В. В. АНИСИМОВ, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПОЛУМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ СОСТОЯНИЙ В СХЕМЕ СЕРИЙ

В данной работе в § 1 рассматривается в схеме серий сумма случайных величин, заданных на полумарковском процессе (ПМП) со счетным множеством состояний, которая образуется между двумя последовательными попаданиями процесса в фиксированное состояние (сумма по циклу). Выясняются некоторые достаточные условия, при которых характеристическая функция такой суммы будет иметь определенное разложение в нуле.

В § 2 полученные результаты применяются к изучению предельных распределений для сумм случайных величин, заданных на ПМП, множество состояний которого образует один возвратный класс, когда количество слагаемых определяется числом скачков процесса за время t (t — параметр серии), а также когда суммируется неслучайное число слагаемых.

Суммы такого вида не в схеме серий рассматривались в работах Пайка [10], Кейлсона [8], Стефана [11] (с произвольным фазовым пространством классы предельных распределений описаны в работах С. В. Нагаева, Г. Ю. Алешкявичуса, А. К. Алешкявичене). В работах Г. Кестена [9] и В. А. Волконского [4] изучались многомерные распределения вектора чисел попаданий в состояния конечной подобласти ПМП. В схеме серий отдельные результаты получены в [1—3]. Однако в этих работах на процесс уже сразу накладывались условия в целом на сумму величин по циклу. В нашей работе указываются явные условия, которые накладываются на случайные величины, заданные на индивидуальных состояниях ПМП.

1. Рассмотрим при каждом $t \in (0,\infty)$ непрерывный справа ПМП $\varkappa_t(s) \in \{1, 2, \ldots\}$, который задается матрицей переходных вероятностей $F_t(i, j, u)$, $i, j = 1, 2, \ldots$, где

$$F_t(i, j, u) = P\{\varepsilon_t(k) = j,\ \tau_t(\varepsilon_t(k)) < u/\varepsilon_t(k-1) = i\}.$$

Здесь

$$\varepsilon_t(k) = \varkappa_t(\theta_t(k)),\ \ \tau_t(\varepsilon_t(k)) = \theta_t(k+1) - \theta_t(k),$$

а $\theta_t(k)$ — момент k-го скачка процесса,

$$\theta_t(k) = \min\{s:\ s > \theta_t(k-1),\ \varkappa_t(s) \neq \varepsilon_t(k-1)\}, \quad k \geqslant 1$$
$$(\theta_t(0) = 0).$$

Вложенная цепь для процесса задается матрицей

$$P_t = \| p_t(i, j) \|, \ i, j = 1, 2, \ldots, \text{ где } p_t(i, j) = F_t(i, j, \infty).$$

Пусть

$$\mathfrak{F}_t = \{f_t^{(k)}(i, x),\ \ i = 1, 2, \ldots, x \in (0, \infty),\ \ k = 0, 1, \ldots\}$$

при каждом $t \in (0, \infty)$ независимое от $\varkappa_t(s)$ семейство независимых в совокупности случайных величин, распределение которых не зависит от индекса k.

Рассмотрим здесь случай, когда матрице P_t при каждом t соответствует один возвратный класс. Обозначим

$$\alpha_t(j, n) = \min\{k : k > \alpha_t(j, n-1),\ \varepsilon_t(k) = 1,\ \varepsilon_t(0) = j\},\ n \geqslant 1, \tag{1}$$
$$(\alpha_t(j, 0) = 0);$$

$$Y_t(j) = \sum_{k=0}^{\alpha_t(j,1)-1} f_t(k) \quad (\varepsilon_t(0) = j), \tag{2}$$

где

$$f_t(k) = f_t^{(k)}(\varepsilon_t(k), \tau_t(\varepsilon_t(k))), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Для нахождения предельных распределений сумм случайных величин на ПМП необходимо знать, к какому закону притягивается величина $Y_t(1)$.

Пусть

$$\varphi_t(l, j, \lambda) = M[\exp\{i\lambda f_t(k)\}/\varepsilon_t(k) = l,\ \varepsilon_t(k+1) = j]$$

(если $p_t(l, j) = 0$, положим $\varphi_t(l, j, \lambda) \equiv 1$).

