Р. ХУДАЙБЕРГАНОВ, асс.
Ташкентский университет

О ПРИБЛИЖЕНИИ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим вопрос приближения непрерывного в среднем квадратичном случайного поля $\xi(t)$ полиномами Бернштейна. Предполагается, что $M\xi(t) = 0$, $M|\xi(t)|^2 < \infty$. Полиномы Бернштейна степени n функции $f(t_1, t_2)$, заданные в симплексе

$$\Delta = \{(t_1, t_2) : t_i \geqslant 0,\ i = 1, 2,\ t_1 + t_2 \leqslant 1\},$$

имеют вид [1]

$$B_n\{f; t\} \equiv B_n\{f; t_1, t_2\} = \sum_{0 \leqslant k_1 + k_2 < n} C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} \times$$

$$\times f\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) t_1^{k_1} t_2^{k_2} (1 - t_1 - t_2)^{n-k_1-k_2}.$$

Приведем ряд вспомогательных лемм, которые нам нужны в дальнейшем.

Лемма 1. Пусть $\omega_R(\delta)$ — модуль непрерывности корреляционной функции $R(t, s)$ и $\lambda \geqslant 0$. Тогда

$$\omega_R(\lambda\delta) \leqslant (1 + \lambda)\,\omega_R(\delta)$$

(см., например, [2], стр. 69). Мы полагаем

$$\omega_R(\delta) = \sup_D |R(t', s') - R(t, s)|,$$

где

$$D = \left\{(t', s'),\ (t, s) : (t', s'),\ (t, s) \in \Delta \times \Delta,\right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{2} \left[(t_i' - t_i)^2 + (s_i' - s_i)^2\right] \leqslant \delta^2\right\}.$$

Пусть $t \in \Delta$. Тогда верны следующие леммы.

Лемма 2.

$$\sum_{0 \leqslant k_1 + k_2 \leqslant n} C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} t_1^{k_1} t_2^{k_2} (1 - t_1 - t_2)^{n-k_1-k_2} = 1.$$

Лемма 3. При любом i $(i = 1, 2)$

$$\sum_{0 \leqslant k_1 + k_2 \leqslant n} \left(\frac{k_i}{n} - t_i\right) C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} t_1^{k_1} t_2^{k_2} (1 - t_1 - t_2)^{n-k_1-k_2} \leqslant \frac{1}{4n}.$$

Доказательство этих лемм легко получить [1].

Теорема 1. Пусть случайное поле $\xi(t)$ непрерывно в среднем квадратичном на Δ и $B_n(\xi;\, t)$ — его полином Бернштейна. Тогда верна оценка

$$M\,|\,B_n\{\xi;\, t\} - \xi(t)\,|^2 \leqslant (4+\sqrt{2})\,\omega_R\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Доказательство.

$$M\,|B_n\{\xi;\, t\} - \xi(t)\,|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{0\leqslant k_1+k_2\leqslant n}\ \sum_{0\leqslant l_1+l_2\leqslant n} C_n^{k_1}C_{n-k_1}^{k_2}C_n^{l_1}C_{n-l_1}^{l_2}t_1^{k_1}t_2^{k_2}\times$$
$$\times(1-t_1-t_2)^{n-k_1-k_2}t_1^{l_1}t_2^{l_2}(1-t_1-t_2)^{n-l_1-l_2}\times$$
$$\times\left|\,R\left(\frac{k_1}{n},\, \frac{k_2}{n};\, \frac{l_1}{n},\, \frac{l_2}{n}\right) - R(t_1,\, t_2;\, t_1,\, t_2)\,\right| +$$
$$+2\sum_{0\leqslant k_1+k_2\leqslant n} C_n^{k_1}C_{n-k_1}^{k_2}t_1^{k_1}t_2^{k_2}(1-t_1-t_2)^{n-k_1-k_2}\times$$
$$\times\left|\,R\left(\frac{k_1}{n},\, \frac{k_2}{n};\, t_1,\, t_2\right) - R(t_1,\, t_2;\, t_1,\, t_2)\,\right| \leqslant \omega_R\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\times$$
$$\times\Biggl\{3+\sqrt{n}\sum_{0\leqslant k_1+k_2\leqslant n}\ \sum_{0\leqslant k_1+k_2\leqslant n}\sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left[\left(\frac{k_i}{n}-t_i\right)^2+\left(\frac{l_i}{n}-t_i\right)^2\right]}\times$$
$$\times C_n^{k_1}C_{n-k_1}^{k_2}t_1^{k_1}t_2^{k_2}(1-t_1-t_2)^{n-k_1-k_2}\times$$
$$\times C_n^{l_1}C_{n-l_1}^{l_2}t_1^{l_1}t_2^{l_2}(1-t_1-t_2)^{n-l_1-l_2}+$$
$$+2\sqrt{n}\sum_{0\leqslant k_1+k_2\leqslant n}\sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{k_i}{n}-t_i\right)^2}\,C_n^{k_1}C_{n-k_1}^{k_2}t_1^{k_1}t_2^{k_2}\times$$
$$\times(1-t_1-t_2)^{n-k_1-k_2}\Biggr\} \leqslant \omega_R\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\Biggl\{3+$$
$$+\sqrt{n}\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{4n}+\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{4n}\right]^{\frac{1}{2}}+2\sqrt{n}\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{4n}\right]^{\frac{1}{2}}\Biggr\}=$$
$$=(4+\sqrt{2})\,\omega_R\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Если

