М. И. ЯДРЕНКО, доц.
Киевский университет

ИЗОТРОПНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ НА СФЕРЕ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Настоящая заметка дополняет результаты автора [1] относительно изотропных случайных полей на единичной сфере в гильбертовом пространстве. Указывается спектральное представление изотропного поля и описываются случайные поля, обладающие некоторым свойством марковости.

Случайное поле $\xi(x)$ на единичной сфере S_∞ в гильбертовом пространстве $l_2 = \{x : x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots), \ \Sigma x_i^2 < +\infty\}$ называется изотропным в широком смысле, если $M\xi(x)$ не зависит от x, $M\xi^2(x) < +\infty$ и $M\xi(x)\xi(y) = B(\cos\theta)$ зависит только от

$$\cos\theta = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k. \tag{1}$$

Будем предполагать в дальнейшем, что $\xi(x)$ непрерывно в среднем квадратичном и $M\xi(x) = 0$, $M\xi^2(x) = 1$.

Корреляционная функция $\xi(x)$ есть эрмитово-положительное ядро на S_∞, инвариантное относительно группы вращений сферы S_∞, и поэтому в силу одного результата Шенберга [2]

$$B(\cos\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (\cos\theta)^m, \tag{2}$$

где $c_m \geqslant 0$, $\sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m = 1$.

Пусть D_m — множество всех $2m$-мерных векторов $\mu = (i_1, \ldots, i_n, k_1, \ldots, k_n)$ с натуральными компонентами, таких, что $k_1 + \cdots + k_m = m$. Рассмотрим функции

$$\Phi_\mu(m, x) = \sqrt{\frac{m!}{k_1! \ldots k_m!}}\, x_{i_1}^{k_1} \ldots x_{i_m}^{k_m}. \tag{3}$$

Тогда

$$B(\cos\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \Big(\sum_{\mu \in D_m} \Phi_\mu(m, x)\, \Phi_\mu(m, y)\Big). \tag{4}$$

Применяя к (4) теорему Карунена [3], получаем следующее утверждение.

Теорема 1. Для того чтобы $\xi(x)$ было непрерывным в среднем квадратичном изотропным случайным полем на S_∞, необходимо и достаточно, чтобы

$$\xi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu \in D_m} \xi_m^\mu \Phi_\mu(m, x), \tag{5}$$

где ξ_m^μ — последовательность случайных величин, удовлетворяющих условиям $M\xi_m^\mu = 0$, $M\xi_m^\mu \xi_{m_1}^{\mu_1} = c_m \delta_m^{m_1} \delta_\mu^{\mu_1}$.

Пусть $L(x_1^0)$ — совокупность тех векторов $x_0 \in S_\infty$, у которых первая компонента равна x_1^0. Случайное поле $\xi(x)$ на S_∞ называется полем марковского типа, если каково бы ни было $-1 \leqslant x_1^0 \leqslant 1$ и каковы бы ни были точки x' и x'' такие, что $x_1' > x_1^0 > x_1''$, случайные величины $\xi(x')$ и $\xi(x'')$ независимы, если известны значения $\xi(x)$ на $L(x_1^0)$.

Теорема 2. Корреляционная функция каждого гауссовского изотропного случайного поля марковского типа на S_∞ равна $B(\cos\theta) = (\cos\theta)^m$, где m — целочисленный параметр. Само поле $\xi(x)$ в этом случае имеет вид

$$\xi(x) = \sum_{\mu \in D_m} \xi_n^\mu \Phi_\mu(n, x). \tag{6}$$

Пусть 0 — «северный полюс» сферы S_∞, т. е. точка $(1, 0, 0, \ldots)$. Можно показать, что

$$M\{\xi(0)/\xi(x) : x \in R^n \cap L(x_1^0)\} = \frac{B(\cos\theta)}{\int\limits_{R^n \cap L(x_1^0)} B(\cos \smile a_1 x)\, dm_{n-1}(x)} \int\limits_{R^n \cap L(x_1^0)} \xi(x)\, dm_{n-1}(x) = y_n, \tag{7}$$

