Д. С. СИЛЬВЕСТРОВ, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

О СХОДИМОСТИ СЛАБОЗАВИСИМЫХ ПРОЦЕССОВ В РАВНОМЕРНОЙ ТОПОЛОГИИ. I

Результаты, полученные в работе, в частном случае сходимости к винеровскому процессу аналогичны приведенным в работе А. А. Боровкова [1].

1. Будем предполагать, что все встречающиеся ниже случайные процессы не имеют разрывов второго рода и непрерывны справа с вероятностью 1.

Пусть для каждого $\varepsilon > 0$: $\xi_\varepsilon(t)$, $t \geqslant 0$ — случайный процесс, $\varkappa_\varepsilon(k)$, $k = 1, 2, \ldots$ — последовательность неотрицательных с вероятностью 1 случайных величин и

$$\tau_\varepsilon(k) = \sum_{r=1}^{k} \varkappa_\varepsilon(r)^{*)},\ k = 0, 1, \ldots, \varkappa_\varepsilon(0) = 0,$$

$$\gamma_\varepsilon(k) = \xi_\varepsilon(\tau_\varepsilon(k)) - \xi_\varepsilon(\tau_\varepsilon(k-1)),\ k \geqslant 1,\ \gamma_\varepsilon(0) = \xi_\varepsilon(0),$$

$$\pi_\varepsilon(k) = \sup_{t \in [\tau_\varepsilon(k-1),\ \tau_\varepsilon(k))} |\xi_\varepsilon(t) - \xi_\varepsilon(\tau_\varepsilon(k-1))|,\ k \geqslant 1$$

T_ε, $v(\varepsilon)$, $u(\varepsilon)$ — неслучайные неотрицательные функции такие, что

$$T_\varepsilon,\ v(\varepsilon),\ u(\varepsilon) \to \infty \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Пусть также D_T — пространство функций на $[0, T]$ без разрывов второго рода непрерывных справа и для каждой функции $x(t) \in \in D_T$

$$\Delta_c(x(t), T) = \sup_{|s'-s''| \leqslant c,\ s',\ s'' \in [0, T]} |x(s') - x(s'')|.$$

Через $R_{\zeta(s), T}$ будем обозначать пространство измеримых функционалов на D_T непрерывных в равномерной топологии почти всюду по мере, соответствующей случайному процессу $\zeta(s)$, $s \in [0, T]$.

---

*) Здесь и ниже $\sum_{r=1}^{0} = 0$.

Теорема 1. Если выполняется условие

$$(A_1):\ 1)\ \sum_{k=0}^{[tv(\varepsilon)]}\left(\frac{\varkappa_\varepsilon(k)}{T_\varepsilon},\ \frac{\gamma_\varepsilon(k)}{u(\varepsilon)}\right),\ t\geqslant 0 \overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}(\varkappa(t),\ \gamma(t)),\ t\geqslant 0 \text{ при } \varepsilon\to 0\,^{*)},$$

где предельный случайный процесс $(\varkappa(t),\ \gamma(t)),\ t\geqslant 0$ удовлетворяет условиям:

а) процесс $\gamma(t),\ t\geqslant 0$ непрерывен с вероятностью 1,

б) $P\{\varkappa(t)\leqslant s\}\to 0$ при $t\to\infty,\ s\geqslant 0$ и случайный процесс

$$\nu(t)=\sup(s:\varkappa(s)\leqslant t),\ t\geqslant 0$$

непрерывен с вероятностью 1 (для чего необходимо и достаточно чтобы случайный процесс $\varkappa(t),\ t\geqslant 0$ был строго монотонно возрастающим с вероятностью 1);

$$2)\ \lim_{c\to 0}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,P\left\{\Delta_c\left(\sum_{k=0}^{[tv(\varepsilon)]}\frac{\gamma_\varepsilon(k)}{u(\varepsilon)},\ T\right)\geqslant\delta\right\}=0,\ T,\ \delta>0;$$

$$3)\ \sum_{k=1}^{[tv(\varepsilon)]}P\left\{\frac{\pi_\varepsilon(k)}{u(\varepsilon)}\geqslant\delta\right\}\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0,\ t,\ \delta>0,$$