$$t\in\Delta_m=\left\{(t_1,\,\ldots,\,t_m):t_i\geqslant 0,\ i=\overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m}t_i\leqslant 1\right\}$$

и

$$B_n\{\xi;\, t\} = \sum_{0\leqslant k_1+\ldots+k_m\leqslant n} C_n^{k_1}C_{n-k_1}^{k_2}\ldots C_{n-k_1-\ldots-k_{m-1}}^{k_m}\times$$
$$\times\,\xi\left(\frac{k_1}{n},\,\ldots,\,\frac{k_m}{n}\right)t_1^{k_1}\ldots t_m^{k_m}(1-t_1-\ldots-t_m)^{n-k_1-\ldots-k_m}$$

его полином Бернштейна, то справедливо следующее утверждение.

Теорема 1'. Пусть случайное поле $\xi(t)$ непрерывно в среднем квадратичном на Δ_m и $B_n\{\xi; t\}$ — его полином Бернштейна. Тогда верна оценка

$$M\,|B_n\{\xi;\ t\} - \xi(t)|^2 \leqslant \left\{3 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{m}\right\}\omega_R\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Аналогично можно доказать и следующие теоремы.

Теорема 2. Пусть случайное поле $\xi(t)$ на Δ имеет непрерывные в среднем квадратичном среднеквадратичные производные порядка i_1, i_2 $(0 \leqslant i_1 + i_2 < n)$ по аргументам t_1, t_2 соответственно.

Тогда имеет место соотношение

$$M\left|\frac{\partial^{i_1+i_2}B_n\{\xi;\ t\}}{\partial t_1^{i_1}\partial t_2^{i_2}} - \frac{\partial^{i_1+i_2}\xi(t)}{\partial t_1^{i_1}\partial t_2^{i_2}}\right|^2 \leqslant (4+\sqrt{2})\,\omega_\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{n-i_1-i_2}}\right) +$$

$$+ C\left[3 - 2\prod_{j=1}^{i_1+i_2-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) - \prod_{j=1}^{i_1+i_2-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)^2\right] + O\left(\frac{i_1+i_2}{n-i_1-i_2}\right),$$

где

$$\omega_\alpha(\delta) = \frac{\omega\partial^{2(i_1+i_2)}R(t;\ s)}{\partial t_1^{i_1}\partial t_2^{i_2}\partial s_1^{i_1}\partial s_2^{i_2}}(\delta),$$

$$C = \max_{(t;s)\in\Delta\times\Delta}\left|\frac{\partial^{2(i_1+i_2)}R(t;s)}{\partial t_1^{i_1}\partial t_2^{i_2}\partial s_1^{i_1}\partial s_2^{i_2}}\right|.$$