Теорема 1. Если при каждом $t \in (0, \infty)$ цепи с матрицей P_t и $\overline{\mathrm{P}} = \lim\limits_{t \to \infty} \mathrm{P}_t$ соответствует один возвратный класс, существуют нормирующие множители β_t и g_t ($g_t \to 0$, $g_t \neq 0$) такие, что для каждых $i, j = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{t \to \infty} g_t^{-1} (\varphi_t(i, j, \beta_t\lambda) - 1) = a_{ij}(\lambda), \tag{3}$$

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \overline{\rho}(i)\, \overline{p}(i, j)\, | a_{ij}(\lambda) | < \infty, \tag{4}$$

для каждого $i = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{\substack{N \to \infty \\ t \to \infty}} g_t^{-1} \sum_{j=N}^{\infty} p_t(i, j)\, | \varphi_t(i, j, \beta_t\lambda) - 1 | = 0, \tag{5}$$

$$\lim_{\substack{N \to \infty \\ t \to \infty}} g_t^{-1} \sum_{i=N}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \rho_t(i)\, p_t(i, j)\, | \varphi_t(i, j, \beta_t\lambda) - 1 | = 0, \tag{6}$$

то

$$M \exp\{i\lambda\beta_t Y_t(1)\} = 1 + g_t a(\lambda) + o(g_t). \tag{7}$$

Здесь

$$a(\lambda) = \sum_{l,j=1}^{\infty} \bar{\rho}(l)\bar{p}(l, j)\, a_{lj}(\lambda), \tag{8}$$

где $a_{lj}(\lambda)$ — логарифмы характеристических функций некоторых безгранично делимых законов, а

$$\rho_t(l) = M\omega_t(l), \quad \bar{\rho}(l) = M\bar{\omega}(l),$$

$\omega_t(l)$ ($\bar{\omega}(l)$) — случайная величина, равная числу попаданий в состояние $\{l\}$ между двумя последовательными попаданиями в состояние $\{1\}$ для цепи с матрицей P_t ($\bar{P}$) ($\omega_t(1) = 1$). Условимся в дальнейшем чертой сверху обозначать соответствующие величины для предельной цепи с матрицей $\bar{P}$.

Для доказательства теоремы нам предварительно понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. Если матрице $\bar{P}$ соответствует один возвратный класс, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется Δ и конечная область D_ε такие, что при всех $t > \Delta$ вероятность того, что между двумя последовательными попаданиями в состояние $\{1\}$ ПМП $\varkappa_t(s)$ выйдет из D_ε, меньше ε.

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{A}_t$ дополнение к нашему событию,

$$\mathfrak{A}_t = \{\varepsilon_t(k) \in D_\varepsilon,\ 0 < k < \alpha_t(1,1)\}.$$

Соответственно

$$\bar{\mathfrak{A}} = \{\bar{\varepsilon}(k) \in D_\varepsilon,\ 0 < k < \bar{\alpha}(1,1)\}.$$

Поскольку цепь с матрицей $\bar{P}$ возвратна, то, очевидно, найдется конечная область D_ε такая, что $P\{\bar{\mathfrak{A}}\} > 1 - \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда

$$|P\{\mathfrak{A}_t\} - P\{\bar{\mathfrak{A}}\}| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{\langle i \rangle_1 = k \\ \langle i \rangle_1 \in D_\varepsilon}} \left| \prod_{l=0}^{k-1} p_t(i_l, i_{l+1}) - \prod_{l=0}^{k-1} \bar{p}(i_l, i_{l+1}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{N} + \sum_{k=N+1}^{\infty}. \tag{9}$$

Здесь и в дальнейшем будем обозначать $\langle i \rangle_n = \langle i_0, i_1, \ldots, i_s \rangle$, $i_0 = 1$, $i_l \neq 1$, $0 < l < s$, $i_s = n$. Под $\langle i \rangle_n = k$ понимается, что $s = k$. Сумма берется по всем возможным наборам $\langle i \rangle_1 = k$, причем $\langle i \rangle_1 \in D_\varepsilon$ обозначает, что $i_l \in D_\varepsilon$, $l = \overline{0, k}$.