то для любого функционала $f(\cdot)\in R_{\gamma(\nu(s)),T},\ T>0$

$$f\left(\frac{\xi_\varepsilon(sT_\varepsilon)}{u(\varepsilon)}\right)\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}f(\gamma(\nu(s))) \text{ при } \varepsilon\to 0$$

и, в частности,

$$\frac{\xi_\varepsilon(sT_\varepsilon)}{u(\varepsilon)},\ s\in[0,\ T]\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}\gamma(\nu(s)),\ s\in[0,\ T] \text{ при } \varepsilon>0.$$

С точки зрения приложений, интересен следующий частный вариант теоремы 1.

Теорема 2. Если выполняется условие

$$(A_2):\ 1)\ \sum_{k=1}^{[tv(\varepsilon)]}\frac{\varkappa_\varepsilon(k)}{T_\varepsilon}\overset{P}{\longrightarrow}\varkappa(t) \text{ при } \varepsilon\to 0^{**)},\ t\geqslant 0,$$

где $\varkappa(t),\ t\geqslant 0$ — строго монотонно возрастающая неслучайная функция такая, что $\varkappa(t)\to\infty$ при $t\to\infty$ (пусть $\nu(t)=\sup(s:\varkappa(s)\leqslant t),\ t\geqslant 0$);

$$2)\ \sum_{k=0}^{[tv(\varepsilon)]}\frac{\gamma_\varepsilon(k)}{u(\varepsilon)},\ t\geqslant 0\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}\gamma(t),\ t\geqslant 0 \text{ при } \varepsilon\to 0,$$

---

*) Символ $\xi_\varepsilon(s),\ s\in S\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}\xi_{\varepsilon'}(s),\ s\in S$ при $\varepsilon\to\varepsilon'$ означает слабую сходимость (в точках непрерывности) всех конечномерных распределений случайных процессов $\xi_\varepsilon(s),\ s\in S$ и $\xi_{\varepsilon'}(s),\ s\in S$ при $\varepsilon\to\varepsilon'$. Аналогично будем обозначать слабую сходимость случайных векторов.

**) Символ $\xi_\varepsilon\overset{P}{\to}\xi_{\varepsilon'}$ при $\varepsilon\to\varepsilon'$ означает сходимость по вероятности случайных векторов ξ_ε и $\xi_{\varepsilon'}$ при $\varepsilon\to\varepsilon'$.

где $\gamma(t)$, $t \geqslant 0$ — непрерывный с вероятностью 1 случайный процесс;

$$3)\ \lim_{c\to 0}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} P\left\{\Delta_c\left(\sum_{k=0}^{[tv(\varepsilon)]}\frac{\gamma_\varepsilon(k)}{u(\varepsilon)}, T\right)\geqslant\delta\right\}=0,\ T,\delta>0;$$

$$4)\ \sum_{k=1}^{[tv(\varepsilon)]} P\left\{\frac{\pi_\varepsilon(k)}{u(\varepsilon)}\geqslant\delta\right\}\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0,\ t,\delta>0,$$

то для любого функционала $f(\cdot)\in R_{\gamma(\nu(s)),T}$, $T>0$

$$f\left(\frac{\xi_\varepsilon(sT_\varepsilon)}{u(\varepsilon)}\right)\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow} f(\gamma(\nu(s))) \text{ при } \varepsilon\to 0$$

и, в частности,

$$\frac{\xi_\varepsilon(sT_\varepsilon)}{u(\varepsilon)},\ s\in[0,T]\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}\gamma(\nu(s)),\ s\in[0,T] \text{ при } \varepsilon\to 0.$$

Замечание 1. В работе [2] приведен ряд условий, достаточных для того, чтобы выполнялось соотношение

$$\sum_{k=1}^{[tv(\varepsilon)]}\frac{\varkappa_\varepsilon(k)}{T_\varepsilon}\xrightarrow{P}\varkappa t \text{ при } \varepsilon\to 0,\ t\geqslant 0,$$

где $\varkappa=\text{const}>0$ с вероятностью 1.

