А. Ф. ТУРБИН, асп.
Институт математики АН УССР

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С ЦЕПЯМИ МАРКОВА И ПОЛУМАРКОВСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

I. Пусть P — оператор вероятностей перехода некоторой цепи Маркова $\xi(n)$, определенной на конечном или счетном фазовом пространстве E. Обозначим черех X и X^* пространство функций и мер на E соответственно. Пусть, далее, $Q(z)$ — линейный оператор из $[X \to X]$, аналитически зависящий от z и такой, что $\|Q(z)\| \underset{z\to 0}{\to} 0$ $\left(\text{здесь } \|Q\| = \sup\limits_{i\in E} \sum\limits_{j\in E} |q_{ij}|\right)$.

Имеется круг задач в теории цепей Маркова и полумарковских процессов, в которых требуется решать уравнения вида

$$(I - P + Q(z))\, x(z) = h, \ h \in X. \tag{1}$$

Так, В. С. Королюк [1, 2] показал, что преобразования Лапласа времен пребывания некоторого полумарковского процесса в фиксированном подмножестве состояний удовлетворяют уравнению вида (1). Им же [2] было построено основанное на применении алгоритма Вишика — Люстерника [3] разложение решения $x(z)$ в ряд по степеням z. При несколько более слабых условиях на вложенную цепь Маркова аналогичные разложения были построены в работах [4, 5].

С уравнениями вида [1] связаны некоторые задачи асимптотического анализа цепей Маркова. В работе В. П. Гатуна и А. В. Скорохода [9] изучение некоторых разностных уравнений также сведено к изучению уравнения вида (1).

В данной работе с помощью результатов [6, 7] при некоторых дополнительных условиях на P и $Q(z)$ строится разложение оператора $(I - P + Q(z))^{-1}$ в ряд по степеням z. Дается также вероятностная интерпретация получающихся в этом разложении операторов.

II. Пусть фазовое пространство E цепи Маркова $\xi(n)$ разбивается на два класса

$$E = E_+ \cup E_-, \tag{2}$$

так что E_+ — класс (замкнутый связный) положительных возвратных состояний, E_- — класс невозвратных состояний.

Допускается, что $E_- = \Phi$, однако всегда $E_+ \neq \Phi$.

Обозначим через u вектор из X, составленный из единиц, и через ρ — стационарную меру цепи $\xi(n)$:

$$Pu = u, \quad \rho P = \rho, \quad (\rho, u) = 1.$$

Ясно, что $\{i \in E; \quad \rho_i > 0\} = E_+$.

В рассматриваемых условиях существует $\lim\limits_{n\to\infty} P^n$, который обозначим через P^∞. Заметим, что оператор P^∞ представляет собой оператор проектирования, причем

$$\begin{aligned} &\forall h \in X \quad P^\infty h = (\rho, h)\, u, \\ &\forall \psi \in X^* \quad \psi P^\infty = (\psi, u)\, \rho. \end{aligned} \tag{3}$$

Определение. Назовем редуцированной резольвентой оператора $I - P$ оператор R_0, обладающий следующими свойствами:

$$R_0 (I - P) = (I - P) R_0 = I - P^\infty, \tag{4}$$

$$R_0 u = 0, \quad \rho R_0 = 0. \tag{5}$$

Нетрудно убедиться, что этими условиями R_0 определяется единственным образом. Действительно, пусть R_1 — оператор, удовлетворяющий (4) и (5). Тогда из (4)

$$R_0 = R_1 + \alpha P^\infty,$$

где α — произвольная константа, а в силу (5) $\alpha = 0$.

Найдем явное выражение для R_0.

Лемма 1. Оператор $(I - P + P^\infty)^{-1}$ существует и ограничен.

Доказательство. Поскольку лемма является переформулировкой обобщенной леммы Э. Шмидта [7, § 21], так как в принятых условиях оператор $I - P$ является Ф-оператором, то дадим лишь основные моменты доказательства.

Рассмотрим уравнение

$$(I - P + P^\infty) x = h, \tag{6}$$

где h — произвольная (ограниченная) функция из X.

