П. И. ЮДИЦКАЯ, мл. научн. сотр.
*НИИ строительного производства*

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ МАКСИМУМОВ НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ НОРМАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

Рассмотрим $\xi(\bar{t})$ — гауссовское однородное действительное случайное поле, $\bar{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in R^n$, $R^n$ — $n$-мерное евклидово пространство. Будем считать, что

$$M\xi(\bar{t}) = 0,\ D\xi(\bar{t}) = 1,$$

$$M\xi(\bar{t}+\bar{u})\,\xi(\bar{u}) = r(\bar{t}),\ \bar{u} \in R^n.$$

**Теорема 1.** Пусть область $D_k$ получена подобным преобразованием некоторой ограниченной измеримой замкнутой области (выпуклой) с коэффициентом подобия $k$.

Допустим, что корреляционная функция $r(\bar{t})$ при малых $|t_1|, \ldots, |t_n|$ удовлетворяет условию

$$1 - r(\bar{t}) < C \sum_{m_1+\cdots+m_n=1} |t_1|^{\alpha_1 m_1} \ldots |t_n|^{\alpha_n m_n},\ C = \mathrm{const}, \tag{1}$$

причем все $\alpha_i > 0$, $m_i \geqslant 0$, $m_i$ не обязательно целые ($i = 1, 2, \ldots, n$); число слагаемых в сумме конечно.

Тогда при больших $k$ для всякого $\varepsilon > 0$ почти наверное

$$\max_{\bar{t}\in D_k} \xi(\bar{t}) \leqslant \sqrt{2\ln \nu(D_k)} + \frac{\beta \ln\ln \nu(D_k)}{\sqrt{2\ln\nu(D_k)}}, \tag{2}$$

где $\nu(D)$ — мера Лебега области $D$ в $R^n$, $\beta = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i} + \varepsilon$.

Рассмотрим подробнее условие (1). Исключим из исследования те случаи, когда реализации случайного поля $\xi(\bar{t})$ не изменяются при изменении какой-либо компоненты вектора $\bar{t}$ и фиксированных остальных компонентах.

Тогда аналогично [2] можно показать, что из условия (1) следует, что реализации случайного поля почти наверное удовлетворяют условию Липшица $\left(C, \frac{\sigma_1}{2}, \frac{\sigma_2}{2}, \ldots, \frac{\sigma_n}{2}\right)$, $\sigma_i < \alpha_i$.

Ясно, что имеет смысл рассматривать лишь тот случай, когда $\alpha_i \leqslant 2$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, так как иначе $\frac{\partial \xi(\bar{t})}{\partial t_i} \equiv 0$ почти наверное.

Сформулированная выше теорема является обобщением теоремы 2 [3]. В последней соотношение (2) с $\beta = \frac{1}{2} + \frac{n}{2} + \varepsilon$ доказано для однородного изотропного гауссовского случайного поля, реализации которого дважды непрерывно дифференцируемы и четвертые производные корреляционный функции $r(\bar{t})$ удовлетворяют некоторым условиям.

Заметим, что если в (1) все $\alpha_i$ равны между собой и равны $\alpha$, то (1) эквивалентно следующему: при малых $|\bar{t}|$

$$1 - r(\bar{t}) < C|\bar{t}|^{\alpha}, \quad 0 \leqslant \alpha < 2, \quad C = \text{const}. \tag{3}$$

Тогда выполняется соотношение (2) при $\beta = \frac{1}{2} + \frac{n}{\alpha} + \varepsilon$.

Примерами недифференцируемых гауссовских случайных полей, для которых выполняется условие (1), являются поля с корреляционными функциями

$$r(\bar{t}) = e^{-\alpha|t_1| - \beta|t_2|}, \quad \alpha > 0, \ \beta > 0;$$

$$r(\bar{t}) = e^{-\alpha|\bar{t}|}, \quad \alpha > 0.$$

Перейдем к доказательству теоремы. В процессе доказательства используются некоторые идеи работы [1].

Введем случайное поле $\xi_x(\bar{t})$:

$$\xi_x(\bar{t}) = \xi\left(s_1 x^{-2/\alpha_1}, \ldots, s_n x^{-2/\alpha_n}\right) \tag{4}$$

при

$$s_i x^{-2/\alpha_i} \leqslant t_i < (s_i + 1)\, x^{-2/\alpha_i},$$

где $s_i$ — целые.