Можно легко показать, что поскольку D_ε конечна, то существуют константы $\bar{a} > 0$, $\bar{b} > 0$ такие, что

$$P\{\bar{\mathfrak{A}},\ \bar{\alpha}(1,1) > N\} < \bar{a}\exp\{-\bar{b}N\}, \quad N = 1, 2 \ldots,$$

и так как $P_t \to \bar{P}$, то существует Δ_0 и константы $a > \bar{a}$, $\bar{b} > b > 0$ такие, что при всех $t > \Delta_0$

$$P\{\mathfrak{A}_t,\ \alpha_t(1,1) > N\} < \alpha\exp\{-bN\}, \quad N = 1, 2, \ldots.$$

Тогда при достаточно большом N второе слагаемое в правой части (9) меньше $\frac{\varepsilon}{3}$, а первое содержит лишь конечное число членов и, следовательно, существует Δ_1 такое, что при $t > \Delta_1$ оно меньше $\frac{\varepsilon}{3}$. Тогда из (9) легко следует в силу первоначального выбора D_ε, что при $t > \max(\Delta_0, \Delta_1)$ $P\{\mathfrak{A}_t\} > 1 - \varepsilon$. Лемма доказана.

Лемма 2. Если матрице $\overline{\mathrm{P}}$ соответствует один возвратный класс, то для любого j, $j = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{t\to\infty} M\omega_t(j)^k = M\overline{\omega}(j)^k, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{10}$$

Доказательство. Так как матрице $\overline{\mathrm{P}}$ соответствует один класс, то для любого j существует цепочка $\langle i_0, i_1, \ldots, i_n\rangle$ такая, что $i_0 = i_n = j$, $i_k = 1$ для некоторого k, $1 < k < n$, и

$$\prod_{l=0}^{n-1} \overline{p}(i_l, i_{l+1}) = \overline{p} > 0.$$

Отсюда легко получить, что

$$P\{\overline{\omega}(j) = r + 1\} \leqslant (1 - \overline{p})^r, \quad r = 0, 1, \ldots . \tag{11}$$

Из (11) следует, что

$$M\overline{\omega}(j)^k < \infty, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$, $(\varepsilon < \overline{p})$ существует Δ такое, что при $t > \Delta$

$$\prod_{l=0}^{n-1} p_t(i_l, i_{l+1}) \geqslant \overline{p} - \varepsilon > 0,$$

откуда

$$P\{\omega_t(j) = r + 1\} \leqslant (1 - \overline{p} + \varepsilon)^r, \quad r = 0, 1, \ldots . \tag{12}$$

Тогда

$$|M\omega_t(j)^k - M\overline{\omega}(j)^k| \leqslant \sum_{l=1}^{N} l\,|P\{\omega_t(j) = l\} - P\{\overline{\omega}(j) = l\}| +$$

$$+ \sum_{l=N+1}^{\infty} lP\{\omega_t(j) = l\} + \sum_{l=N+1}^{\infty} lP\{\overline{\omega}(j) = l\}. \tag{13}$$

В силу (11) и (12) при достаточно большом N 2-е и 3-е слагаемые в правой части (13) меньше ε. Осталось доказать, что

$$P\{\omega_t(j) = l\} \xrightarrow[t\to\infty]{} P\{\overline{\omega}(j) = l\}, \quad l = 1, 2, \ldots . \tag{14}$$

Действительно,

$$P\{\overline{\omega}(j) = l\} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\langle i\rangle_1 = k}^{(l)} \prod_{l=0}^{k-1} \overline{p}(i_l, i_{l+1}),$$

причем $\Sigma^{(l)}$ обозначает, что суммирование ведется только по тем наборам $\langle i\rangle_1$, которые содержат ровно l индексов $r_1, \ldots, r_l$ таких, что $i_{r_1} = \ldots = i_{r_l} = j$. Тогда

$$|P\{\omega_t(j)=l\} - P\{\bar{\omega}(j)=l\}| \leqslant \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{\langle i\rangle_1=k \\ \langle i\rangle_1 \in D_\varepsilon}}^{(l)} \left| \prod_{l=0}^{k-1} p_t(i_l, i_{l+1}) - \right.$$

$$\left. - \prod_{l=0}^{k-1} \bar{p}(i_l, i_{l+1}) \right| + \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{\substack{\langle i\rangle_1=k \\ \langle i\rangle_1 \in D_\varepsilon}} \left[\prod_{l=0}^{k-1} p_t(i_l, i_{l+1}) + \prod_{l=0}^{k-1} \bar{p}(i_l, i_{l+1}) \right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{\langle i\rangle_1 \bar{\in} D_\varepsilon \\ \langle i\rangle_1=k}} \left[\prod_{l=0}^{k-1} p_t(i_l, i_{l+1}) + \prod_{l=0}^{k-1} \bar{p}(i_l, i_{l+1}) \right].$$