Уравнение (6) можно привести к виду

$$(I - P) x = (I - P^\infty) h. \tag{7}$$

Обозначая через $\overline{I - P}$ сужение оператора $I - P$ на

$$X_0 = \{f \in X; \quad f = (I - P) h, \ h \in X\},$$

где, как нетрудно видеть, существует оператор $(\overline{I - P})^{-1}$, получаем

$$x = (\overline{I - P})^{-1} (I - P^\infty) h + \beta u, \tag{8}$$

где β — некоторая константа.

Из (7) имеем $(\rho, x) = (\rho, h)$.

Подставляя сюда вместо x его выражение из (8), находим, что $\beta = (\rho, h)$. Таким образом,

$$x = (\overline{I - P})^{-1} (I - P^\infty) h + (\rho, h) u, \tag{9}$$

что и доказывает лемму 1.

Лемма 2.

$$R_0 = (I - P + P^\infty)^{-1} - P^\infty. \tag{10}$$

Доказательство. Проверим, что так определенный оператор удовлетворяет условиям (4) и (5).

Действительно, подставим (10) в одно из равенств (4), например, в $R_0(I-P) = I - P^\infty$. Имеем

$$[(I - P + P^\infty)^{-1} - P^\infty](I - P) = I - P^\infty.$$

Замечая, что $P^\infty(I-P) = 0$, перепишем последнее выражение в виде

$$(I - P + P^\infty)^{-1}(I - P) = I - P^\infty.$$

Достаточно поэтому убедиться в том, что

$$I - P = (I - P + P^\infty)(I - P^\infty).$$

Последнее очевидно.

Таким же образом можно убедиться, что (10) удовлетворяет $(I-P)R_0 = I - P^\infty$.

Проверим, наконец, выполнимость (5). Покажем, например, что $\rho R_0 = 0$. Действительно, подставляя сюда (10), имеем

$$\rho[(I - P + P^\infty)^{-1} - P^\infty] = 0$$

или

$$\rho(I - P + P^\infty)^{-1} = \rho.$$

Последнее выражение дает

$$\rho(I - P + P^\infty) = \rho(I - P) + \rho P^\infty = \rho.$$

Аналогично можно проверить, что $R_0 u = 0$.

Лемма доказана.

Если цепь Маркова $\xi(n)$ с оператором вероятностей перехода P сильно эргодична то, как показано в работе [10],

$$R_0 = \sum_{n=0}^{\infty}(P^n - P^\infty). \tag{11}$$

В [8] был введен потенциальный оператор G, определенный следующим образом:

$$G_{ij} = \sum_{k\in E} \rho_k^i N_{kj}, \tag{12}$$

где ${}^iN_{kj}$ — среднее число посещений состояния j после выхода из k до первого попадания в i-е состояние; ρ_k — компоненты стационарной меры ρ.

Было показано, что

$$-G(I - P) = I - P^\infty. \tag{13}$$

Сравнивая (13) с (4) и учитывая (5), получаем

$$R_0 = G(P^\infty - I). \tag{14}$$

Лемма 3. Решение уравнения

$$(I-P)x=h, \tag{15}$$

где $n \in X$ и $(\rho,\ h)=0$, имеет вид

$$x=R_0h+\alpha u, \tag{16}$$

где α — произвольная константа.

Для доказательства достаточно подставить (16) в (15) и использовать (4).

III. Обращаясь к уравнению (1), рассмотрим прежде всего наиболее простой случай. Наряду с цепью Маркова $\xi(n)$ с оператором вероятностей перехода P рассмотрим цепь Маркова $\xi_\varepsilon(n)$ с оператором вероятностей перехода $P_\varepsilon=P-\varepsilon Q$, $Q \in [X \to X]$. Предположим, что Q удовлетворяет условию

$$\pi=(\rho,\ Qu)\neq 0. \tag{17}$$

Это требование эквивалентно следующему: найдется $i \in E_+$ такое, выйдя из которого, цепь $\xi_\varepsilon(n)$ может с положительной вероятностью поглотиться.

Мы хотим получить разложение оператора $(I-P+\varepsilon Q)^{-1}$, который в данном случае существует [6], в ряд по степеням ε.