В частности, для этого достаточно, чтобы выполнялось условие

$$(B_1):\ 1)\ \left|M\left(\frac{\varkappa_\varepsilon(k)\,v(\varepsilon)}{T_\varepsilon}-\varkappa/\varkappa_\varepsilon(r),\ r=\overline{1,k-1}\right)\right|\leqslant\alpha'_k,\ k\geqslant 1,$$

$$2)\ M\left(\left|\frac{\varkappa_\varepsilon(k)\,v(\varepsilon)}{T_\varepsilon}\right|^{1+\beta}/\varkappa_\varepsilon(r),\ r=\overline{1,k-1}\right)\leqslant\alpha''_k,\ k\geqslant 1,$$

$$3\ \sum_{k=1}^{[tv(\varepsilon)]}\frac{\alpha'_k}{v(\varepsilon)}\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0,\ t\geqslant 0,$$

$$4)\ \sum_{k=1}^{[tv(\varepsilon)]}\frac{\alpha''_k}{v(\varepsilon)^{1+\beta}}\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0,\ t\geqslant 0,$$

где $\beta=\text{const}>0$.

Замечание 2. В [1] показано, что для того чтобы выполнялись условия (A_2), 2) и 3) достаточно, чтобы выполнялось условие

$$(B_2):\ 1)\ \left|M\left(\frac{\gamma_\varepsilon(k)\sqrt{v(\varepsilon)}}{u(\varepsilon)}/\gamma_\varepsilon(r),\ r=\overline{1,k-1}\right)\right|\leqslant\beta'_k,\ k\geqslant 0,$$

$$2)\ \left|M\left(\frac{\gamma_\varepsilon(k)^2\,v(\varepsilon)}{u(\varepsilon)^2}-\gamma/\gamma_\varepsilon(r),\ r=\overline{1,k-r}\right)\right|\leqslant\beta''_k,\ k\geqslant 0,$$

$$3)\ M\left(\left|\frac{\gamma_\varepsilon(k)\sqrt{v(\varepsilon)}}{u(\varepsilon)}\right|^{2+\delta}/\gamma_\varepsilon(r),\ r=\overline{1,k-1}\right)\leqslant\beta'''_k,\ k\geqslant 0,$$

$$4)\ \sum_{k=0}^{[tv(\varepsilon)]} \frac{\beta_k'}{\sqrt{v(\varepsilon)}} \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0,\ t \geqslant 0,$$

$$5)\ \sum_{k=0}^{[tv(\varepsilon)]} \frac{\beta_k''}{v(\varepsilon)} \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0,\ t \geqslant 0,$$

$$6)\ \sum_{k=0}^{[tv(\varepsilon)]} \frac{\beta_k'''}{v(\varepsilon)^{1+\frac{\delta}{2}}} \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0,\ t \geqslant 0,$$

где $\delta = \mathrm{const} > 0$.

При этом $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,\gamma(t),\ t \geqslant 0$ — винеровский процесс.

Замечание 3. Нетрудно видеть, что для выполнения условия (A_2), 4) достаточно, например, чтобы выполнялось условие

$$(B_3):\ M\left|\frac{\pi_\varepsilon(k)\sqrt{v(\varepsilon)}}{u(\varepsilon)}\right|^{2+\beta'} \leqslant \pi = \mathrm{const} < \infty,\ k \geqslant 1,$$

где $\beta' = \mathrm{const} > 0$.

Замечание 4. Если в теореме 2 вместо условия (A_2) потребовать выполнения условий (B_i), $i = \overline{1, 3}$, то полученное утверждение аналогично теореме 1 [1].

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется следующее простое вспомогательное утверждение, представляющее, как нам кажется, некоторый самостоятельный интерес.