**Лемма 1.** Рассмотрим

$$P_1 = P\left\{ \max_{\substack{0 \leqslant t_i \leqslant T_i \\ i=1,2,\ldots,n}} \xi_x(\bar{t}) > x \right\}. \tag{5}$$

При $T_i > 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $x > 1$

$$\frac{P_1}{\psi(x)\, x^{2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i}} \prod_{i=1}^{n} T_i} < C\,^{*)},$$

---

*) В дальнейшем постоянные (возможно различные), не зависящие от $x$, $T_1, \ldots, T_n$ будем обозначать через $C$, $C > 0$.

где

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} x^{-1}. \tag{6}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$P_1 \leqslant P \left\{ \bigcup_{i_1=1}^{R_1} \cdots \bigcup_{i_n=1}^{R_n} A_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \right\},$$

где

$$A_{i_1, \ldots, i_n} = \{\xi (i_1 x^{-2/\alpha_1}, \ \ldots, \ i_n x^{-2/\alpha_n}) > x\};$$

$$R_i = [T_i x^{2/\alpha_i}] + 1;$$

$[T]$ — целая часть числа $T$.

Из однородности случайного поля $\xi(\bar{t})$ следует, что при всяких $i_1, \ldots, i_n$

$$P(A_{i_1, \ldots, i_n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \leqslant \psi(x).$$

Следовательно,

$$P_1 \leqslant \psi(x) \prod_{i=1}^n (T_i x^{2/\alpha_i} + 1).$$

Отсюда вытекает утверждение леммы.

**Лемма 2.** Найдется постоянная $C$, что при всех $x \geqslant 1$ $\frac{P_2}{\psi(x)} < C$, где

$$P_2 = P\{\xi(\bar{0}) \leqslant x - x^{-1}; \ \max_{\substack{0 \leqslant t_i \leqslant x^{-2/\alpha_i} \\ i=1, \ldots, n}} \xi(\bar{t}) > x\}. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $2\alpha = \min\limits_{i=1,\ldots,n} \alpha_i$. Выберем $b$ такое, что $2^{-\alpha} < b < 1$. События $B_k$ определим следующим образом:

$$B_k = \left\{ \max_{\substack{0 \leqslant j_i \leqslant 2^k - 1 \\ i=1, \ldots, n}} \xi \left( \frac{j_1 x^{-2/\alpha_1}}{2^k}, \ldots, \frac{j_n x^{-2/\alpha_n}}{2^k} \right) \leqslant x - x^{-1} b^k, \right.$$

$$\left. \max_{\substack{0 \leqslant j_i \leqslant 2^{k+1} \\ i=1, \ldots, n}} \xi \left( \frac{j_1 x^{-2/\alpha_1}}{2^{k+1}}, \ldots, \frac{j_n x^{-2/\alpha_n}}{2^{k+1}} \right) > x - x^{-1} b^{k+1} \right\}.$$

Можно показать, что

$$P_2 \leqslant \sum_{k=0}^\infty P(B_k). \tag{8}$$

Тогда остается проверить

$$\varlimsup_{x \to \infty} \sum_{k=0}^\infty \frac{P(B_k)}{\psi(x)} < C < \infty. \tag{9}$$

Пусть

$$E_{j_1,\ldots,j_n,k}=\left\{\xi\left(\frac{j_1x^{-2/\alpha_1}}{2^k},\ldots,\frac{j_nx^{-2/\alpha_n}}{2^k}\right)\leqslant x-x^{-1}b^k,\right.$$

$$\left.\bigcup_{\beta_i}\left[\xi\left(\frac{2j_1+\beta_1}{2^{k+1}}x^{-2/\alpha_1},\ldots,\frac{2j_n+\beta_n}{2^{k+1}}x^{-2/\alpha_n}\right)\geqslant x-x^{-1}b^{k+1}\right]\right\},$$

где объединение берется по всем $\beta_i$ ($i=1, 2, \ldots, n$), принимающим значения 0 или 1 и таким, что $\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i>0$.

