Л. М. КОРСУНСКИЙ, асп.
Киевский университет

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ИНВАРИАНТНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ЯДЕР. I

Пусть G — коммутативная локально бикомпактная группа, $g \to T_g$ — унитарное представление группы G в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Теорема о спектральном разложении унитарного представления коммутативной локально бикомпактной группы [2] дает разложение представления $g \to T_g$ на неприводимые представления. В нашей заметке показывается, что спектральную меру в этом разложении можно продифференцировать по некоторой скалярной мере и получить разложение по обобщенным собственным векторам унитарного представления группы G. При помощи полученных разложений строятся интегральные представления инвариантных положительно определенных ядер. Полученные представления могут быть использованы в корреляционной теории инвариантных обобщенных случайных полей.

Отметим, что теорему о спектральном разложении унитарного представления коммутативной локально бикомпактной группы можно получить следующим образом. Для семейства коммутирующих унитарных операторов T_g, непрерывно зависящих от $g \in G$ как от параметра, можно подобно тому, как это делается в [3] для семейства коммутирующих самосопряженных операторов, построить спектральное разложение в виде континуального интеграла по множеству всех непрерывных комплекснозначных функций на G со значениями, равными по модулю единице. Из того, что операторы T_g образуют представление группы G, следует, что мера в этом разложении сосредоточена на подмножестве функций, удовлетворяющих некоторому функциональному уравнению, из которого следует, что это подмножество функций есть группа характеров группы G.

Ниже все пространства предполагаются сепарабельными. Рассмотрим оснащение гильбертового пространства H_0:

$$H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+, \tag{1}$$

где H_+ и H_- — пространства с позитивной и негативной нормами (см. [1], гл. 5). Будем считать, что в H_- задана инволюция, являющаяся инволюцией и в H_0 и H_+. Элемент $K \in H_- \otimes H_-$ называется ядром (обобщенным); если $(K, u \otimes \bar{u})_{H_0 \otimes H_0} \geqslant 0$ $(u \in H_+)$, то ядро называется положительно определенным (п. о.). По ядру $K \in H_- \otimes H_-$ можно построить непрерывный оператор R в пространстве H_+, связанный с ядром K соотношением $(K, v \otimes \bar{u})_{H_0 \otimes H_0} = (Ru, v)_{H_+}$ $(u, v \in H_+)$.

Пусть G — произвольная локально бикомпактная группа типа 1, удовлетворяющая второй аксиоме счетности, $g \to T_g$ — унитарное представление группы G в пространстве H_0. Будем предполагать, что оснащение (1) можно продолжить. Это означает, что существует линейное топологическое пространство $D \subseteq H_+$ (включение топологическое), плотное в H_+, такое, что сужение представления $g \to T_g$ на D непрерывно в D. Ядро K называется G-инвариантным, если $(K, T_g v \otimes (\overline{T_g u}))_{H_0 \otimes H_0} = (K, v \otimes \bar{u})_{H_0 \otimes H_0}$ для всех $u, v \in D$, $g \in G$. Аналогично определяются п. о. ядро и G-инвариантное ядро в случае оснащения $\Phi' \supseteq H_0 \supseteq \Phi$ гильбертового пространства H_0 с ядерным локально выпуклым линейным топологическим пространством Φ.

1. Пусть G — коммутативная локально бикомпактная группа, $\hat{G}$ — группа характеров группы G. Унитарному представлению $g \to T_g$ группы G отвечает некоторая спектральная мера $E(\Delta)$, определенная на σ-алгебре $B(\hat{G})$ борелевских множеств в $\hat{G}$, такая, что $T_g = \int\limits_{\hat{G}} \chi(g)\, dE(\chi)$ [2].