Лемма 1. Пусть для каждого $\varepsilon \geqslant 0$: $\xi_\varepsilon(t),\ t \geqslant 0$ и $\nu_\varepsilon(t),\ t \geqslant 0$ — случайные процессы, причем $\nu_\varepsilon(t) \geqslant 0,\ t \geqslant 0$ с вероятностью 1. Тогда, если выполняется условие

$$(C_1):\ 1)\ (\xi_\varepsilon(t), \nu_\varepsilon(t)),\ t \geqslant 0 \overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow} (\xi_0(t), \nu_0(t)),\ t \geqslant 0 \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

где $(\xi_0(t), \nu_0(t))$, $t \geqslant 0$ — непрерывный с вероятностью 1 случайный процесс;

$$2)\ \lim_{c\to 0}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} P\{\Delta_c(\xi_\varepsilon(t), T') \geqslant \delta\} = 0,\ T',\ \delta > 0;$$

$$3)\ \lim_{c\to 0}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} P\{\Delta_c(\nu_\varepsilon(t), T) \geqslant \delta\} = 0,\ \delta > 0,$$

то:

$$\text{а)}\ \xi_\varepsilon(\nu_\varepsilon(s)),\ s \in [0, T] \overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow} \xi_0(\nu_0(s)),\ s \in [0, T] \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

$$\text{б)}\ \lim_{c\to 0}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} P\{\Delta_c(\xi_\varepsilon(\nu_\varepsilon(t)), T) \geqslant \delta\} = 0,\ \delta > 0,$$

и, следовательно (см. лемму 2), для любого функционала $f(\cdot) \in R_{\xi_0(\nu_0(s)),\,T}$,

$$f(\xi_\varepsilon(\nu_\varepsilon(s))) \overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow} f(\xi_0(\nu_0(s))) \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Сформулируем теперь «многомерный» аналог теоремы 1. Пусть для каждого $\varepsilon > 0$ и $i = \overline{1, m}$: $\xi_{\varepsilon,i}(t)$, $t \geqslant 0$ — случайные процессы, $\varkappa_{\varepsilon,i}(k)$, $k \geqslant 1$ — последовательности неотрицательных с вероятностью 1 случайных величин и

$$\tau_{\varepsilon,i}(k) = \sum_{r=1}^{k} \varkappa_{\varepsilon,i}(r),\ k \geqslant 0,\ \varkappa_{\varepsilon,i}(0) = 0,\ \ \gamma_{\varepsilon,i}(0) = \xi_{\varepsilon,i}(0),$$

$$\gamma_{\varepsilon,i}(k) = \xi_{\varepsilon,i}(\tau_{\varepsilon,i}(k)) - \xi_{\varepsilon,i}(\tau_{\varepsilon,i}(k-1)),\ \ k \geqslant 1,$$

$$\pi_{\varepsilon,i}(k) = \sup_{t \in [\tau_{\varepsilon,i}(k-1), \tau_{\varepsilon,i}(k))} |\xi_{\varepsilon,i}(t) - \xi_{\varepsilon,i}(\tau_{\varepsilon,i}(k-1))|,\ \ k \geqslant 1$$

$T_{\varepsilon,i}$, $v_i(\varepsilon)$, $u_i(\varepsilon)$ — неслучайные неотрицательные функции такие, что

$$T_{\varepsilon,i},\ v_i(\varepsilon),\ u_i(\varepsilon) \to \infty \ \text{при}\ \varepsilon \to 0.$$

Теорема 3. Если выполняется условие

$$(A_3):\ 1) \left(\sum_{k=0}^{[tv_i(\varepsilon)]} \left(\frac{\varkappa_{\varepsilon,i}(k)}{T_{\varepsilon,i}},\ \frac{\gamma_{\varepsilon,i}(k)}{u_i(\varepsilon)} \right), i = \overline{1, m} \right),\ t \geqslant 0 \overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow} ((\varkappa_i(t), \gamma_i(t)), i = \overline{1, m}),\ t \geqslant 0 \ \text{при}\ \ \varepsilon \to 0,$$

где: а) $\gamma_i(t)$, $t \geqslant 0$ — непрерывный с вероятностью 1 случайный процесс для каждого $i = \overline{1, m}$,