Теорема 1. Если для цепи $\xi_\varepsilon(n)$ выполнено условие (17), то

$$(I-P+\varepsilon Q)^{-1}=\frac{1}{\varepsilon\pi}P^\infty+\sum_{k=0}^{\infty}(-\varepsilon)^kS_k, \tag{18}$$

где

$$S_0=R_0-\pi^{-1}(P^\infty QR_0+R_0QP^\infty)+$$
$$+\pi^{-2}P^\infty QR_0QP^\infty,\quad S_k=(S_0Q)^kS_0,\quad k=1,\ 2,\ \ldots$$

Теорема 1 следует из разложения, полученного в [6]. Впрочем, можно непосредственно убедиться, что

$$(I-P+\varepsilon Q)\left(\frac{1}{\varepsilon\pi}P^\infty+\sum_{k=0}^{\infty}(-\varepsilon)^kS_k\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{\varepsilon\pi}P^\infty+\sum_{k=0}^{\infty}(-\varepsilon)^kS_k\right)(I-P+\varepsilon Q)=I.$$

Рассмотрим примеры применения теоремы 1. В работе [2] было построено разложение по степеням ε решения уравнения

$$(I-P_\varepsilon)m_\varepsilon=a \tag{19}$$

для определения $m_i^\varepsilon=M\tau_i^\varepsilon$, где τ_i^ε — времена пребывания полумарковского процесса с вложенной цепью Маркова $\xi_\varepsilon^{(n)}$, a_i — математические ожидания времен пребывания полумарковского процесса с вложенной цепью $\xi(n)$ в i-м состоянии.

В силу теоремы 1 (условие (17) выполнено)

$$m_\varepsilon=(I-P_\varepsilon)^{-1}a=\frac{1}{\varepsilon}\frac{(\rho,\ a)}{\pi}u+R_0\left(a-\frac{(\rho,\ a)}{\pi}q\right)-$$

$$-\left[\frac{(\rho,\ QR_0a)}{\pi}-\frac{(\rho,\ a)}{\pi}\cdot\frac{(\rho,\ QR_0q)}{\pi}\right]u-\varepsilon\,(R_0QR_0a+\ \cdots)+\ \cdots, \tag{20}$$

где $q = Qu$.

Авторы [9] рассмотрели некоторые классы разностных уравнений с граничными условиями, которые можно свести к уравнениям вида

$$(I-P+zQ)\,x\,(z)=h,\quad h\in X. \tag{21}$$

Здесь $P - zQ$ уже не обязательно полустохастический оператор. Но, как нетрудно видеть, в теореме 1 от оператора Q требуется, чтобы он обеспечивал не полустохастичность оператора P_ε для $\varepsilon > 0$, а существование $(I-P_\varepsilon)^{-1}$. Поэтому полученные выше результаты применимы и в данном случае.

Так, заметим, прежде всего, что если $Q=0$ и $(\rho,\ h)=0$, то решение уравнения (21), даваемое леммой 3, совпадает в точности с решением, полученным в [9]. Для доказательства этого факта нужно воспользоваться (3) и (11).

Полученное таким образом решение верно и в случае счетного E, если, как выше предположено, цепь на E_+ положительна и возвратна.

Наконец, если Q таков, что $(I-P+zQ)^{-1}$ существует для достаточно малых (z), то (20) дает другое представление для решения уравнения (21) (с соответствующими изменениями в обозначениях), полученного в [9].

IV. Рассмотрим теперь уравнение

$$(I-P+\varepsilon Q_1+\varepsilon^2Q_2+\cdots)\,x\,(\varepsilon)=h.$$

Будем предполагать, что $\pi=(\rho, Q_1u)\neq 0$.

Теорема 2.

$$(I-P+\varepsilon Q_1+\varepsilon^2Q_2+\ \cdots)^{-1}=\frac{1}{\varepsilon\pi}P^\infty+\sum_{k=0}^{\infty}(-\varepsilon)^kT_k, \tag{22}$$

где

$$T_{-1}=\frac{1}{\pi}P^\infty,$$

$$T_0=(I-\pi^{-1}P^\infty Q_1)\ \ R_0\ \ (I-\pi^{-1}Q_1P^\infty)+\pi^{-2}P^\infty Q_2P^\infty,$$

$$T_k=\sum_{i=0}^{k}T_{i-1}\,(Q_{k-i+1}T_0+Q_{k-i+2}T_{-1}),\quad k=1,\,2,\,\ldots$$

В справедливости разложения (22) можно также убедиться, проверив, что умножение (22) на $I-P+Q\,(z)$ справа и слева дает единичный оператор.

