Г. Н. САКОВИЧ, ст. научн. сотр.
Институт математики АН УССР

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ ВОГНУТЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ *)

Ниже дано шесть теорем о распределениях вероятностей, вогнутых в том или в другом смысле **). Две из них утверждают, что характеристическая функция вогнутого распределения может иметь корень только в исключительном случае (который точно описан). Остальные теоремы дают необходимые и достаточные условия вогнутости распределения, выраженные через его характеристическую функцию.

1. *Определение 1.* Непрерывное распределение вероятностей называется вогнутым, если его плотность $p(x)$ является вогнутой функцией на полупрямых $-\infty < x < a$ и $a < x < +\infty$.

Замечание 1. Может случиться, что $p(a-0) = +\infty$ или $p(a+0) = +\infty$. Не умаляя общности, будем считать $a = 0$.

Теорема 1. Пусть распределение вероятностей $\mathfrak{F}(x)$ с конечными первым и вторым моментами $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{D}$ имеет характеристическую функцию $f(t)$. Тогда

$$\mathfrak{f}(t) = \frac{2(1 + it\mathfrak{m} - f(t))}{\mathfrak{D}t^2} \tag{1}$$

есть характеристическая функция некоторого непрерывного вогнутого распределения вероятностей.

Доказательство. $2(it)^{-2}(e^{it} - 1 - it)$ есть характеристическая функция случайной величины, распределенной на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ с плотностью $2(1-x)$; $2(-it)^{-2}(e^{-it} - 1 + it)$ —

*) Дополненный доклад на VII Всесоюзном совещании по теории вероятностей и математической статистике (Тбилиси, 1963) [1].

**) Кривая, обращенная своей выпуклостью в сторону оси абсцисс, чаще именуется «выпуклой», чем «вогнутой» (хотя при таком определении криволинейная трапеция, ограниченная этой кривой, ее проекцией на ось абсцисс и крайними ординатами не будет выпуклой областью). Однако мы остановились на термине «вогнутая», который гораздо лучше согласуется с наличием вершины в точке a. Кроме того, термин «выпуклая» был бы неуместен во многомерном случае (п. 3).

Заметим, что Жиро [3] называет выпуклым распределение, характеристическая функция которого четна и вогнута (в его терминологии — выпукла) на полуоси. Наше определение более наглядно и естественно выделяет подкласс одновершинных по Хинчину распределений.

характеристическая функция величины, распределенной на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 0$ с плотностью $2(1+x)$. Функция $f(t)$ есть «смесь» таких характеристических функций:

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{2(e^{itx}-1-itx)}{(itx)^2} \frac{x^2}{\mathfrak{D}} d\mathfrak{F}(x) +$$

$$+ \int_0^\infty \left(\frac{2(e^{-itx}-1+itx)}{(-itx)^2} \frac{x^2}{\mathfrak{D}} \right) d[1-\mathfrak{F}(-x)]$$

$$\left(\int_0^\infty \frac{x^2}{\mathfrak{D}} d\mathfrak{F}(x) + \int_0^\infty \frac{x^2}{\mathfrak{D}} d[1-\mathfrak{F}(-x)] = 1 \right).$$

Смесь же указанных плотностей вогнута на полуосях.

Легко выразить плотность указанного распределения:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\mathfrak{D}} \displaystyle\int_0^\infty y\, d\mathfrak{F}(x+y) \text{ при } x > 0 \\ \dfrac{2}{\mathfrak{D}} \displaystyle\int_{-\infty}^0 (-y)\, d\mathfrak{F}(x+y) \text{ при } x < 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Замечание 2. Заключение теоремы 1 справедливо и для функции

$$f(t) = \frac{2}{t^2} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + itx - e^{itx})\, \mu(dx), \tag{3}$$

где μ — мера, для которой $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mu(dx) = 1$, но не обязательно $\int_{-\infty}^{\infty} \mu(dx) < \infty$.

Теорема 2 (обратная). Если $p(x)$ — плотность вогнутого распределения вероятностей, то его характеристическая функция допускает представление (3). Она допускает представление (1) в том и только в том случае, если график плотности не имеет вертикальных касательных (к касательным причисляются и асимптоты). В этом случае, если наклоны касательных в вершине $p'_-(0)$ и $p'_+(0)$, то

$$p(\pm 0) < \infty, \quad \mathfrak{D} \leqslant 2/(p'_-(0) - p'_+(0))$$

и скачок распределения $\mathfrak{F}(x)$ в нуле равен

$$1 - 0{,}5\mathfrak{D}(p'_-(0) - p'_+(0)).$$

Доказательство. У вогнутой функции $p(x)$ всюду на полуосях $-\infty < x < 0$ и $0 < x < \infty$ существуют конечные левая и правая производные $p'_-(x)$ и $p'_+(x)$, которые почти всюду равны