б) $P\{\varkappa_i(t) \leqslant s\} \to 0$ при $t \to \infty$ и случайный процесс $\nu_i(t) = \sup(s : \varkappa_i(s) \leqslant t)$, $t \geqslant 0$ непрерывен с вероятностью 1 (для чего необходимо и достаточно, чтобы случайный процесс $\varkappa_i(t)$, $t \geqslant 0$ был строго монотонно возрастающим с вероятностью 1) для каждого $i = \overline{1, m}$;

$$2)\ \lim_{c \to 0} \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} P \left\{ \Delta_c \left(\sum_{k=0}^{[tv_i(\varepsilon)]} \frac{\gamma_{\varepsilon,i}(k)}{u_i(\varepsilon)}, T \right) \geqslant \delta \right\} = 0,$$

$$T, \delta > 0, i = \overline{1, m};$$

$$3)\ \sum_{k=1}^{[tv_i(\varepsilon)]} P \left\{ \frac{\pi_i(k)}{u_i(\varepsilon)} \geqslant \delta \right\} \to 0 \ \text{при}\ \varepsilon \to 0,$$

$$\delta, t > 0, i = \overline{1, m},$$

то

$$\left(\frac{\xi_{\varepsilon,i}(sT_{\varepsilon,i})}{u_i(\varepsilon)}, i = \overline{1, m} \right),\ \ \ s \geqslant 0 \overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow} \xi(s) = (\gamma_i(\nu_i(s)), i = \overline{1, m}),\ \ \ s \geqslant 0 \ \text{при}\ \varepsilon \to 0$$

и для любого функционала $f(\cdot) \in R_{\xi(s),T}$, $T > 0$

$$f\left(\left(\frac{\xi_{\varepsilon,i}(sT_\varepsilon)}{u_i(\varepsilon)}, i = \overline{1, m} \right) \right) \overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow} f(\xi(s)) \ \text{при}\ \varepsilon \to 0.$$

2. Для доказательств нам потребуется следующий результат А. В. Скорохода [3].

Лемма 2. Для случайных процессов $\zeta_\varepsilon(s)$, $s \in [0, T]$, $(\varepsilon \geqslant 0)$, принимающих значения в R_m, следующие два условия эквивалентны:

$$(D_1)\text{: } 1)\ \zeta_\varepsilon(t),\ t \in [0, T] \xrightarrow{\text{сл.}} \zeta_0(t),\ t \in [0, T] \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

где $\zeta_0(t)$, $t \in [0, T]$ — непрерывный с вероятностью 1 случайный процесс;

$$2)\ \lim_{c\to 0} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} P\{\Delta_c(\zeta_\varepsilon(t), T) \geqslant \delta\} = 0,\ \delta > 0;$$

(D_2): 1) можно построить случайные процессы $\tilde{\zeta}_\varepsilon(t)$, $t \in [0, T]$ $(\varepsilon \geqslant 0)$, все конечномерные распределения которых для каждого $\varepsilon \geqslant 0$ совпадают с соответствующими конечномерными распределениями случайного процесса $\zeta_\varepsilon(t)$, $t \in [0, T]$ и

$$\rho_\varepsilon = \sup_{s\in[0,T]} |\tilde{\zeta}_\varepsilon(s) - \zeta_0(s)| \xrightarrow{P.} 0 \text{ при } \varepsilon \to 0;$$

2) случайный процесс $\tilde{\zeta}_0(t)$, $t \in [0, T]$ непрерывен с вероятностью 1.