Ясно, что

$$B_k\subset\bigcup_{j_1=1}^{2^k-1}\cdots\bigcup_{j_n=1}^{2^k-1}E_{j_1,\ldots,j_n,k}.$$

Из однородности случайного поля $\xi(\bar{t})$ вытекает, что при всех $j_1, \ldots, j_n$

$$P(E_{j_1,\ldots,j_n,k})=P(E_{0,\ldots,0,k}). \tag{10}$$

В свою очередь,

$$P(E_{0,\ldots,0,k})\leqslant\sum_{\beta_i}P_{\beta_1,\ldots,\beta_n,k}, \tag{11}$$

где

$$P_{\beta_1,\ldots,\beta_n,k}=P\left\{\xi(\bar{0})\leqslant x-x^{-1}b^k,\right.$$

$$\left.\xi\left(\frac{\beta_1}{2^{k+1}}x^{-2/\alpha_1},\ldots,\frac{\beta_n}{2^{k+1}}x^{-2/\alpha_n}\right)>x-x^{-1}b^{k+1}\right\}.$$

Оценим сверху $P_{\beta_1,\ldots,\beta_n,k}$. Для этого используем доказанную в работе [1] лемму, согласно которой

$$P\{X\leqslant a, Y>a+h\}\leqslant ar^{-1}\sqrt{1-r^2}\,\psi(a)\,R\left(\frac{hr}{\sqrt{1-r^2}}-a\sqrt{\frac{1-r}{1+r}}\right),$$

где

$$R(x)=\int_x^\infty(1-\Phi(s))\,ds\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^{-2}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$\Phi(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{s}\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)du;$$

$X$ и $Y$ — случайные величины, совместное распределение которых нормально и

$$MX=MY=0,\ DX=DY=1,\ MXY=r>0.$$

В рассматриваемом случае

$$a=x-x^{-1}b^k,\ h=b^k(1-b)x^{-1},$$

$$r=r(\beta_1\cdot 2^{-(k+1)}\cdot x^{-2/\alpha_1},\ldots,\beta_n\cdot 2^{-(k+1)}\cdot x^{-2/\alpha_n});$$

Учитывая условие (1), получаем, что при достаточно больших $x$ выполнены следующие неравенства:

$$1-r<C\sum_{m_1+\dots+m_n=1}\prod_{i=1}^{n}(\beta_i\cdot 2^{-(k+1)}x^{-2/\alpha_i})^{\alpha_i m_i}=$$

$$=C\sum_{m_1+\dots+m_n=1}x^{-2\sum_{i=1}^{n}m_i}\cdot 2^{-(k+1)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i m_i}<Cx^{-2}\cdot 2^{-2(k+1)\alpha},$$

$$\frac{1}{2}<r\leqslant 1.$$

Следовательно, при больших $x$

$$\frac{hr}{\sqrt{1-r^2}}-a\sqrt{\frac{1-r}{1+r}}>C(b\cdot 2^{\alpha})^k,\quad C>0.$$

Таким образом,

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{P_{\beta_1,\dots,\beta_n,k}}{\psi(x)}<\frac{C_1\cdot 2^{-(k+1)\alpha}}{(b\cdot 2^{\alpha})^{2k}}e^{-C^2(b\cdot 2^{\alpha})^{2k}}.$$

Пусть $A=b\cdot 2^{\alpha}$. Очевидно, что $A>1$. Учитывая (10) и (11), получаем

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{P(B_k)}{\psi(x)}<\frac{C_2\cdot 2^{n(2+k)-(k+1)\alpha}}{A^{2k}}e^{-C^2A^{2k}}.$$

Отсюда следует соотношение (9) и утверждение леммы 2.

**Лемма 3.** Найдется такая постоянная $C$, что при $x>1$ $\frac{P_3}{\psi(x)}<C$, где

$$P_3=P\{\xi(\bar{0})\leqslant x,\ \max_{\substack{0\leqslant t_i\leqslant x^{-2/\alpha_i}\\ i=1,\dots,n}}\xi(\bar{t})>x\}. \tag{12}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$P_3\leqslant P_2+P\{\xi(\bar{0})>x-x^{-1}\}.$$

По лемме 2 $\frac{P_2}{\psi(x)}<C$. Очевидно, что при $x>1$

$$P\{\xi(\bar{0})>x-x^{-1}\}<\psi(x).$$

Отсюда следует утверждение леммы 3.

