Р. Я. МАЙДАНЮК, канд. физ.-мат. наук
Институт математики АН УССР

О ПЛОТНОСТЯХ МЕР, СООТВЕТСТВУЮЩИХ РЕШЕНИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

Пусть μ и μ_1 — меры на σ-алгебре подмножеств $\mathfrak{B}$ пространства $L_2[0, \pi]$, соответствующие решениям дифференциальных уравнений

$$y'(t) = \eta(t), \tag{1}$$

$$y_1'(t) + f(t)\, y_1(t) = \eta(t) \tag{2}$$

при начальных условиях

$$y(0) = y_1(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{k^2},$$

где $\eta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{k} \sin kt$, ξ_1, ξ_2, ... — последовательность независимых одинаково распределенных устойчивых случайных величин с характеристическим показателем $\delta > 1$, нулевыми математическими ожиданиями и плотностью распределения $p(x)$.

Из ранее доказанных теорем [2] следует, что $\eta(t) \in L_2[0, \pi]$.

Нас будут интересовать условия абсолютной непрерывности меры μ_1 относительно μ. Введем ряд обозначений.

Пусть $\rho(a, x)$ — плотность меры μ относительно своего сдвига, A — линейный оператор, действующий в $L_2[0, \pi]$ и имеющий вид

$$A = I + \int_0^t f(x)(\cdot)\, dx,$$

$$A^{-1} = I + \exp\left\{\int_0^t f(x)\, dx\right\} \int_0^t \exp\left\{\int_0^x f(z)\, dz\right\} f(x)(\cdot)\, dx,$$

I — единичный оператор, P_n — проектирующий оператор на первые n векторов базиса пространства $L_2[0, \pi]$.

Теорема. Если выполняются следующие условия:

1) для $x \in (0, \pi)$, $f(x) > 0$;

2) $f(0) = f(\pi) = 0$;

3) существуют $f'(x)$ и $f''(x)$;

4) функции $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ интегрируемы на $[0, \pi]$, то меры μ и μ_1 эквивалентны и

$$\frac{d\mu_1}{d\mu}(y(t)) = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^\pi f(z)\,dz\right\}\prod_{k=1}^\infty \frac{P\left(\xi_k + \int_0^\pi (f(x)\,y(x))' \cos kx dx\right)}{P(\xi_k)}.$$

Доказательство. Так как в нашем случае $\mu_1(B) = \mu(A^{-1}(B))$ для всех $B \in \mathfrak{B}$, то для доказательства теоремы достаточно применить условия теоремы [3], но перед этим необходимо показать, что $|\det A| < \infty$. А. В. Скороход [1] определил детерминант линейного оператора T, для которого $T - I$, где I — единичный оператор, вполне непрерывен, следующим образом.

Пусть α_k — последовательность собственных чисел оператора TT^*, где T^* — сопряженный оператор к T, тогда

$$|\det T| = \sqrt{\prod_{k=1}^\infty \alpha_k}.$$

В конечномерном пространстве это определение совпадает с обычным определением детерминанта оператора, как определителя матрицы, которой представляется линейный оператор в некотором базисе.

Вычислим детерминант оператора в нашем случае.

Для нахождения собственных чисел оператора

$$AA^* = \left(I + \int_0^t f(x)(\cdot)\,dx\right)\left(I + \int_0^t f(x)(\cdot)\,dx\right)^* \tag{3}$$

поступим следующим образом. Так как

$$Ay = \varphi(t) = \int_0^t f(x)\,y(x)\,dx + y(t) = \int_0^{g(t)} y(g^{-1}(u))\,du + y(t),$$

где

$$u = g(x) = \int_0^x f(z)\,dz,$$

или

$$Ay = \varphi(g^{-1}(\tau)) = \int_0^{g(g^{-1}(\tau))} y(g^{-1}(u))\,du + y(g^{-1}(\tau)) =$$

$$= \int_0^\tau y(g^{-1}(u))\,du + y(g^{-1}(\tau)), \quad \tau \in \left[0, \int_0^\pi f(z)\,dz\right],$$

то будем искать собственные числа оператора

$$\left(I+\int_0^\tau (\cdot)\,dx\right)\left(I+\int_0^\tau (\cdot)\,dx\right)^*, \tag{4}$$

которые совпадают с собственными числами оператора (3).

Рассмотрим следующее уравнение:

$$(\lambda-1)\,\varphi(\tau)=\int_0^a \varphi(u)\,du+\int_0^\tau\int_x^a \varphi(u)\,du\,dx, \tag{5}$$

где $a=\int_0^\pi f(z)\,dz.$

Продифференцировав (5) по τ, получим

$$(\lambda-1)\,\varphi'(\tau)=\int_\tau^a \varphi(u)\,du, \tag{6}$$

откуда

$$(\lambda-1)\,\varphi'(a)=0. \tag{7}$$

Из (5) находим

$$(\lambda-1)\,\varphi(0)=\int_0^a \varphi(u)\,du. \tag{8}$$

Продифференцировав левую и правую часть (6) по τ, получим

$$(\lambda-1)\,\varphi''(\tau)+\varphi(\tau)=0, \tag{9}$$

откуда общее решение уравнения (9) запишется в виде

$$\varphi(\tau)=C_1\cos\frac{\tau}{\sqrt{\lambda-1}}+C_2\sin\frac{a}{\sqrt{\lambda-1}}. \tag{10}$$

Используя (7) и (8), получим уравнение для нахождения собственных чисел.