Здесь D_ε — конечная область, указанная в лемме 1, а $\langle i\rangle_1 \bar{\in} D_\varepsilon$ обозначает, что в наборе $\langle i\rangle_1$ существует i_k такое, что $i_k \bar{\in} D_\varepsilon$. Тогда в силу леммы 1 последний член меньше 2ε, 2-й член при достаточно большом N также меньше 2ε (лемма 1), а 1-й член содержит лишь конечное число слагаемых и стремится к нулю при $t \to \infty$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Обозначим для краткости

$$\tilde{\varphi}(i, j) = \varphi_t(i, j, \beta_t\lambda), \quad \tilde{a}(i, j) = g_t^{-1}(\tilde{\varphi}(i, j) - 1), \quad i, j = 1, 2, \ldots.$$

Из леммы 2 и условий (4) — (6) следует, что

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{i,j=1}^{\infty} \rho_t(i)\, p_t(i,j)\, \tilde{a}(i, j) = a(\lambda),$$

и нам достаточно показать, что

$$\delta_t = g_t^{-1} \left| M \exp\{i\lambda\beta_t Y_t(1)\} - 1 - g_t \sum_{i,j=1}^{\infty} \rho_t(i)\, p_t(i, j)\, \tilde{a}(i, j) \right| \underset{t\to\infty}{\to} 0. \tag{15}$$

Но

$$M \exp\{i\lambda\beta_t Y_t(1)\} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\langle i\rangle_1=k} \prod_{l=0}^{k-1} \tilde{\varphi}(i_l, i_{l+1})\, p_t(i_l, i_{l+1}). \tag{16}$$

Соответственно

$$1 + g_t \sum_{i,j=1}^{\infty} \rho_t(i)\, p_t(i, j)\, \tilde{a}(i, j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\langle i\rangle_1=k} \left[1 + g_t \sum_{l=0}^{k-1} \tilde{a}(i_l, i_{l+1}) \right] \prod_{l=0}^{k-1} p_t(i_l, i_{l+1}), \tag{17}$$

поскольку правая и левая части (17) есть математическое ожидание случайной величины

$$1 + g_t \sum_{k=0}^{\alpha_t(1,1)-1} \tilde{a}(\varepsilon_t(k), \varepsilon_t(k+1)) \quad (\varepsilon_t(0) = 1).$$

Теперь

$$\delta_t \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\langle i \rangle_1 = k} g_t^{-1} \left| \prod_{l=0}^{k-1} \tilde{\varphi}(i_l, i_{l+1}) - 1 - \right.$$

$$\left. - g_t \sum_{l=0}^{k-1} \tilde{a}(i_l, i_{l+1}) \right| \prod_{l=0}^{k-1} p_t(i_l, i_{l+1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{\langle i \rangle_1 = k \\ \langle i \rangle_1 \in D_\varepsilon}} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{\substack{\langle i \rangle_1 = k \\ \langle i \rangle_1 \in D_\varepsilon}} + \sum_{\langle i \rangle_1 \bar{\in} D_\varepsilon} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3. \qquad (1$$

Покажем сначала, что

$$g_t^{-1} \left| \prod_{l=0}^{k-1} \tilde{\varphi}(i_l, i_{l+1}) - 1 - g_t \sum_{l=0}^{k-1} \tilde{a}(i_l, i_{l+1}) \right| \leqslant 5 \sum_{l=0}^{k-1} |\tilde{a}(i_l, i_{l+1})|. \qquad (1$$

Рассмотрим выражение

$$\alpha_t = A_t^{-1} \left| \prod_{l=0}^{k-1} \tilde{\varphi}(i_l, i_{l+1}) - 1 \right|,$$

где

$$A_t = g_t \sum_{l=0}^{k-1} |\tilde{a}(i_l, i_{l+1})|.$$

Тогда если $A_t \geqslant \frac{1}{2}$, то $\alpha_t \leqslant 4$, так как $|\tilde{\varphi}(i, j)| \leqslant 1$. Если $A_t <$ $< \frac{1}{2}$, то

$$\alpha_t = A_t^{-1} \left| \prod_{l=0}^{k-1} (1 + g_t \tilde{a}(i_l, i_{l+1})) - 1 \right| \leqslant A_t^{-1} [A_t + A_t^2 + \cdots] \leqslant 2.$$

Следовательно, всегда имеет место оценка (19).

