j_k\}\\ j\in\{j_1,\ldots,j_k\}}} q_{ij} = \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ j\in\{j_1,\ldots,j_k\}}} q_{ij} \Big/ \prod_{i,j\in\{j_1,\ldots,j_k\}} q_{ij} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Q^*_{j_1}}{R^*_{j_1k}} \cdots \frac{Q^*_{j_k}}{R^*_{j_kk}}. \tag{38}$$

Суммирование по $j_1, \ldots, j_k$ приводит к оценке

$$M\nu_{n-k} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{Q^*_j}{R^*_{jk}}\right)^k. \tag{39}$$

Из условия (8) и равенства (36) с учетом того, что $M\nu_n = 1$, находим

$$\overline{\lim}\,\{\sum_{\frac{n}{2}<k\leqslant n} M\nu_k - e^{\lambda_1}\} \leqslant 0. \tag{40}$$

Объединив оценки (35) и (40) с учетом (30), получим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\{M\rho_1 - (e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2} - 1)\} \leqslant 0. \tag{41}$$

Лемма 5. С вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$, случайный граф не содержит замкнутых подмножеств вершин, не являющихся простыми подмножествами.

Доказательство. Представим ρ_1 и ρ, как функции элементарного события ω из вероятностного пространства с мерой $P_n\,(d\omega)$; $\rho_1 = \rho_1\,(\omega)$, $\rho = \rho\,(\omega)$. Введем две вспомогательные случайные величины

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} \rho_1(\omega) - \rho(\omega), & \text{если } \rho_1(\omega) > \rho(\omega), \\ 0, & \text{если } \rho_1(\omega) \leqslant \rho(\omega), \end{cases} \tag{42}$$

$$\tau(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } \rho_1(\omega) > \rho(\omega), \\ \rho(\omega) - \rho_1(\omega), & \text{если } \rho_1(\omega) \leqslant \rho(\omega). \end{cases} \tag{43}$$

Тогда справедлива следующая формула:

$$\sigma(\omega) - \tau(\omega) = \rho_1(\omega) - \rho(\omega), \tag{44}$$

отсюда

$$M\sigma(\omega) = M\tau(\omega) + M\rho_1(\omega) - M\rho(\omega). \tag{45}$$

Как следствие формул (28) и (41), из (45) вытекает, что

$$M\sigma(\omega) \leqslant M\tau(\omega). \tag{46}$$

Можно записать

$$M\tau(\omega) = \int\limits_{\rho(\omega)-\rho_1(\omega)>0} [\rho(\omega) - \rho_1(\omega)]\, P_n(d\omega) \leqslant \int\limits_{\rho(\omega)-\rho_1(\omega)>0} \rho(\omega)\, P_n(d\omega). \tag{47}$$

Далее,

$$\int\limits_{\rho(\omega)-\rho_1(\omega)>0} \rho(\omega)\, P_n(d\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} k \int\limits_{\substack{\omega\in\Omega_k\\ \rho(\omega)>\rho_1(\omega)}} P_n(d\omega), \tag{48}$$

где Ω_k — множество тех ω, для которых $\rho\,(\omega) = k$.

Вспомним, что μ_1 и μ_2 представляют собой суммы независимых случайных величин (соответственно числа нулевых столбцов и нулевых строк матрицы $\|\xi_{ij}\|$). По формуле (7)

$$Mz^{\mu_1} = \prod_{j=1}^{n} Mz^{\xi_j} = \prod_{j=1}^{n} [1-(1-z)Q_j^*] \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-(1-z)\sum_{j=1}^{n} Q_j^*\right\} = \exp\{-(1-z)\lambda_1\}. \qquad (49)$$

Аналогично

$$Mz^{\mu_2} \leqslant \exp\{-(1-z)\lambda_2\},$$

отсюда

$$M\rho^s \leqslant 2^s [\exp\{(2^s-1)\lambda_1\} + \exp\{(2^s-1)\lambda_2\} \qquad (50)$$

для любого $s = 1, 2, \ldots$. Положив $s = 3$, найдем, что

$$P(\rho(\omega) = k) \leqslant P(\rho(\omega) \geqslant k) \leqslant \frac{L}{k^3}, \qquad (51)$$

где $L = M\rho^3$ — ограниченная величина.

Таким образом, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k \int\limits_{\substack{\omega\in\Omega_k \\ \rho(\omega)>\rho_1(\omega)}} P_n(d\omega)$ мажорируется рядом $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{L}{k^2}$, следовательно, равномерно сходится при $n \to \infty$. Отсюда можно записать

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \int\limits_{\substack{\omega\in\Omega_k \\ \rho(\omega)>\rho_1(\omega)}} P_n(d\omega) \leqslant N \int\limits_{\substack{\omega\in\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_N \\ \rho(\omega)>\rho_1(\omega)}} P_n(d\omega) + \theta, \qquad (52)$$

где N — фиксированное число, θ — величина, меньшая произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$ равномерно относительно n.

Если A_1 и A_2 — непересекающиеся множества, то $\rho(\omega) \leqslant \rho_1(\omega)$. Согласно лемме 2, A_1 и A_2 не пересекаются с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$. Отсюда $P(\rho(\omega) > \rho_1(\omega)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, а стало быть, правая часть (52) может быть сделана сколь угодно малой. Следовательно, $M\tau(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Возвратившись к неравенству (46), видим, что $M\sigma(\omega)$ также стремится к нулю. Поскольку

$$P(\rho_1(\omega) > \rho(\omega)) = P(\sigma(\omega) \geqslant 1) \leqslant M\sigma(\omega), \qquad (53)$$

то $P(\rho_1(\omega) > \rho(\omega)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Следовательно, с вероятностью стремящейся к 1 при $n \to \infty$, не существует замкнутого подмножества вершин случайного графа, которое не являлось бы простым подмножеством. Лемма доказана.

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема. Если выполнены условия (5) — (8), то условие Ω выполняется с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$. При этом множества входных и выходных полюсов графа с вероятностью, стремящейся к 1, не пересекаются, а мощности этих множеств сближаются по распределению с независимыми пуассоновскими случайными величинами с параметрами λ_1 и λ_2.

Автор благодарит Г. И. Ивченко и В. П. Козырева за обсуждение результатов статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов В. Е. Комбинаторная алгебра и случайные графы.— Теория вероятн. и ее применен., 16, вып. 3, 1969.

2. Степанов В. Е. О вероятности связности случайного графа.— Теория вероятн. и ее применен., 15, вып. 1, 1970.

I. N. Kovalenko

STRUCTURE OF AN ORIENTED RANDOM GRAPH

Summary

Let $\|\xi_{ij}\|$ be a random $n \times n$ Boolean matrix with independent elements. An oriented random graph is associated with the matrix in a usual way. The limiting behaviour of the structure of the graph as $n \to \infty$ under conditions implying asymptotical Poissonity of the number of isolated vertices is considered.

Поступила в редколлегию 12.IX.1970.