**Лемма 4.** Найдется такая постоянная $C$, что при всех

$$T_i>1\ (i=1,2,\dots,n),\ x>1$$

$$P_4<Cx^{2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i}}\cdot\psi(x)T_1\cdots T_n,$$

где

$$P_4=P\{\max_{\substack{0\leqslant t_i\leqslant T_i\\ i=1,\dots,n}}\xi(\bar{t})>x\}.$$

Доказательство. Представим $P_4$ в виде суммы двух слагаемых

$$P_4 = [P\{\max_{\substack{0\leq t_i\leq T_i\\ i=1,\dots,n}} \xi(\bar{t}) > x\} - P\{\max_{\substack{0\leq t_i\leq T_i\\ i=1,\dots,n}} \xi_x(\bar{t}) > x\}] + $$
$$+ P\{\max_{\substack{0\leq t_i\leq T_i\\ i=1,\dots,n}} \xi_x(\bar{t}) > x\} = Q_1 + P_1.$$

Из однородности случайного поля следует

$$Q_1 \leqslant R_1 R_2 \cdots R_n P_3,\quad R_i = [T_i x^{2/\alpha_i}] + 1.$$

Следовательно, по лемме 3

$$\frac{Q_1}{\psi(x)\, x^{2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i}} \prod_{i=1}^{n} T_i} < C.$$

Используя лемму 1, получаем

$$\frac{P_4}{\psi(x)\, T_1 \cdots T_n x^{2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i}}} < C,$$

т. е. утверждение леммы 4.

Теперь докажем сформулированную выше теорему. Из леммы 4 следует, что для всякого параллелепипеда $\Pi = \{t_i : 0 \leqslant t_i \leqslant T_i,\ i = 1, \dots, n\}$, $T_i > 1$ $(i = 1, 2, \dots, n)$

$$P\{\max_{t\in\Pi} \xi(\bar{t}) > x\} \leqslant \nu(\Pi)\, x^{2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha_i} - 1} e^{-\frac{x^2}{2}} C = \nu(\Pi)\, G(x). \tag{13}$$

Построим параллелепипед $\Pi_1$, содержащий область $D_1$. Тогда параллелепипед $\Pi_k$, полученный подобным преобразованием из $\Pi_1$ с коэффициентом подобия $k$, содержит область $D_k$, причем для всех $k$

$$\nu(\Pi_k) = \rho\nu(D_k),\quad \rho = \text{const}.$$

Следовательно, при больших $k$

$$P\{\max_{\bar{t}\in D_k} \xi(\bar{t}) > x\} \leqslant P\{\max_{\bar{t}\in\Pi_k} \xi(\bar{t}) > x\} \leqslant \rho G(x)\, \nu(D_k). \tag{14}$$

Из соотношения (14) можно получить утверждение теоремы аналогично теореме 2, доказанной в работе автора [3].

Теперь рассмотрим оценку снизу для максимума поля $\xi(\bar{t})$. В [3] доказано, что если корреляционная функция $r(\bar{t})$ удовлетворяет условию $|r(\bar{t})| < C|\bar{t}|^{-1}$, то для всякого $\varepsilon > 0$ при больших $k$ почти наверное

$$\max_{\bar{t}\in D_k} \xi(\bar{t}) > \sqrt{2\ln\nu(D_k)} - \frac{(2+\varepsilon)\ln\ln\nu(D_k)}{\sqrt{2\ln\nu(D_k)}}.$$

Следующая теорема является обобщением этого результата.

**Теорема 2.** Рассмотрим $\xi(\bar{t})$ — гауссовское действительное однородное случайное поле, $M\xi(\bar{t}) = 0$, $D\xi(\bar{t}) = 1$. Пусть для некоторого $\beta > 0$

$$\lim_{|\bar{t}|\to\infty} |r(\bar{t})|\,|\bar{t}|^{\beta} < C \tag{15}$$

или при некотором $N > 0$

$$\sup_{|\bar{t}|>N} |r(\bar{t})| = \delta < 1 \tag{16}$$

и для некоторого $\beta > 0$

$$\lim_{\substack{t_i\to\infty \\ i=1,2,\ldots,n}} \left|\prod_{i=1}^{n} t_i\right|^{\beta} |r(\bar{t})| < C. \tag{17}$$

Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ для больших $k$ почти наверное

$$\max_{t\in D_k} \xi(\bar{t}) > \sqrt{2\ln \nu(D_k)} - \frac{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\ln\ln \nu(D_k)}{\sqrt{2\ln \nu(D_k)}}.$$