Рассмотрим теперь правую часть (18). Выберем конечную об ласть $D'_\varepsilon = \{1, 2, \ldots, N_1\}$, где N_1 таково, что при $t > t_0$ левые части в (5) и (6) (без знака предела) меньше ε. Пусть $D_\varepsilon = \{1, 2, \ldots, N_2\}$. Очевидно, что при $t > t_1$

$$M\omega_t(j) \chi^c_{D_\varepsilon} \underset{N_2 \to \infty}{\to} 0,$$

где $\chi^c_{D_\varepsilon}$ — индикатор события, дополнительного к $\mathfrak{A}_t$ (траектори вышла из D_ε).

Тогда выберем N_2 так, чтобы при t, больших некоторого t_1,

$$\max_{k \in D'_\varepsilon} M\omega_t(k) \chi^c_{D_\varepsilon} \max_{i,j \in D'_\varepsilon} |\tilde{a}(i, j)| < \varepsilon.$$

Как уже указывалось в лемме 1, существуют $a > 0$, $b > 0$ такие что при $t > t_2$

$$P\{\mathfrak{A}_t, \alpha_t(1,1) = n\} \leqslant a \exp\{-bn\}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Выберем теперь N таким, чтобы

$$\max_{i,j \in D_\varepsilon} |\tilde{a}(i, j)| \, a \sum_{k=N+1}^{\infty} k \exp\{-bk\} < \varepsilon. \qquad (2$$

Перейдем теперь к оценке правой части (18). Первый член содержит лишь конечное число слагаемых, каждое произведение состоит из конечного числа сомножителей, и из (3) следует, что существует некоторое t_3 такое, что при $t > t_3$ $\delta_1 < \varepsilon$. Далее, при $t > t_2$

$$\delta_2 \leqslant 5 \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{\substack{\langle i \rangle_1 = k \\ \langle i \rangle_1 \in D_\varepsilon}} \sum_{l=0}^{k-1} | \tilde{a}(i_l, i_{l+1}) | \prod_{l=0}^{k-1} p_t(i_l, i_{l+1}) \leqslant \varepsilon$$

в силу (20). Третий член δ_3 разобьем на две суммы $\delta_3 = \Sigma' + \Sigma''$, где в Σ' входят те и только те $\tilde{a}(i, j)$, для которых $i, j \in D'_\varepsilon$, а в Σ'' входят остальные $\tilde{a}(i, j)$. Тогда

$$\sum{}' = \sum_{i, j \in D'_\varepsilon} M(\omega_t(i\ \chi^c_{D_\varepsilon}) p_t(i, j) |\tilde{a}(i, j)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{i, j \in D'_\varepsilon} |\tilde{a}(i, j)| \max_{i \in D'_\varepsilon} M(\omega_t(i) \chi^c_{D_\varepsilon}) < \varepsilon,$$

$$\sum{}'' \leqslant \sum_{i, j \bar{\in} D'_\varepsilon} \rho_t(i) p_t(i, j) |\tilde{a}(i, j)| < 2\varepsilon$$

в силу (5), (6) и выбора D'_ε. Тем самым при $t > \max\{t_0, \ldots, t_3\}$ $\delta < 5\varepsilon$. Теорема доказана.

Замечание 1. Если случайные функции $f_t^{(1)}(i, x)$ отличны от нуля лишь для конечного числа индексов i, а для остальных равны нулю с вероятностью единица, то условия (4) и (6) автоматически выполняются.

Замечание 2. Если матрица P_t не зависит от t, существует стационарное распределение $\bar{q}(i)$, $i = 1, 2, \ldots$, равномерно по $i, j = 1, 2, \ldots$ выполняется (3) и имеет место (4), где $\bar{\rho}(i) = \bar{q}(i)\, \bar{q}(1)^{-1}$, то выполняется (7). В этом случае условия (5), (6) тривиально проверяются.