([2], стр. 114). Кроме того, существуют $p'_-(0) \leqslant +\infty$ и $p'_+(0) \geqslant -\infty$, причем $p'_-(0) = \lim\limits_{x\to-0} p'_+(x)$, $p'_+(0) = \lim\limits_{x\to+0} p'_-(x)$. Производные не убывают на полуосях: при $-\infty < x < y < 0$

$$p'_-(x) \leqslant p'_+(x) \leqslant p'_-(y) \leqslant p'_+(y) \leqslant p'_-(0),$$

при $0 < x < y < \infty$

$$p'_+(0) \leqslant p'_-(x) \leqslant p'_+(x) \leqslant p'_-(y) \leqslant p'_+(y).$$

Положим при $x \geqslant 0$ $p_1(x) = p'_-(x)$, $p_2(x) = -p'_+(x)$. Когда $x \to \infty$, функции $p(x)$, $p(-x)$, $p_1(x)$ и $p_2(x)$ стремятся к нулю, так как сходятся интегралы $\int\limits^{\infty} p(x)\,dx$, $\int\limits^{\infty} p(-x)\,dx$, $\int\limits^{\infty} p_1(x)\,dx$, $\int\limits^{\infty} p_2(x)\,dx$. Поэтому функции $p_1(x)$ и $p_2(x)$ неположительны, не убывают и стремятся к нулю на бесконечности.

Воспользуемся оценками, доказываемыми ниже:

$$\begin{gathered}\lim_{x\to+0} xp(\pm x) = 0, \quad \lim_{x\to+0} x^2 p_{1,2}(x) = 0,\\ \lim_{x\to+\infty} xp(\pm x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} x^2 p_{1,2}(x) = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Так как

$$\int\limits_0^{\infty} x^2 dp_1(x) + \int\limits_0^{\infty} x^2 dp_2(x) =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} (x^2 p_1(x) - 2xp(x) + x^2 p_2(x) - 2xp(-x)) + 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 2,$$

то существует и может быть вычислена двукратным интегрированием по частям с учетом (4) сумма

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{1 + itx - e^{itx}}{t^2}\,dp_1(x) + \int\limits_0^{\infty} \frac{1 - itx - e^{-itx}}{t}\,dp_2(x) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x)\,dx = f(t).$$

Мы получили представление (3); в представлении (1) было бы

$$\mathfrak{F}(x) = \begin{cases} 0{,}5\mathfrak{D}p'_-(x) & \text{при } x < 0,\\ 1 + 0{,}5\mathfrak{D}p'_+(x) & \text{при } x > 0,\end{cases} \tag{5}$$

$$\mathfrak{m} = 0{,}5\mathfrak{D}\,(p(+0) - p(-0)).$$

Доказательство всех оценок (4) проводится по единому плану. Если, например, $x^2 p_1(x)$ не стремится к нулю при $x \to +0$, то существует последовательность $x_n > x_{n+1} \to 0$, на которой

$-p_1(x_n) \geqslant a x_n^{-2}$, $a > 0$ — константа. Для каждого x, $0 < x \leqslant x_1$, выберем n из условия $x_{n+1} < x \leqslant x_n$. Так как вогнутая кривая лежит над касательной, то

$$p(x) - p(x_n) \geqslant -p_1(x_n)(x_n - x) \geqslant 0,$$

$$1 \geqslant \int_0^{x_1} p(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_{n+1}}^{x_n} p(x)\,dx \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left((x_n - x_{n+1})\, p(x_n) + \right.$$

$$\left. + \frac{(x_n - x_{n+1})^2}{2} \frac{a}{x_n^2} \right).$$

Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^2$ сходится, а значит, $1 - \frac{x_{n+1}}{x_n} \to 0$; поэтому существует такая константа $k > 0$, что при всех n $x_{n+1} > k x_n$. В таком случае $-p_1(x) > a k^2 x^{-2}$ вопреки сходимости интеграла $\int_0 p(x)\,dx$.

Теорема 3. Если t_0 — корень характеристической функции непрерывного вогнутого распределения, то график плотности его — ломаная линия, абсциссы вершин которой кратны $2\pi/t_0$.

Это очевидное следствие формулы

$$\operatorname{Re} f(t) = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos tx}{t^2}\, dp_1(x) + \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos tx}{t^2}\, dp_2(x) \geqslant 0. \qquad (6)$$

Замечание 3. В случае симметричности распределения выражение (6) является другой формулировкой предложения, восходящего к Пойа [4] (ср. Жиро [3]): «четная функция, вогнутая на полуоси, ограниченная на бесконечности, непрерывная вблизи нуля и равная 1 в нуле, есть характерическая функция»,— плотность и характеристическая функция меняются местами.

2. Аналогичные теоремы верны в более простом случае распределения на решетке целых чисел.

Определение 2. Распределение вероятностей $\{p_n\}$ в целых точках называется вогнутым, если вогнуты последовательности $\{p_n\}$ при $-\infty < n \leqslant a$ и при $a \leqslant n < \infty$ (далее $a = 0$).

Теорема 4. Пусть распределение вероятностей в целых точках $\{\mathfrak{p}_n\}$ с конечными первым и вторым моментами $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{D}$ имеет характеристическую функцию $f(t)$. Тогда

$$f(t) = \frac{1 + i\mathfrak{m} \sin t - \mathfrak{f}(t)}{\mathfrak{D}(1 - \cos t)} \qquad (7)$$

есть характеристическая функция некоторого вогнутого распределения вероятностей в целых точках.