Из этой леммы, очевидно, следует, что при выполнении условия (D_1) или (D_2) для любого функционала $f(\cdot) \in R_{\zeta_0(s),T}$

$$f(\zeta_\varepsilon(s)) \xrightarrow{\text{сл.}} f(\zeta_0(s)) \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Доказательство леммы 1. В силу леммы 2 (заметим, что $\Delta_c((\xi_\varepsilon(t), \nu_\varepsilon(t)), T) \leqslant \Delta_c(\xi_\varepsilon(t), T) + \Delta_c(\nu_\varepsilon(t), T)$ можно считать, что вместо (C_1) выполняется условие

$$(C_1')\text{: } 1)\ \sup_{s\in[0,T]} |\xi_\varepsilon(s) - \xi_0(s)| \xrightarrow{P.} 0 \text{ при } \varepsilon \to 0,\ T' \geqslant 0,$$

$$2)\ \sup_{s\in[0,T]} |\nu_\varepsilon(s) - \nu_0(s)| \xrightarrow{P.} 0 \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

3) случайный процесс $(\xi_0(t), \nu_0(t))$, $t \geqslant 0$ непрерывен с вероятностью 1.

Поэтому достаточно показать, что

$$\rho_\varepsilon = \sup_{s\in[0,T']} |\xi_\varepsilon(\nu_\varepsilon(s)) - \xi_0(\nu_0(s))| \xrightarrow{P.} 0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Но для $T' \geqslant c$

$$P\{\rho_\varepsilon \geqslant \delta\} \leqslant P\left\{\sup_{s\in[0,T]} |\xi_\varepsilon(\nu_\varepsilon(s)) - \xi_0(\nu_\varepsilon(s))| \geqslant \frac{\delta}{2}\right\} +$$

$$+ P\left\{\sup_{s\in[0,T]} |\xi_0(\nu_0(s)) - \xi_0(\nu_\varepsilon(s))| \geqslant \frac{\delta}{2}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\sup_{s\in[0,T']} |\xi_\varepsilon(s) - \xi_0(s)| \geqslant \frac{\delta}{2}\right\} +$$

$$+ P\left\{\sup_{s\in[0,T'],\,|s-s'|\leqslant c} |\xi_0(s) - \xi_0(s')| \geqslant \frac{\delta}{2}\right\} +$$

$$+P\{\sup_{s\in[0,T]}\nu_\varepsilon(s)>T'\}+P\{\sup_{s\in[0,T]}\nu_0(s)>T'\}+$$
$$+P\{\sup_{s\in[0,T]}|\nu_\varepsilon(s)-\nu_0(s)|>c\}\leqslant 2P\{\sup_{s\in[0,T]}\nu_0(s)>T'\}+$$
$$+P\left\{\sup_{s\in[0,T'],|s-s'|\leqslant c}|\xi_0(s)-\xi_0(s')|\geqslant\frac{\delta}{2}\right\}+$$
$$+2P\{\sup_{s\in[0,T]}|\nu_0(s)-\nu_\varepsilon(s)|>c\}+\left\{P\sup_{s\in[0,T']}|\xi_0(s)-\xi_\varepsilon(s)|\geqslant\frac{\delta}{2}\right\}.$$

Для любого $\sigma>0$ первое слагаемое справа в силу условия (C_1'), 3) выбором достаточно большого T' можно сделать меньше $\frac{\sigma}{4}$. Затем выбором достаточно малого c можно в силу условия (C_1'), 3) добиться того же для второго слагаемого. Наконец, при фиксированных T' и c в силу условий (C_1'), 1 и 2) для всех достаточно малых ε сумма двух последних слагаемых меньше $\frac{\sigma}{2}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть

$$\nu_\varepsilon(t)=\min([v(\varepsilon)\alpha(\varepsilon)]+1,\ \max(n:\ \tau_\varepsilon(n)\leqslant t)),\quad t\geqslant 0,$$

где $\alpha(\varepsilon)$ — неслучайная неотрицательная функция, $\alpha(\varepsilon)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$.