где R^n — n-мерное пространство векторов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $a_1 = (x_1^0, \sqrt{1 - x_1^{02}}, 0, 0, \ldots)$. Последовательность случайных величин y_n образует гауссовский мартингал, причем в силу теоремы о сходимости для мартингалов [4] с вероятностью единица

$$\lim_{n\to\infty} y_n = M\{\xi(0)/\xi(x) : x \in L(x_1^0)\} = y_\infty. \tag{8}$$

В силу свойства марковости, если $x'' \in S_\infty$ и $x_1' > x_1$, то

$$M[\xi(0) - y_\infty]\,\xi(x'') = 0. \tag{9}$$

Возьмем в качестве x'' точку $a_2 = (x_1, \sqrt{1 - x_1''^2}, 0, 0, \ldots)$. Тогда (9) можно записать в виде

$$B(\cos\theta'') = \lim_{n\to\infty} \frac{B(\cos\theta)}{\int\limits_{R^n \cap L(x_1^0)} B(\cos \smile a_1 x)\, dm_{n-1}(x)} \int\limits_{R^n \cap L(x_1^0)} B(\cos \smile a_2 x)\, dm_{n-1}(x). \tag{10}$$

Вычислив этот предел, получим следующее функциональное уравнение для корреляционной функции поля марковского типа:

$$B(\cos\theta'')\,B(\cos^2\theta) = B(\cos\theta''\cos\theta)\,B(\cos\theta) \qquad (11)$$
$$(\theta'' \geqslant \theta).$$

Из (2) вытекает, что корреляционная функция каждого изотропного случайного поля на S_∞ любое число раз дифференцируема в интервале $(0, \pi)$.

Продифференцируем (11) по θ'' и положим $\theta'' = \theta$, получим тогда

$$\frac{[B(\cos\theta)]'}{B(\cos\theta)} = \frac{1}{2}\,\frac{[B(\cos^2\theta)]'}{B(\cos^2\theta)}, \qquad (12)$$

откуда следует, если принять во внимание условие $B(1) = 1$,

$$B^2(\cos\theta) = B(\cos^2\theta). \qquad (13)$$

Равенство (13) возможно в том и только том случае, когда $c_m = \delta_m^k$, где k — целочисленный параметр. В этом нетрудно убедиться, используя неравенство Иенсена. Теорема 2 тем самым доказана.

Положим $x_1^0 = \cos\theta$. Средним случайного поля $\xi(x)$ по параллели $L(x_1^0) = L(\cos\theta)$ будем называть

$$\Gamma_\theta\xi(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\omega_{n-1}(\sin\theta)^{n-2}}\int\limits_{R^n\cap L(\cos\theta)}\xi(x)\,dm_{n-1}(x), \qquad (14)$$

если такой предел существует с вероятностью единица.

Лемма 1. Всякое гауссовское изотропное случайное поле $\xi(x)$ на S_∞ при каждом θ имеет с вероятностью единица среднее по параллели $L(\cos\theta)$.

Последовательность случайных величин

$$y_n = \frac{B(\cos\theta)}{\int\limits_{R^n\cap L(\cos\theta)} B(\cos \smile a_1 x)\,dm_{n-1}(x)}\int\limits_{R^n\cap L(\cos\theta)}\xi(x)\,dm_{n-1}(x) \qquad (15)$$

образует мартингал, в силу теоремы о сходимости мартингалов с вероятностью единица существует $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Кроме того, обычным путем можно убедиться, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B(\cos\theta)\,\omega_{n-1}(\sin\theta)^{n-2}}{\int\limits_{R^n\cap L(\cos\theta)} B(r_{a_1x})\,dm_{n-1}(x)} = \frac{B(\cos\theta)}{B(\cos^2\theta)} \neq 0. \qquad (16)$$

Следовательно, последовательность (14) также с вероятностью единица имеет предел.

Лемма 2.

$$M\,|\Gamma_{\theta+\Delta\theta}\,\xi(x) - \Gamma_\theta\,\xi(x)|^2 \leqslant C\,[\Delta\theta]^2,$$

где C — некоторая константа. Случайный процесс $\Gamma_\theta\xi(x)$ при фиксированном x с вероятностью единица непрерывен по θ.