Доказательство. При достаточно больших $k$ в $D_k$ можно вписать параллелепипед $U_k$ с ребрами длиной $T_i^{(k)} > N$, параллельными осям координат, $\nu(U_k) = \rho'\nu(D_k)$. Пусть $S_k = S_k(A)$ ($A$ — одна из вершин $U_k$) — множество точек $s$ ($\bar{s}$), лежащих внутри $U_k$ и обладающих таким свойством: величины проекций $\bar{s} - \bar{a}$ на ребра, выходящие из $A$, принимают положительные значения, кратные $N$ (здесь $\bar{a}$ — радиус-вектор точки $A$). Очевидно, что

$$P\{\max_{\bar{t}\in D_k} \xi(\bar{t}) < x\} < P\{\max_{t\in S_k} \xi(\bar{t}) < x\}.$$

Пусть $y(\bar{t})$, $\bar{t} \in S_k$ — множество независимых гауссовских случайных величин, $My(\bar{t}) = 0$, $Dy(\bar{t}) = 1$. Тогда

$$P\{\max_{\bar{t}\in S_k} \xi(\bar{t}) < x\} < P\{\max_{\bar{t}\in S_k} y(\bar{t}) < x\} +$$

$$+ |P\{\max_{t\in S_k} \xi(\bar{t}) < x\} - P\{\max_{\bar{t}\in S_k} y(\bar{t}) < x\}|,$$

$S_k$ содержит $\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{T_i^{(k)}}{N}\right]$ точек. Таким образом, при больших $k$

$$P\{\max_{\bar{t}\in S_k} y(t) < x\} = (\Phi(x))^{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{T_i^{(k)}}{N}\right]} <$$

$$< (\Phi(x))^{\nu(D_k)C}, \tag{18}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt.$$

**Лемма 5.** Выполняется неравенство

$$|P\{\max_{\bar t\in S_k} y(\bar t)<x\}-P\{\max_{\bar t\in S_k}\xi(\bar t)<x\}|<$$

$$<C\sum_H|R(\bar t,\bar s)|\,\varphi_2(R(\bar t,\bar s),x,x)=L_k(x), \tag{19}$$

где $\varphi_2(R, x, x)$ — плотность двумерного нормального распределения, $R(\bar t, \bar s) = M\xi(\bar t)\,\xi(\bar s) = r(\bar t-\bar s)$,

$$H=\{\bar s,\bar t:\bar s\in S_k,\bar t\in S_k,|\bar s-\bar t|\geqslant N\}.$$

Доказательство. В [5] доказано следующее утверждение. Пусть $\{y_n\}$ — последовательность независимых гауссовских нормированных случайных величин, а $\{\xi_n\}$ — стационарная последовательность гауссовских нормированных величин, $M\xi_n\xi_0=\rho_n$, тогда

$$|P\{\max_{1\leqslant n\leqslant M} y_n<x\}-P\{\max_{1\leqslant n\leqslant M}\xi_n<x\}|<$$

$$<\sum_{|L|=1}^{M-1}(M-|L|)\,\varphi_2(\rho_L,x,x)\,|\rho_L|.$$

Обобщая этот результат на случайное поле дискретного аргумента, получаем (19). Таким образом,

$$P\{\max_{\bar t\in D_k}\xi(\bar t)<x\}<(\Phi(x))^{C\nu(D_k)}+L_k(x). \tag{20}$$

В неравенстве (20) подставим

$$x=\sqrt{2\ln\nu(D_k)}-\frac{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\ln\ln\nu(D_k)}{\sqrt{2\ln\nu(D_k)}}=z(\varepsilon,k).$$

Нетрудно показать, что при больших $k$

$$\{\Phi(z(\varepsilon,k))\}^{c\nu(D_k)}<C_1\exp\left\{-\frac{\ln\nu(D_k)^{\varepsilon}}{C}\right\}, \tag{21}$$

$$L_k(z(\varepsilon,k))=C\,[\ln\nu(D_k)]^{1+2\varepsilon}\times$$

$$\times\sum_H|R(\bar t,\bar s)|\,[\nu(D_k)]^{\frac{2}{1+|R(\bar t,\bar s)|}}.$$

**Лемма 6.** При больших $k$ для всякого $\varepsilon>0$

$$L_k(z(\varepsilon,k))<C\,[\ln\nu(D_k)]^{-1-\varepsilon}. \tag{22}$$

Доказательство. Представим $L_k$ в виде суммы $L_{1,k}+L_{2,k}$, причем в $L_{1,k}$ суммирование будем вести по $H_1$, а в $L_{2,k}$ — по $H\setminus H_1$,