Под обобщенным собственным вектором представления, отвечающим характеру $\chi \in \hat{G}$, понимается вектор $\varphi \in H_-$ такой, что

$$(\varphi, T_g u)_{H_0} = (T_g^{-1}\varphi, u)_{H_0} = \chi(g^{-1})(\varphi, u)_{H_0} \qquad (u \in D).$$

Лемма 1. Пусть имеется оснащение (1) гильбертового пространства H_0, причем вложение $H_+ \to H_0$ квазиядерно (т. е. оператор вложения Гильберта — Шмидта). В H_0 действует унитарное представление $g \to T_g$ коммутативной локально бикомпактной группы G, обозначим $E(\Delta)$ $(\Delta \in B(\hat{G}))$ его спектральную меру. Существует числовая неотрицательная мера $\rho(\Delta)$ $(\Delta \in B(\hat{G}))$ и операторная функция $P(\chi)$, определенная ρ-почти везде на группе характеров $\hat{G}$, значениями которой являются операторы Гильберта — Шмидта, действующие из H_+ в H_-, такая, что справедливо равенство Парсерваля

$$E(\Delta) = \int\limits_{\Delta} P(\chi)\, d\rho(\chi) \qquad (\Delta \in B(\hat{G})).$$

Оператор $P(\chi)$ называется оператором обобщенного проектирования на обобщенное собственное подпространство, отвечающее характеру $\chi \in \hat{G}$. Каждый оператор $P(\chi)$ неотрицателен и имеет конечный след, равный 1; следовательно, $|P(\chi)| \leqslant 1$. Интеграл сходится в смысле гильбертовой нормы операторов. Можно указать в $\hat{G}$ множество полной ρ-меры, такое, что область значений оператора $P(\chi)$ при χ из этого множества состоит из векторов, являющихся обобщенными собственными векторами для представления $g \to T_g$, отвечающими характеру χ.

Семейство п. о. ядер $\Omega(\chi) \in H_- \otimes H_-$, зависящих от $\chi \in \hat{G}$ как от параметра, будем называть элементарным, если оно ограничено по норме равномерно относительно $\chi \in \hat{G}$ и при любом $g \in G$ выполняются соотношения

$$(\Omega(\chi), (T_g v) \otimes \bar{u})_{H_0 \otimes H_0} = \overline{\chi(\bar{g})} (\Omega(\chi), v \otimes \bar{u})_{H_0 \otimes H_0}, \tag{2}$$

$$(\Omega(\chi), v \otimes \overline{(T_g u)})_{H_0 \otimes H_0} = \chi(g) (\Omega(\chi), v \otimes \bar{u})_{H_0 \otimes H_0}.$$

Лемма 2. Пусть имеется п. о. ядро $K \in H_- \otimes H_-$ такое, что оператор R в H_+, соответствующий ядру K, имеет конечный след, и непрерывное представление $g \to T_g$ группы G в линейном топологическом пространстве $D \subseteq H_+$, плотном в H_+. Для того чтобы имело место представление

$$K = \int\limits_{\hat{G}} \Omega(\chi)\, d\rho(\chi), \tag{3}$$

где $\Omega(\chi)$ — некоторое семейство элементарных ядер, ρ — конечная неотрицательная мера на $\hat{G}$, а интеграл сходится по норме пространства $H_- \otimes H_-$, необходимо и достаточно, чтобы ядро K было G-инвариантным. В представлении (3) выражение $\Omega(\chi)\, d\rho(\chi)$ определяется однозначно.

Доказательство лемм 1, 2 проводится подобно тому, как в [3] доказываются аналогичные результаты для семейства коммутирующих самосопряженных операторов.

Теорема 1. Пусть имеется оснащение $\Phi' \supseteq H_0 \supseteq \Phi$ гильбертового пространства H_0 с ядерным локально выпуклым пространством Φ. Пусть в Φ задано непрерывное представление $g \to T_g$ коммутативной локально бикомпактной группы G. Для того чтобы обобщенное ядро $K \in (\Phi \hat{\otimes} \Phi)'$ было п. о. и G-инвариантно, необходимо и достаточно, чтобы оно допускало представление (3), где $\Omega(\chi) \in (\Phi \hat{\otimes} \Phi)'$ — некоторое семейство элементарных п. о. ядер, $d\rho(\chi)$ — конечная неотрицательная мера на $\hat{G}$, а интеграл сходится в слабом смысле. Выражение $\Omega(\chi)\, d\rho(\chi)$ в представлении (3) определяется однозначно.