Очевидно,

$$P\left\{\nu_\varepsilon(t_k)>u_k,\ \sum_{n=0}^{[s_k]}\gamma_\varepsilon(k)<v_k,\ k=\overline{1,r}\right\}=$$
$$=\chi_{(u_k,\infty)}([v(\varepsilon)\alpha(\varepsilon)]+1)\,P\left\{\sum_{n=0}^{[u_k]+1}\varkappa_\varepsilon(n)\leqslant t_k,\ \sum_{n=0}^{[s_k]}\gamma_\varepsilon(n)<v_k,\ k=\overline{1,r}\right\},$$
$$u_k,t_k,s_k\geqslant 0,\ v_k\in(-\infty,\infty),\ k=\overline{1,r},\quad r\geqslant 1,$$

откуда в силу условия (A_1), 1) следует, что

$$\left(\frac{\nu_\varepsilon(tT_\varepsilon)}{v(\varepsilon)},\ \sum_{k=1}^{[tv(\varepsilon)]}\frac{\gamma_\varepsilon(k)}{u(\varepsilon)}\right),\ t\geqslant 0\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}(\nu(t),\gamma(t)),\ t\geqslant 0\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0.\quad(1)$$

Лемма 3. Если для случайных процессов $\nu_\varepsilon(t)$, $t\geqslant 0$ $(\varepsilon\geqslant 0)$ выполняется условие

(E_1) : 1) $\nu_\varepsilon(t)$, $t\geqslant 0$ — монотонно не убывает с вероятностью 1;

2) $\nu_\varepsilon(t),\ t\geqslant 0\overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow}\nu_0(t),\ t\geqslant 0$ при $\varepsilon\to 0$,

где $\nu_0(t)$, $t\geqslant 0$ — непрерывный с вероятностью 1 случайный процесс, то

$$\lim_{c\to 0}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}P\{\Delta_c(\nu_\varepsilon(t),T)\geqslant\delta\}=0,\ T,\delta>0.$$

Доказательство. Пусть

$$t_{k,c}=\{ck\ \text{ для }\ k=\overline{0,n_c-1},\quad T\ \text{ для } k=n_c,$$

где $n_c=\left[\frac{T}{c}\right]+1.$

Очевидно,

$$\Delta_c(\nu_\varepsilon(s), T) \leqslant 2 \max_{1\leqslant k\leqslant n_c} \sup_{t\in[t_{k-1,c}, t_{k,c}]} |\nu_\varepsilon(t) - \nu_\varepsilon(t_{k-1,c})| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \max_{1\leqslant k\leqslant n_c} (\nu_\varepsilon(t_{k,c}) - \nu_\varepsilon(t_{k-1,c})) = \beta_{\varepsilon,c}.$$

Из условия (E_1), 2) следует, что

$$\beta_{\varepsilon,c} \overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow} \beta_{0,c} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} P\{\Delta_c(\nu_\varepsilon(t), T) \geqslant \delta\} \leqslant P\{\beta_{0,c} \geqslant \delta - \delta'\} \to 0 \text{ при } c \to 0$$

(здесь $\delta' \in (0, \delta)$ выбрано так, что $\delta - \delta'$ — точка непрерывности функции распределения случайной величины $\beta_{0,c}$), так как если случайный процесс $\nu_0(t)$, $t \in [0, T]$ непрерывен с вероятностью 1, то он и равномерно непрерывен на $[0, T]$. Лемма доказана.

В силу леммы 2 из (1) следует

$$\lim_{c\to 0} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} P\left\{\Delta_c\left(\frac{\nu_\varepsilon(sT_\varepsilon)}{v(\varepsilon)}, T\right) \geqslant \delta\right\} = 0, T, \delta > 0. \tag{2}$$

Из соотношений (1), (2) и условия (A_1), 2) в силу леммы 1 следует

$$\frac{\zeta_\varepsilon(s)}{u(\varepsilon)}, s \in [0, T] \overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow} \gamma(\nu(s)), s \in [0, T] \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, T \geqslant 0. \tag{3}$$

Здесь

$$\zeta_\varepsilon(s) = \sum_{k=0}^{\nu_\varepsilon(sT_\varepsilon)} \gamma_\varepsilon(k), \ s \geqslant 0,$$

$$\lim_{c\to 0} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} P\left\{\Delta_c\left(\frac{\zeta_\varepsilon(s)}{u(\varepsilon)}, T\right) \geqslant \delta\right\} = 0, \delta, T > 0. \tag{4}$$

Покажем теперь, что

$$\rho_\varepsilon = \sup_{s\in[0,T]} \left| \frac{\xi_\varepsilon(sT_\varepsilon)}{u(s)} - \frac{\zeta_\varepsilon(s)}{u(\varepsilon)} \right| \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{5}$$