V. В предыдущих пунктах существенно использовалось условие

$$(\rho,\ Qu)\neq 0.$$

Ниже мы постараемся отказаться, насколько это возможно, от этого условия. Положим $u^{(0)}=u$, $\rho^{(0)}=\rho$. Пусть

$$\pi_0=(\rho^{(0)},\ Qu^{(0)})=0,\quad E_-\neq\varnothing. \tag{23}$$

Покажем, что в этом случае оператор Q естественным образом определяет некоторое разбиение фазового пространства, имеющее прозрачный вероятностный смысл. Обозначим поглощающее состояние цепи ξ_ε через $\{0\}$.

Из (23) следует, что

$$\forall\ i \in E_- \qquad (Qu^{(0)})_i = 0.$$

Здесь $(Qu^{(0)})_i$ — значение функции $Qu^{(0)}$ на состоянии i. Положим по определению

$$\tilde{E}_1 = \{j \in E_-;\quad (Qu^{(0)})_j \neq 0\}.$$

От Q потребуем, чтобы $\tilde{E}_1 \neq \Phi$. Ясно, что $\tilde{E}_1 \subset E_-$. В $\tilde{E}_1$ входят все те состояния цепи $\xi_\varepsilon(n)$, из которых она может за один шаг с положительной вероятностью (при $\varepsilon > 0$) попасть в $\{0\}$. Пусть, далее,

$$E_1 = \{i \in E_-;\quad p_{il}^n > 0;\quad n = 1, 2, \ldots;\quad l \in \tilde{E}_1\}$$

$(p_{il}^{(0)} = \delta_{il})$, $E_1 \subset E_-$ и наряду с состояниями класса $\tilde{E}_1$ содержит те состояния из E_-, из которых $l \in \tilde{E}_1$ достижимо за конечное число шагов.

Определим класс

$$E_2 = \{j \in E \setminus E_1;\quad (QR_0q)_j \neq 0\},\quad q = Qu^{(0)}.$$

Рассмотрим E_2 несколько подробнее. Положим $R = (I - P + P^\infty)^{-1}$, $R = R_0 + P^\infty$. Имеем

$$QR_0q = QRq - QP^\infty q = QRq - \pi_0 u^{(0)} = QRq.$$

Поэтому

$$E_2 = \{j \in E \setminus E_1;\quad (QRq)_j \neq 0\}.$$

Для $(QRq)_j$ имеем

$$(QRq)_j = \sum_{k\in E}\sum_{l\in E} q_{jk}R_{kl}q_l = \sum_{k\in E}\sum_{l\in E_1} q_{jk}R_{kl}q_l,$$

где R_{kl} являются элементами матрицы $I + P + P^2 + \cdots$,

$$R_{kl} = (I + P + P^2 + \cdots)_{kl}. \tag{24}$$

Ясно, что если $k \in E_+$, то $R_{kl} = 0$. Если же $k \in E_-$, то ряд справа в (24), как известно, сходится.

Вспоминая определение класса E_1, имеем окончательно

$$R_{kl} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \in E_+ \\ 0, & \text{если } k \in E_- \setminus E_1 \\ 1, & \text{если } k = l \\ \left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} P^i\right)_{kl}, & \text{если } k \in E_1. \end{cases} \tag{25}$$

Таким образом,

$$(QR_0q)_j = (QRq)_j = \sum_{k\in E_1}\sum_{l\in E_1} q_{jk}R_{kl}q_l. \tag{26}$$

Отсюда следует, что в E_2 войдут все те состояния цепи $\xi_\varepsilon^{(n)}$, из которых она за 1 шаг переходит в E_1, следовательно, поглощается с вероятностью $O(\varepsilon^2)$.

Рассмотрим $\pi_1 = (\rho^0, Qu^1)$, где u^1 — решение уравнения

$$(I - P)\, u^{(1)} = - Qu^{(0)}.$$

Разрешимость этого уравнения обеспечивается условием (23). Лемма 3 дает

$$u^{(1)} = - R_0 Q u^{(0)} + \alpha_1 u^{(0)},$$

откуда

$$\pi_1 = (\rho^{(0)}, QR_0 q) = (\rho^{(0)}, QRq).$$

Величина π_1 существенно зависит от того, будет $E_+ \cap E_2$ пусто или нет. Действительно, нетрудно видеть, что π_1 либо равно нулю, если $E_+ \cap E_2 = \Phi$, либо $\pi_1 > 0$, если $E_+ \cap E_2 \neq \Phi$.