$$H_1=H\cap\{\bar s,\bar t:|s_i-t_i|\leqslant(T_i^{(k)})^{\alpha},\ i=1,2,\ldots,n\};$$

$$\alpha=\frac{1-\delta}{2(1+\delta)}>0\ ;\ \delta=\sup_{|t|\geqslant N}|r(\bar t)|<1;$$

$$L_{1,k}[\ln\nu(D_k)]^{1+\varepsilon} < C[\ln\nu(D_k)]^{2+3\varepsilon}[\nu(D_k)]^{-\frac{2}{1+\delta}}\left(\prod_{i=1}^{n}T_i^{(k)}\right)^{1+\alpha} <$$

$$< C_1[\ln\nu(D_k)]^{2+3\varepsilon}[\nu(D_k)]^{1+\alpha-\frac{2}{1+\delta}}.$$

Так как $1+\alpha-\frac{2}{1+\delta} = -\frac{1-\delta}{2(1+\delta)}$, то

$$L_{1,k}[\ln\nu(D_k)]^{1+\varepsilon} < \frac{[\ln\nu(D_k)]^{2+3\varepsilon}}{[\nu(D_k)]^{\frac{1-\delta}{2}}} \underset{k\to\infty}{\to} 0. \tag{23}$$

Рассмотрим $L_{2,k}$. Пусть $\delta[T_1, T_2, \ldots, T_n] = \sup\limits_{\substack{t_i \geqslant T_i \\ i=1,\ldots,n}} |r(\bar{t})|$. Из (15) или (17) следует, что при больших $T_i$

$$\delta[T_1,\ldots,T_n]\left(\prod_{i=1}^{n}T_i\right)^{\frac{\beta}{n}} < C,$$

$$L_{2,k}[\ln\nu(D_k)]^{1+\varepsilon} <$$

$$< C[\ln\nu(D_k)]^{2+3\varepsilon}\delta[(T_1^{(k)})^{\alpha},\ldots,(T_n^{(k)})^{\alpha}][\nu(D_k)]^{2-\frac{2}{1+\delta[(T_1^{(k)})^{\alpha},\ldots,(T_n^{(k)})^{\alpha}]}} <$$

$$< C\left[\prod_{i=1}^{n}T_i^{(k)}\right]^{-\frac{\alpha\beta}{n}}\delta[(T_1^{(k)})^{\alpha},\ldots,(T_n^{(k)})^{\alpha}][\nu(D_k)]^{2\delta[(T_1^{(k)})^{\alpha},\ldots,(T_n^{(k)})^{\alpha}]}. \tag{24}$$

Учитывая (23) и (24), получаем (22). Из (22) и (21) следует

$$P\{\max_{\bar{t}\in D_k}\xi(\bar{t}) < z(\varepsilon,k)\} < \frac{C}{[\ln\nu(D_k)]^{1+\varepsilon}}. \tag{25}$$

Отсюда можно получить утверждение теоремы 2.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Pickans III. Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes.— Trans. Amer. Math. Soc., **145**, 1969.
2. Ядренко М. Й. Локальні властивості вибіркових функцій випадкових полів.— Вісник КДУ, № 9, серія математики і механіки, 1967.
3. Юдицкая П. И. Асимптотическое поведение максимума гауссовского поля.— Теория вероятн. и мат. статистика, вып. 3, 1970.
4. Юдицкая П. И. Об асимптотическом поведении максимумов гауссовских случайных полей.— ДАН СССР, **194**, № 2, 278, 1970.
5. Berman S. M. Limit theorems for the maximum term in stationary sequences.— Ann. Math. Statist., **35**, 2, 1964. 502—516.



**P. I. Yuditskaya**


THE ASYMPTOTIC INEQUALITIES
FOR THE MAXIMUM OF INDIFFERENTIABLE NORMAL FIELDS


Summary

The asymptotic behaviour of the maximum of homogeneous normal random fields under sufficiently general assumptions is considered.



Поступила в редколлегию 29.XII.1970.