Теорема 1 следует из леммы 2, так как в силу ядерности пространства Φ ядро K можно рассматривать как G-инвариантное п. о. ядро $K \in H_- \otimes H_-$, причем соответствующий ядру K оператор R в H_+ имеет конечный след. Пространство H_+ в этом случае строится как пополнение Φ (после отождествления с нулем) относительно квазискалярного произведения, порождаемого некоторой полунормой в Φ.

2. Пусть $H_0 = L_2(G)$ — сепарабельное гильбертово пространство функций с интегрируемым квадратом модуля по мере Хаара на группе G, $\Phi = S(G)$ — пространство бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций на группе G [4]. Φ — ядерное локально выпуклое пространство. Положим $H_0^j = H_0 \otimes \cdots \otimes H_0$ — тензорное произведение j экземпляров гильбертового пространства H_0, $\Phi^j = \Phi \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \Phi$ — проективное тензорное произведение j экземпляров пространства Φ. Получим оснащение

$$(\Phi^j)' \supseteq H_0^j \supseteq \Phi^j,$$

где $(\Phi^j)' = (\Phi(\hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \Phi)$.

В качестве инволюции в пространстве Φ^j примем переход к комплексно сопряженной функции и распространим ее по непрерывности на H_0^j и $(\Phi^j)'$. Операторы левого сдвига L_g на группе G образуют непрерывное представление группы G в пространстве Φ. Положим $T_g = L_g \otimes \cdots \otimes L_g$. Тогда $g \to T_g$ — непрерывное представление группы G в пространстве Φ^j.

Ядерной мерой $R(\Delta)$ на $\hat{G}$ назовем функцию борелевских множеств $\Delta \in B(\hat{G})$ со значениями в п. о. ядрах $R(\Delta) \in (\Phi^{2j-2})'$, такую, что $R(\Delta)$ аннулируется на пустом множестве и слабо абсолютно аддитивна. Будем говорить, что ядерная мера $R(\Delta)$ имеет степенной рост, если скалярная мера $\sigma(u; \Delta) = (R(\Delta), u \otimes \bar{u})_{H_0^{2j-2}}$ имеет степенной рост на $\hat{G}$ при всех $u \in \Phi^{j-1}$.

Теорема 2. Для того чтобы ядро $K \in (\Phi^{2j})'$ было п. о. и G-инвариантно, необходимо и достаточно, чтобы оно допускало представление

$$K(x_1, \ldots, x_j, y_1, \ldots, y_j) =$$
$$= \int_{\hat{G}} \overline{\chi(x_1)}\, \chi(y_1)\, d_\chi R(x_1^{-1}x_2, \ldots; x_1^{-1}x_j, y_1^{-1}y_2, \ldots, y_1^{-1}y_j; \chi), \quad (4)$$

где $R(\Delta)$ — ядерная мера степенного роста на $\hat{G}$.

Интеграл сходится в слабом смысле. Мера $R(\Delta)$ определяется по ядру K однозначно.

Представление (4) получается из представления (3), если в него подставить общее решение системы (2): $\Omega(\chi) = \overline{\chi(x_1)}\, \chi(y_1)\, \Omega_0(x_1^{-1}x_2, \ldots$ $\ldots, x_1^{-1}x_j, y_1^{-1}y_2, \ldots, y_1^{-1}y_j; \chi)$ и положить $R(\Delta) = \int_\Delta \Omega_0(\chi)\, d\rho(\chi)$.

Из теоремы 2 непосредственно следует такое предложение.