Пусть E конечно и пусть $E_1, E_2, \ldots, E_r$ — последовательность множеств, построенных указанным выше способом, т. е. если E_k уже построено и $E_+ \cap E_k = \Phi$, то

$$E_{k+1} = \{j \in E \setminus E_k;\quad ((QR_0)^k q)_j \neq 0\} = \{j \in E \setminus E_k;\quad ((QR)^k q)_j \neq 0\}.$$

Заметим, что разрешимость уравнений

$$(I - P)\, u^{(k)} = - Qu^{(k-1)}, \quad k = \overline{1, r} \tag{27}$$

обеспечивается тем, что $E_+ \cap E_k = \Phi$, $k = \overline{1, r-1}$.

Последовательность множеств E_k, $k = \overline{1, r}$ может оборваться по двум причинам. Во-первых, для некоторого $r > 1$ $E_r = \Phi$. Тогда и все последующие множества будут пусты, и цепь $\xi_\varepsilon(n)$, выйдя из $i \in E_+$, не достигает $\{0\}$. В этом случае существует бесконечная последовательность векторов $\{u^{(k)}\}$, такая, что

$$(I - P)\, u^{(k)} = - Qu^{(k-1)}, \tag{28}$$

и тогда

$$(I - P + \varepsilon Q) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u^{(k)} = 0,$$

и, следовательно, $(I - P + \varepsilon Q)^{-1}$ не существует.

Во-вторых, может случиться так, что найдется $r > 1$ такое, что

$$E_+ \cap E_r \neq \varnothing.$$

Для этого случая ниже будет доказан соответствующий аналог теоремы 1.

Если же E счетно, то наряду с рассмотренными случаями может случиться так, что найдется бесконечная последовательность (непустых) множеств $E_1, E_2, \ldots$, ни одно из которых не имеет пустого пересечения с E_+. Это также означает, что, находясь в любом из состояний E_+, цепь $\xi_\varepsilon(n)$ с вероятностью 1 никогда не попадает на траекторию, ведущую в $\{0\}$. И в этом случае существует бесконечная последовательность векторов $\{u^{(k)}\}$ — решений уравнений (28) и, как и в предыдущем случае,

$$(I - P + \varepsilon Q) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u^{(k)} = 0,$$

т. е. $I - P + \varepsilon Q$ необратим. Такие случаи дальше рассматриваться не будут.

Итак, пусть Q таков, что в последовательности $E_1, E_2, \ldots, E_r$ все E_k непусты и $E_r \cap E_+ \neq \Phi$. В этом случае

$$\pi_k = \begin{cases} (\rho^{(0)}, L^k q) = 0, & \text{если } k = \overline{1, r-1} \\ (\rho^{(0)}, L^r q) \neq 0, & \text{если } k = r, \end{cases} \tag{29}$$

где $L = QR$. Будем говорить для краткости, что Q удовлетворяет r-условию.

$\varepsilon^{r+1}\pi_r$ есть вероятность (усредненная по мере ρ^0) того, что цепь $\xi_\varepsilon(n)$, выйдя из состояния класса E_+, попадет в $\{0\}$ за минимальное число шагов.

Таким образом, доказано (см. также [5]) следующее утверждение.

Теорема 3. Если Q удовлетворяет r-условию, то вероятность (усредненная по мере ρ) того, что после выхода из некоторого $i \in E_+$ цепь Маркова $\xi_\varepsilon(n)$ попадет в поглощающее состояние $\{0\}$ за минимальное число шагов, равна

$$\varepsilon^{r+1}\pi_r = \varepsilon^{r+1}(\rho^{(0)}, L^r q). \tag{30}$$

VI. Пусть Q удовлетворяет r-условию (29), а $u^{(k)}$ и $\rho^{(k)}$ — последовательности функций и мер, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} (I - P) u^{(k)} &= -Qu^{(k-1)}, \\ \rho^{(k)}(I - P) &= -\rho^{(k-1)}Q, \end{aligned} \tag{31}$$