Действительно, эти вероятности равны

$$p_0 = \frac{1}{\mathfrak{D}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| \mathfrak{p}_k,$$

$$p_n = \frac{2}{\mathfrak{D}} \sum_{k=0}^{\infty} k \mathfrak{p}_{n+k} \text{ при } n > 0, \tag{8}$$

$$p_n = \frac{2}{\mathfrak{D}} \sum_{k=-\infty}^{0} (-k) \mathfrak{p}_{n+k} \text{ при } n < 0.$$

Теорема 5 (обратная). Если $\{p_n\}$ — вогнутое распределение вероятностей в целых точках, то его характеристическая функция $f(t)$ допускает представление (7).

Доказательство. Для этого распределения вероятности

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_0 &= 0{,}5\mathfrak{D}(p_{-1} - 2p_0 + p_1) + 1, \\ \mathfrak{p}_1 &= 0{,}5\mathfrak{D}(p_0 - 2p_1 + p_2) + 0{,}5\mathfrak{m}, \\ \mathfrak{p}_{-1} &= 0{,}5\mathfrak{D}(p_{-2} - 2p_{-1} + p_0) - 0{,}5\mathfrak{m}, \\ \mathfrak{p}_n &= 0{,}5\mathfrak{D}(p_{n-1} - 2p_n + p_{n+1}) \text{ при } |n| \geqslant 2. \end{aligned} \tag{9}$$

При надлежащем выборе $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{m}$ все $\mathfrak{p}$ заключены между 0 и 1. Поскольку $2p_0 - p_{-1} - p_1 > 0$, то можно выбрать $\mathfrak{D}$ так, чтобы $0 < \mathfrak{D} \leqslant 2/(2p_0 - p_{-1} - p_1)$. Тогда (скажем, для $n > 0$) $p_{n-1} - 2p_n + p_{n+1} \leqslant p_{n-1} - p_n \leqslant p_{n-2} - p_{n-1} \leqslant \dots \leqslant p_0 - p_1 < 2p_0 - p_1 - p_{-1}$, так что для всех $n \neq 0$ $0 \leqslant \mathfrak{D}(p_{n-1} - 2p_n + p_{n+1}) < 2$, и остается выбрать достаточно малое $\mathfrak{m}$ (хотя бы $\mathfrak{m} = 0$). Очевидно, будет

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathfrak{p}_k = 1, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\mathfrak{p}_k = \mathfrak{m}, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2\mathfrak{p}_k = \mathfrak{D}.$$

Теорема 6. Если t_0 — корень характеристической функции вогнутого распределения вероятностей в целых точках, то абсциссы вершин последовательности $\{p_n\}$ (т. е. те n, для которых $p_{n-1} - 2p_n + p_{n+1} \neq 0$) кратны $2\pi/t_0$.

3. Изложенное обобщается на многомерные непрерывные вогнутые распределения. В определении требуется вогнутость плотности на любой полупрямой, исходящей из начала координат (вершины). Тогда в формуле (1) $\mathfrak{m}$ обозначает вектор математического ожидания, произведения tx и $t\mathfrak{m}$ — скалярные (причем $t\mathfrak{m} = \int tx d\mathfrak{F}(x)$), а в знаменателе вместо $\mathfrak{D}t^2$ стоит $\int (tx)^2 d\mathfrak{F}(x)$.

Для обобщения теоремы 3 рассмотрим в $(n+1)$-мерном пространстве (x, y) семейство вертикальных плоскостей P_k $(k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$, ортогональных вектору $(t_0, 0)$ и отстоящих от начала координат на расстояния $2k\pi/|t_0|$ (аналог решетки). В этом случае сечение поверхности $y = p(x)$ плоскостью, проходящей через ось Oy в любом направлении, между любыми двумя соседними плоскостями P_k и P_{k+1} есть прямолинейный отрезок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сакович Г. Н. О характеристических функциях выпуклых распределений.— В сб.: VII Всесоюзное совещание по теории вероятностей и математической статистике. Некоторые вопросы теории вероятностей. Тбилиси, 1963.

2. Харди Г., Литтльвуд Дж., Полиа Г. Неравенства. ИЛ, М., 1949.

3. Girault M. Les fonctions caractéristiques et leurs transformations. Thèses Sc. Doct. Univ. Paris, 1955.

4. Pólya G. Remarks on characteristic functions.— Proc. 1st Berkeley Sympos. Probab. Math. Stat., 1949, 115—123.

G. N. Sakovich

ON CHARACTERISTIC FUNCTIONS OF CONCAVE DISTRIBUTIONS

Summary

The probability distributions concave in one or other sense are considered The characteristic function of a concave distribution is established to vanish only in exclusive (precisely described) case; the necessary and sufficient conditions for the concavity of a distribution in terms of its characteristic function are given.

Поступила в редколлегию 16.X.1970.