Замечание 3. Если процесс $\varkappa_t(s)$ имеет конечное число состояний $\{1, 2, \ldots, r\}$, то достаточно, чтобы матрице $\bar{P}$ соответствовал один существенный класс и было выполнено (3). Тогда имеет место (7), где

$$a(\lambda) = \bar{q}(1)^{-1} \sum_{i,j=1}^{r} \bar{q}(i) \bar{p}(i, j) a_{ij}(\lambda)$$

($\bar{q}(i)$, $i = \overline{1, r}$ — стационарное распределение для цепи с матрицей $\bar{P}$).

2. Применим полученные результаты к исследованию предельных распределений для сумм случайных величин, заданных на ПМП, когда количество слагаемых определяется числом скачков процесса за время t ($t \to \infty$). Обозначим

$$N_t(j) = \max\{k : \theta_t(k) < t, \quad \varepsilon_t(0) = j\},$$

и пусть

$$S_t(j) = \sum_{k=0}^{N_t(j)-1} f_t(k) \quad (\varepsilon_t(0) = j).^{*)} \tag{21}$$

Положим

$$\nu_t^{(j)}(1) = \max\{k : \alpha_t(j, k) < t\}$$

(величины $\alpha_t(j, k)$ определялись в (1)). Тогда из [1] (теорема 1) следует, что если при $t \to \infty$ будут выполнены условия

$$\frac{\nu_t^{(j)}(1)}{M\nu_t^{(j)}(1)} \xrightarrow{p} 1, \quad \beta_t Y_t' \xrightarrow{p} 0, \quad \beta_t \tilde{Y}_t'' \xrightarrow{p} 0, \tag{22}$$

где β_t — нормирующий множитель,

$$Y_t' = \sum_{k=0}^{\alpha_t(j,1)-1} f_t(k), \quad Y_t'' = \sum_{k=N_t(j)}^{\alpha_t(j,\, \nu_t^{(j)}(1)+1)-1} f_t(k), \tag{23}$$

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\beta_t \sum_{k=1}^{M\nu_t^{(j)}(1)} Y_t^{(k)}(1) < z\right\} = \Phi\ z), \tag{24}$$

причем величины $Y_t^{(k)}(1)$, $k = 1, 2, \ldots$ — независимы и одинаково распределены с $Y_t(1)$, то

$$\lim_{t\to\infty} P\{\beta_t S_t(j) < z\} = \Phi(z). \tag{25}$$

В схеме серий основную сложность представляет оценка величины Y_t''. Обозначим

$$m_t(i) = \int_0^\infty u dF_t(i, u), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

где

$$F_t(i, u) = \sum_{j=1}^{\infty} F_t(i, j, u)$$

В качестве иллюстрации докажем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть параметры процесса $\varkappa_t(s)$ не зависят от t, цепи с матрицей $\bar{P}$ соответствует один возвратный класс, $m_t(i) = m(i) < \infty$, $i = 1, 2, \ldots$ и

$$M = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\rho}(i)\, m(i) < \infty, \tag{26}$$

семейство случайных величин $\mathfrak{F}_t$ не зависит от параметра x и выполнены условия (3) — (6), где $g_t = t^{-1}M$. Тогда для любого $j = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{t\to\infty} M \exp\{i\lambda\beta_t S_t(j)\} = \exp\{a(\lambda)\}. \tag{27}$$

---

*) Условимся считать $\sum_m^n = 0$ при $n < m$, $m = 0, 1, \ldots$

Доказательство. Условие (26) обеспечивает

$$MX(1) = M < \infty, \text{ где } X(1) = \sum_{k=0}^{\alpha(1,1)-1} \tau(\varepsilon(k)), \quad (\varepsilon(0) = 1)$$

(индекс t опущен). Тогда, как известно из теории восстановления,

$$\frac{\nu_t^{(j)}(1)}{t} M \xrightarrow[t\to\infty]{p} 1.$$

Легко показать, что в нашем случае $\beta_t Y_t' \xrightarrow{p} 0$. Кроме того, при выполнении условий теоремы

$$M\exp\{i\lambda\beta_t Y_t(1)\} = 1 + t^{-1}Ma(\lambda) + o(t^{-1}), \tag{28}$$