Из (7) следует

$$C_2\cos\frac{a}{\sqrt{\lambda-1}}-C_1\sin\frac{a}{\sqrt{\lambda-1}}=0. \tag{11}$$

Подставляя (10) в (8), получаем

$$(\lambda-1)\,C_1=\int_0^a\left(C_1\cos\frac{u}{\sqrt{\lambda-1}}+C_2\sin\frac{u}{\sqrt{\lambda-1}}\right)du=C_2\sqrt{\lambda-1},$$

откуда $\frac{C_1}{C_2}=\frac{1}{\sqrt{\lambda-1}}$. Из (11)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda-1}}\sin\frac{a}{\sqrt{\lambda-1}}-\cos\frac{a}{\sqrt{\lambda-1}}=0.$$

Обозначим $\frac{1}{\sqrt{\lambda-1}}=x$. Тогда $x\sin ax-\cos ax=0$. Пусть корни этого уравнения x_k. Тогда $\lambda_k=1+\frac{1}{x_k^2}$ и

$$|\det A|=\sqrt{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{x_k^2}\right)}. \tag{12}$$

Рассмотрим целую комплекснозначную функцию

$$\Phi[z] = \cos az - z \sin az. \tag{13}$$

Так как функция (13) имеет порядок 1, то из теории целых функций следует, что она может быть разложена в следующее бесконечное произведение:

$$\Phi(z) = \cos az - z \sin az = \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{z^2}{x_k^2}\right],$$

откуда получаем

$$|\det A| = \sqrt{\Phi[i]} = \sqrt{\cos ai - i \sin ai} =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2} a\right\} = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(z)\,dz\right\} < \infty.$$

Тогда для доказательства нашей теоремы достаточно показать, что выражения

$$\rho(P_n(y(t) - Ay(t)), y(t)),$$

$$\rho(P_n(y(t) - A^{-1} y(t)), y(t))$$

сходятся по вероятности к некоторым пределам при $n \to \infty$.

В силу теоремы работы [3] необходимо показать, что для некоторого $1 < \beta < \delta$ сходятся ряды

$$\sum_{i,k}^{\infty} \left|\frac{1}{i} \int_0^{\pi} f(x) \sin ix \cos kx dx\right|^{\beta}, \tag{14}$$

$$\sum_{i,k}^{\infty} \frac{1}{i^2} \left|\int_0^{\pi} f'(x) \cos ix \cos kx dx\right|^{\beta}, \tag{15}$$

$$\sum_{i,k}^{\infty} \frac{1}{i^2} \left|\int_0^{\pi} (f'(x) \exp\left\{-\int_0^{t} f(x)\,dx\right\} \times\right.$$

$$\left.\times \int_0^{t} f(x) \exp\left\{\int_0^{x} f(z)\,dz\right\} \cos ixdx) \cos ktdt\right|^{\beta}, \tag{16}$$

$$\sum_{i,k}^{\infty} \frac{1}{i^2} \left|\int_0^{\pi} (f^2(t) \exp\left\{-\int_0^{t} f(x)\,dx \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times \int_0^{t} f(x) \exp\left\{\int_0^{x} f(z)\,dz\right\} \cos ixdx\right) \cos ktdt\right|^{\beta}, \tag{17}$$

$$\sum_{i,k}^{\infty} \frac{1}{i^2} \left|\int_0^{\pi} f^2(x) \sin ix \cos kx dx\right|^{\beta}, \tag{18}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \cos kx dx, \tag{19}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_0^{\pi} f'(x) \cos^2 kx dx, \tag{20}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_0^{\pi} \left(f'(t) \exp\left\{-\int_0^t f(x)\,dx\right\} \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^t f(x) \exp\left\{\int_0^x f(z)\,dz\right\} \cos kx dx\right) \cos kt dt, \tag{21}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_0^{\pi} \left(f^2(t) \exp\left\{-\int_0^t f(z)\,dz\right\} \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^t f(x) \exp\left\{\int_0^x f(t)\,dt\right\} \cos kx dx\right) \cos kt dt. \tag{22}$$

В силу условий 3 и 4 нашей теоремы и того, что ряды вида $\sum_{i,k}^{\infty} \frac{1}{i^{\delta}} \frac{1}{k^{\beta}}$ для δ, $\beta > 1$ сходятся, ряды (14) — (22) являются сходящимися. Следовательно, условия теоремы [3] выполнены. Теорема доказана.

В заключение выражаю искреннюю благодарность А. В. Скороходу за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И. И., Скороход А. В. О плотностях вероятностных мер в функциональных пространствах.— УМН, 21, 6, 1966.

2. Майданюк Р. Я., Абсолютная непрерывность мер, соответствующих рядам из независимых случайных величин, при простейших преобразованиях пространства.— Теория вероятностей и математическая статистика, вып. 1, 1970.

3. Майданюк Р. Я. Абсолютная непрерывность мер, соответствующих рядам из независимых устойчивых случайных величин, при линейных преобразованиях пространства.— УМЖ, 1, 1970.

R. Ya. Maydanyuk

ON DENSITIES OF MEASURES CORRESPONDING TO SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RANDOM RIGHT PARTS

Summary

The problem of absolute continuity of measures corresponding to solutions of differential equations is considered.

Поступила в редколлегию 18.I.1971.