Теорема 2'. Пусть случайное поле $\xi(t)$ на Δ_m имеет непрерывные в среднем квадратичном среднеквадратичные производные порядка $i_1, \ldots, i_m$ $(0 \leqslant i_1 + \cdots + i_m \leqslant n)$ по всем аргументам соответственно. Тогда имеет место соотношение

$$M\left|\frac{\partial^{i_1+\cdots i_m}B_n\{\xi;\ t\}}{\partial t_1^{i_1}\ldots\partial t_m^{i_m}} - \frac{\partial^{i_1+\cdots+i_m}\xi(t)}{\partial t_1^{i_1}\ldots\partial t_m^{i_m}}\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left\{3 + \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{m}\right\}\omega_\beta\left(\frac{1}{\sqrt{n-i_1-\cdots-i_m}}\right) +$$

$$+ C_1\left[3 - 2\prod_{j=1}^{i_1+\cdots+i_m-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) - \prod_{j=1}^{i_1+\cdots+i_m-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\right]^2 +$$

$$+ O\left(\frac{i_1+\cdots+i_m}{n-i_1-\cdots i_m}\right),$$

где

$$\omega_\beta(\delta) = \frac{\omega\partial^{2(i_1+\cdots+i_m)}R(t,s)(\delta)}{\partial t_1^{i_1}\ldots\partial t_m^{i_m}\partial s_1^{i_1}\ldots\partial s_m^{i_m}};$$

$$C_1 = \max_{(t;s)\in\Delta_m\times\Delta_m}\left|\frac{\partial^{2(i_1+\cdots i_m)}R(t;\ s)}{\partial t_1^{i_1}\cdots\partial t_m^{i_m}\partial s_1^{i_1}\cdots\partial s_m^{i_m}}\right|.$$

Теорема 3 (ср. с [4]). Пусть случайное поле $\xi(t)$ непрерывно в среднем квадратичном на $K = [0, 1]^m$ и

$$B_n\{\xi;\ t\} = \sum_{k_1=0}^{n} \cdots \sum_{k_m=0}^{n} C_n^{k_1} \dots C_n^{k_m} \xi\left(\frac{k_1}{n}, \dots, \frac{k_m}{n}\right) \times$$

$$\times t_1^{k_1} \dots t_m^{k_m} (1-t_1)^{n-k_1} \dots (1-t_m)^{n-k_m}$$

его полином Бернштейна. Тогда верна оценка

$$M\left|B_n\{\xi;\ t\} - \xi(t)\right|^2 \leqslant \left\{3 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{m}\right\} \omega_R\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Теорема 4. Пусть случайное поле (t) имеет непрерывные в среднем квадратичном среднеквадратичные производные $\dfrac{\partial^{i_1+\dots i_m}\xi(t)}{\partial t_1^{i_1}\dots\partial t_m^{i_m}}$ на K. Тогда

$$M\left|\frac{\partial^{i_1+\dots i_m}B_n\{\xi;t\}}{\partial t_1^{i_1}\dots\partial t_m^{i_m}} - \frac{\partial^{i_1+\dots+i_m}\xi(t)}{\partial t_1^{i_1}\dots\partial t_m^{i_m}}\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left\{3 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{m}\right\} \omega_\beta\left(\frac{1}{\sqrt{n - i_1 - \dots - i_m}}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Следует отметить, что при $n \to \infty$ асимптотическое поведение $M\,|B_n(t) - \xi(t)|^2$, $t \in [0,1]$ было изучено В. Н. Нагорным [5]. Он показал, что

$$M\left|B_n(t) - \xi(t)\right|^2 \leqslant \frac{9}{4} \sup_{|u-v|\leqslant\delta} |\xi(u) - \xi(v)|^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Lorentz. Bernstein polynomials. Toronto Univ. press, 1953.
2. Коровкин П. П. Линейные операторы и теория приближений. М., Физматгиз, 1959.
3. Лоэв М. Теория вероятностей. М., ИЛ, 1962.
4. Nicolas T. Polynomial expansions of random Functions.— EEE Trans. of Inform. Theory, 1967, IT—13, 2, p. 314.
5. Нагорный В. Н. Об интерполяции случайных процессов и полей. Автореф. канд. дисс., Киев, 1970.

R. Khudaiberganov

ON A APPROXIMATION OF RANDOM FIELD

Summary

Approximation of continuous in mean square random field and its derivatives by Bernstein polynomials are investigated.

Поступила в редколлегию 24.VI.1970.