причем $\pi_r = (\rho^{(0)}, Qu^{(r)}) = (\rho^{(r)}, Qu^{(0)}) \neq 0$. Применяя лемму 3, находим

$$\begin{aligned} u^{(k)} &= \sum_{l=0}^{k} \alpha_l (R_0 Q)^{k-l} u^{(0)}, \\ \rho^{(k)} &= \sum_{l=0}^{k} \beta_l \rho^{(0)} (QR_0)^{(k-l)}, \end{aligned} \tag{32}$$

$\alpha_0 = \beta_0 = 1$, α_l, β_l, $l = \overline{2, k}$ — произвольные константы. Выберем α_l, β_l такими, чтобы наряду с (29) имело место

$$(\rho^{(r)}, Qu^j) = (\rho^{(j)}, Qu^{(r)}) = 0, \quad j = \overline{1, r}. \tag{33}$$

Тем самым $u^{(k)}$ и $\rho^{(k)}$ определятся единственным образом. В частности, для α_l $(l = \overline{1, r})$, например, имеем

$$\alpha_l = (-1)^{(l)}\pi_r^{-1}(\rho^{(r)}, QR_0Qu^{(l-1)}) = (-1)^l \pi_r^{-1}\left(\rho^{(r)}, \sum_{j=0}^{l-1} \alpha_j S^{l-j} Qu^{(0)}\right).$$

Напомним в связи с этим, что $\alpha_0 = 1$. Положим $P_{lj} = (\rho^{(l)}, \cdot)\, u^{(j)}$. (Так, $P_{00} = P^{\infty}$).

Теорема 4. Если Q удовлетворяет r-условию, то

$$(I-P+\varepsilon Q)^{-1}=\varepsilon^{-r-1}\pi_r^{-1}P_{00}+\varepsilon^{-r}\pi_r^{-1}(P_{01}+P_{10})+\cdots+$$
$$+\varepsilon^{-1}\pi_r^{-1}(P_{0r}+P_{1r-1}+\cdots+P_{r-11}+P_{r0})+$$
$$+T_0-\varepsilon T_1+\varepsilon^2T_2-\cdots, \tag{34}$$

где

$$T_0=(I-P+\pi_r^{-1}QP_{rr}Q)^{-1}-$$
$$-\pi_r^{-1}(P_{1r}+P_{2r-1}+\cdots+P_{r-1r}+P_{r1})-\pi_r^{-1}P_{00}=$$
$$=R_0-\pi_r^{-1}(R_0QP_{0r}+P_{0r}QR_0)-\pi_r^{-1}(P_{1r}+\cdots+P_{r1})+$$
$$+\pi_r^{-1}(\rho^r,\ QR_0Qu^r)P_{00},$$
$$T_k=T_0(QT_0)^k,\ k=1,2,3,\ \ldots$$

Эта теорема следует из теоремы 2 [6]. Можно непосредственно убедиться в том, что произведение оператора $I-P+\varepsilon Q$ справа и слева на правую часть (34) дает единичный оператор.

Рассмотрим, наконец, случай, когда $P_\varepsilon=P-\varepsilon Q_1-\varepsilon^2Q_2-\cdots$, т. е. когда исходная цепь возмущается нелинейно. Будем предполагать, что существует последовательность функций $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(r)}$ и мер $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \ldots, \rho^{(r)}$, таких, что

$$\begin{aligned}(I-P)u^{(k)}&=\widehat{u}^{k-1},\\ \rho^{(k)}(I-P)&=\widehat{\rho}^{k-1},\end{aligned} \tag{35}$$

где

$$\widehat{u}^{k-1}=\sum_{i=1}^{k}Q_iu^{k-i},$$
$$\widehat{\rho}^{k-1}=\sum_{i=1}^{k}\rho^{k-i}Q_i,$$

$$\pi=(\rho^{(0)},\ \widehat{u}^{(r)})=(\widehat{\rho}^{(r)},\ u^{(0)})\neq 0. \tag{36}$$

В этом случае, используя результаты [6], можно получить следующее утверждение.