Предложение 1. Для того чтобы обобщенная функция $F \in (\Phi^3)'$, где $\Phi = S(G)$, удовлетворяла неравенству

$$\int \overline{u(x_1, x_2)}\, u(x_3, x_4)\, F(x_1x_2^{-1}, x_2x_3^{-1}, x_3x_4^{-1}) \prod_{l=1}^{4} d\mu(x_l) \geqslant 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление

$$F(t_1, t_2, t_3) = \int\limits_{\hat{G}} \chi(t_2)\, d_\chi R(t_1, t_3^{-1}; \chi),$$

где $R(t_1, t_3; \Delta) \in (S(G) \hat{\otimes} S(G))'$ $(\Delta \in B(\hat{G}))$ — ядерная мера степенного роста на G.

Мера $R(\Delta)$ определяется однозначно по F.

Отметим, что при $G = R^n$ это предложение дает решение задачи, поставленной в 1956 г. Вайтманом [5]. В неявном виде это решение было ранее получено в работе [6].

3. Пусть G — коммутативная локально бикомпактная группа, H — некоторая группа автоморфизмов группы G, $G{\cdot}H$ — полупрямое произведение групп G и H. Определим в пространстве Φ^l представление $(g, h) \to U_{(g,h)} : u(x_1, \ldots, x_l) \to u(h^{-1}(g^{-1}x_1), \ldots, h^{-1}(g^{-1}x_l))$ группы $G{\cdot}H$. Каждый автоморфизм $h \in H$ группы G определяет некоторый автоморфизм $\hat{h}$ группы $\hat{G}$ по формуле $(\hat{h}\chi)(g) = \chi(h^{-1}g)$. Сужение представления $(g, h) \to U_{(g,h)}$ на подгруппу G группы $C{\cdot}H$ совпадает с представлением $g \to T_g$ группы $G : T_g = U_{(g,1)}$. В силу теоремы 2 справедливо представление (4). Учитывая $G{\cdot}H$-инвариантность ядра K и единственность меры $R(\Delta)$, получим следующее предложение.

Предложение 2. Для того чтобы ядро $K \in (\Phi^{2l})'$ было п. о. и $G{\cdot}H$-инвариантно, необходимо и достаточно, чтобы оно допускало представление (4), где ядерная мера степенного роста $R(\Delta)$, определенная на борелевских $\Delta \in B(\hat{G})$, обладает следующим свойством

$$R(h\xi_1, \ldots, h\xi_{l-1}, h\eta_1, \ldots, h\eta_{l-1}; \hat{h}\Delta) = \\ = R(\xi_1, \ldots, \xi_{l-1}, \eta_1, \ldots, \eta_{l-1}; \Delta).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., «Наукова думка», 1965.
2. Наймарк М. А. Нормированные кольца. М., «Наука», 1968.
3. Березанский Ю. М. Разложение по обобщенным собственным векторам и интегральное представление положительно определенных ядер в форме континуального интеграла.— Сиб. матем. ж., 1968, 9, 5, 998.
4. Wawrzynczyk A. On tempered distributions and Bochner — Schwartz theorem on arbitrary locally compact Abelian groups.— Colloquium Mathematicum, 19, 1968, 2, 305—318.
5. Wightman A. S. Quantum field theory in terms of vacuum expectation values.— Phys. Rev., 101, 1956, 860.
6. Самойленко Ю. С., Корсунский Л. М. Интегральное представление инвариантных положительно определенных матричных ядер.— УМЖ, 21, 1969, 4.

L. M. Korsunsky

ON THE INTEGRAL REPRESENTATION OF INVARIANT POSITIVE-DEFINITE KERNELS.I

Summary

The integral representations of positive-definite generalized kernels, invariant under some representation of an abelian locally bicompact group in the space ot the test functions is considered. These integral representations can be used in the correlation theory of the invariant generalized random fields.

Поступила в редколлегию 30.XI.1970.

4919