Теорема 3. Гауссовское изотропное случайное поле $\xi(x)$ на сфере S_∞ тогда и только тогда является полем марковского типа, когда для каждого θ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ с вероятностью единица выполнено равенство

$$\Gamma_\theta \xi(x) = B(\cos\theta)\,\xi(0). \tag{17}$$

Заметим, что в силу изотропности поля

$$\lim_{n\to\infty} M\left|\frac{1}{\omega_{n-1}(\sin\theta)^{n-2}}\int\limits_{R^n\cap L(\cos\theta)} \xi(x)\,dm_{n-1}(x) - B(\cos\theta)\,\xi(0)\right|^2 = \\ = B^2(\cos\theta) - B(\cos^2\theta). \tag{18}$$

Поэтому, если $\xi(x)$ — изотропное гауссовское поле марковского типа, то в силу теоремы 2 $B^2(\cos\theta) = B(\cos^2\theta)$ при всех θ, и, следовательно, при каждом θ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\omega_{n-1}(\sin\theta)^{n-2}}\int\limits_{R^n\cap L(\cos\theta)} \xi(x)\,dm_{n-1}(x) = B(\cos\theta)\,\xi(0). \tag{19}$$

Кроме того, при каждом θ с вероятностью единица

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\omega_{n-1}(\sin\theta)^{n-2}}\int\limits_{R^n\cap L(\cos\theta)} \xi(x)\,dm_{n-1}(x) = \Gamma_\theta\,\xi(x). \tag{20}$$

Следовательно, равенство (17) имеет место с вероятностью единица при каждом θ, а значит, и для всех θ из любого счетного всюду плотного в $(0, \pi)$ множества. Так как $B(\cos\theta)\,\xi(0)$ и $\Gamma_\theta\xi$ с вероятностью единица непрерывны, то (17) имеет место с вероятностью единица для всех θ.

Наоборот, если для гауссовского изотропного поля $\xi(x)$ с корреляционной функцией $B(\cos\theta)$ имеет место (17), то $\xi(x)$ — поле марковского типа. Действительно, в этом случае

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\omega_{n-1}(\sin\theta)^{n-2}}\int\limits_{R^n\cap L(\cos\theta)} \xi(x)\,dm_{n-1}(x) = B(\cos\theta)\,\xi(0),$$

так как для гауссовских случайных величин из сходимости с вероятностью единица вытекает сходимость в среднем квадратичном. Следовательно, в силу (18) $B^2(\cos\theta) = B(\cos^2\theta)$, т. е. $\xi(x)$ — поле марковского типа.

Отметим еще следующее обстоятельство. Пусть $L(\theta, x)$ — совокупность всех векторов из S_∞, образующих угол θ с вектором $x \in S_\infty$. Будем называть оператором Лапласа

$$\Delta\xi(x) = \lim_{\theta\to 0}\frac{\Gamma_{L(\theta,x)}\xi - \xi(x)}{\frac{1}{2}\sin^2\theta}. \tag{21}$$

Тогда из теоремы 3 следует, что поле марковского типа с корреляционной функцией $(\cos\theta)^k$ удовлетворяет с вероятностью единица уравнению

$$\Delta\xi(x) + k\xi(x) = 0. \tag{22}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ядренко М. Й. Про ізотропні випадкові поля марковського типу на сфері.— ДАН УРСР, 1959, 3.
2. Schoenberg J. L. Positive definite functions on spheres.— Duke Math. Journ., 9, 96, 1942.
3. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. «Наука», 1965, М.,
4. Дуб Дж. Вероятностные процессы. М., ИЛ, 1956.

M. I. Yadrenko

ISOTROPIC RANDOM FIELDS ON A SPHERE IN HILBERT SPACE

Summary

The spectral expansion of isotropic random fieldo n a sphere in Hilbert space s shown. Gaussian random fields having some markovian property are studied.

Поступила в редколлегию 23.I.1971.