Теорема 5. Если существует последовательность функций $u^{(k)}$ и мер $\rho^{(k)}$ $k=\overline{1,r}$, удовлетворяющих (35) и (36), то

$$(I-P+\varepsilon Q_1+\varepsilon^2Q_2+\cdots)^{-1}=$$
$$=\varepsilon^{-r-1}\lambda_0P_{00}+\varepsilon^{-r}[\lambda_0(P_{01}+P_{10})+\lambda_1P_{00}]+\cdots$$
$$\cdots+\varepsilon^{-1}\Big[\lambda_0\sum_{i+j=r}P_{ij}+\lambda_1\sum_{i+j=r-1}P_{ij}+\cdots+\lambda_rP_{00}\Big]+$$
$$+S_0-\varepsilon S_1+\varepsilon^2S_2-\ \ldots, \tag{37}$$

где

$$\lambda_0=\pi^{-1},$$

$$P_{ij} = (\rho^{(i)}, \cdot)\, u^{(j)}, \quad \widehat{P}_{0r} = (\widehat{\rho}^{(r)}, \cdot)\, u^{(0)},$$

$$\widehat{P}_{r0} = (\rho^{(0)}, \cdot)\, \widehat{u}^{(r)},$$

$$S_0 = R_0 - \lambda_0 (R_0 \widehat{P}_{0r} + \widehat{P}_{r0} R_0) + \lambda_0 (\widehat{\rho}^{(r)} R_0 \widehat{u}^{(r)})\, P_{00} +$$

$$+ \lambda_0 \sum_{l=1}^{r} P_{l\,r+1} + \sum_{l=1}^{r+1} \sum_{m+n=r-l+1} \lambda_l P_{mn},$$

$$\lambda_k,\ k = \overline{1, r+1},\ S_k,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

найдены в работе [6] (см. выражения (27) — (29) и (21) соответственно).

Укажем на возможность применения теорем 1, 2, 4, 5 в задачах асимптотического анализа цепей Маркова и полумарковских процессов. В такого рода задачах интересно не только само по себе решение уравнения (1), которое можно, например, получить применяя алгоритм Вишика — Люстерника [3], но и явные выражения для коэффициентов разложения $x\,(z)$ по степеням z.

Теоремы 1, 2, 4, 5 позволяют получить явные выражения для всех без исключения коэффициентов разложения.

В заключение автор выражает глубокую признательность В. С. Королюку за помощь и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Королюк В. С. Время пребывания полумарковского процесса в фиксированном подмножестве состояний.— УМЖ, **17**, в. 3, 1965.

2. Королюк В. С. Об асимптотическом поведении времени пребывания полумарковского процесса в подмножестве состояний.— УМЖ, **21**, в. 6, 1969.

3. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений.— УМН, **15**, в. 3, 1960.

4. Королюк В. С., Турбин А. Ф. Об асимптотическом поведении времени пребывания полумарковского процесса в приводимом подмножестве состояний.— Теория вероятностей и математическая статистика, 2, 1970.

5. Турбин А. Ф. Об асимптотическом поведении времени пребывания полумарковского процесса в приводимом подмножестве состояний. Общий линейный случай.— Теория вероятностей и математическая статистика, 4, 1971.

6. Плоткин Я. Д., Турбин А. Ф. Обращение возмущенных на спектре линейных операторов.— УМЖ, **23**, в. 2, 1971.

7. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. «Наука», М., 1969.

8. Kemeny J. G., Snell J. L. Boundary theory for recurrent Markov chains.— Trans. Amer. Math. Soc., **106**, 3, 1963.

9. Гатун В. П., Скороход А. В. Разностные уравнения и цепи Маркова.— УМЖ, **21**, в. 3, 1969.

10. Kemeny J. G., Snell J. L., Knapp A. Denumerable Markov chains. Van — Nostrand, 1966.

A, F. Turbin

THE APPLICATION OF THE THEORY OF PERTURBATION OF LINEAR OPERATORS TO SOLUTION OF SOME PROBLEMS ABOUT MARKOV CHAIN AND SEMI-MARKOV PROCESSES

S u m m a r y

The results obtained by the author on the expansions of operators $(A - B(z))^{-1}$ when A is the Φ-operator with non-trivial space of zeroes, are applied for solution on some problems about Markov chains and semi-Markov processes.

Поступила в редколлегию 29.IX.1970.