Действительно (не нарушая общности можно считать, что $v(\varepsilon) \geqslant 1$ и, следовательно, $[(u+1)v(\varepsilon)] \geqslant v(\varepsilon)\min(u, \alpha(\varepsilon))$),

$$P\{\rho_\varepsilon \geqslant \delta\} \leqslant P\left\{\frac{\nu_\varepsilon(TT_\varepsilon)}{v(\varepsilon)} > \min(u, \alpha(\varepsilon))\right\} +$$

$$+ P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant[(u+1)v(\varepsilon)]+1} \pi_\varepsilon(k) \geqslant \delta u(\varepsilon), \ \frac{\nu_\varepsilon(TT_\varepsilon)}{v(\varepsilon)} \leqslant \min(u, \alpha(\varepsilon))\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{[(u+2)v(\varepsilon)]} P\left\{\frac{\pi_\varepsilon(k)}{u(\varepsilon)} \geqslant \delta\right\} + \left| P\left\{\frac{\nu_\varepsilon(TT_\varepsilon)}{v(\varepsilon)} > \min(u, \alpha(\varepsilon))\right\} - \right.$$

$$\left. - P\{\nu(T) > u\} \right| + P\{\nu(T) > u\}.$$

Для любого $\sigma > 0$ выбором достаточно большого u (при этом всегда можно считать, что u — точка непрерывности функции распределения случайной величины $\nu(T)$) можно сделать последнее слагаемое справа меньше $\frac{\sigma}{2}$. Затем в силу соотношения (1) и условия (A_1), 3) можно для всех ε, достаточно близких к 0, сделать сумму первых двух слагаемых меньше $\frac{\sigma}{2}$.

Из (3) и (5) очевидно следует, что и

$$\frac{\xi_\varepsilon(sT_\varepsilon)}{u(\varepsilon)},\ s \in [0, T] \overset{\text{сл.}}{\Longrightarrow} \gamma(\nu(s)),\ s \in [0, T] \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{6}$$

Очевидно,

$$\Delta_c\left(\frac{\xi_\varepsilon(sT_\varepsilon)}{u(\varepsilon)}, T\right) \leqslant 2\rho_\varepsilon + \Delta_c\left(\frac{\zeta_\varepsilon(s)}{u(\varepsilon)}, T\right),$$

откуда в силу соотношений (4) и (5) следует

$$\lim_{c\to 0} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, P\left\{\Delta_c\left(\frac{\xi_\varepsilon(sT_\varepsilon)}{u(\varepsilon)}, T\right) \geqslant \delta\right\} = 0,\ \delta > 0. \tag{7}$$

Соотношения (6) и (7) в силу леммы 2 доказывают теорему.

Теорема 2, очевидно, не нуждается в отдельном доказательстве. Теорема 3 доказывается совершенно аналогично теореме 1.

Замечание 5. Очевидным образом утверждение теоремы 1 переносится на случай, когда случайные процессы $\xi_\varepsilon(t)$, $t \geqslant 0$ принимают значение в некотором полном метрическом сепарабельном пространстве. Это возможно в силу существования соответствующего обобщения леммы 2 [3].

Аналогичное замечание можно сделать к теореме 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровков А. А. О сходимости слабозависимых процессов к винеровскому.— Теория вероятн. и ее примен., 12, 2, 1967.
2. Rèvez, Pàl. Die Gesetze der grossen Zahlen. Akad. Kiado, Budapest, 1968.
3. Скороход А. В. Предельные теоремы для случайных процессов.— Теория вероят. и ее примен., 1, 3, 1956.

D. S Silvestrov

ON CONVERGENCE OF WEAKLY DEPENDENT PROCESSES IN UNIFORM TOPOLOGY. I

Summary

Sufficient conditions for convergence of functionals, continuous in uniform topology, for case of convergence of weakly dependent processes to continuous processes are studied.

Поступила в редколлегию 10.XI.1970.