и если мы покажем, что $Y_t'' \xrightarrow{p} 0$, то из (24) и (25) получим утверждение теоремы. Однако параметры ПМП не зависят от t, и в силу (26) процесс будет эргодический ([6], стр. 446), т. е. существуют пределы

$$\lim_{t\to\infty} P\{\varkappa(t) = k\} = r_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{29}$$

$$r_k = M^{-1}\rho(k)m(k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} r_k = 1.$$

Будем для простоты считать, что

$$F_t(i, j, u) = F_t(i, u)\, p_t(i, j), \quad i, j = 1, 2, \ldots,$$

так как иначе можно задать процесс на парах и провести аналогичные рассуждения. Тогда очевидно, что

$$P\{\beta_t |Y_t''| > \delta\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\beta_t |Y_t''| > \delta/\varepsilon_t(N_t(j)) =$$

$$= k\}\, P\{\varepsilon_t(N_t(j)) = k\} \leqslant \max_{k=\overline{1,N}} P\{\beta_t |Y_t(k)| > \delta\} + P\{\varkappa(t) > N\},$$

где величины $Y_t(k)$ определялись в (2).

Поскольку величины $\alpha_t(k, 1)$ (см. (1)) не зависят от t и для каждого k ограничены по вероятности, то из (3) следует, что

$$\beta_t Y_t(k) \xrightarrow[t\to\infty]{p} 0, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Выражение $P\{\varkappa(t) > N\}$ при большом N в силу (29) может быть сделано произвольно малым для всех t, больших некоторого t_0. Отсюда следует утверждение теоремы.

Замечание 4. Как следует из доказательства, теорема 2 имеет место также в том случае, если параметры процесса $\varkappa_t(s)$ зависят от t и дополнительно выполняются условия

$$M_t \frac{\nu_t^{(j)}(1)}{t} \xrightarrow{p} 1 \quad \left(\frac{t}{M_t} \to \infty\right),$$

где

$$M_t = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_t(k)\, m_t(k)$$

(соответственно в (3) — (6) $g_t = t^{-1}M_t$), и

$$\lim_{\substack{t\to\infty\\ N\to\infty}} P\{\varkappa_t(t) > N\} = 0. \qquad (30)$$

Можно, к примеру, показать, что условие (30) выполняется в том случае, если

$$\lim_{\substack{t\to\infty\\ N\to\infty}} M_t^{-1} \sum_{k=N}^{\infty} \rho_t(k)\, m_t(k) = 0. \qquad (31)$$

В связи с этим в [3] (теорема 1) следует дополнительно наложить условие (31), где $\rho_t(k) = q_t(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, и там же в формулировке следствия еще условие

$$\lim_{\substack{t\to\infty\\ N\to\infty}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} q_t(k)\, m_t(f_k)\right)^{-1} \sum_{l=N}^{\infty} q_t(l)\, m_t(f_l) = 0,$$

где $m_t(f_l) = M[f_t(k)/\varepsilon_t(k) = l]$ (см. [3]).

Заметим, что в [3] нет необходимости требовать существование стационарного распределения, и все результаты сохраняются с заменой величин $q_t(1)^{-1} q_t(k)$ на $\rho_t(k)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Можно также изучать суммы случайных величин на ПМП, когда суммирование производится до неслучайного индекса (эта задача сводится просто к задаче суммирования неслучайного числа величин на цепи Маркова).

Теорема 3. Пусть матрица P_t не зависит от t, ей соответствует один положительный класс со стационарным распределением $\bar{q}(i)$, $i = 1, 2, \ldots$, $n_t \to \infty$ при $t \to \infty$ (n_t — неслучайная величина) и семейство случайных величин $\mathfrak{F}_t$ удовлетворяет условиям (3) — (6), где $g_t = (n_t \bar{q}(1))^{-1}$. Тогда

$$\lim_{t\to\infty} M \exp\left\{i\lambda\beta_t \sum_{k=0}^{n_t}{}' f_t(k)\right\} = \exp\{a(\lambda)\}.$$

Следствие. Если η_t — случайная величина, не зависящая от ПМП $\varkappa_t(s)$ и семейства $\mathfrak{F}_t$ и такая, что $n_t^{-1}\eta_t \xrightarrow{p} 1$, то

$$\lim_{t\to\infty} M \exp\left\{i\lambda\beta_t \sum_{k=0}^{\eta_t} f_t(k)^{*)}\right\} \exp\{a(\lambda)\}.$$

Доказательство. Если обозначить через $\widehat{\nu}_1(n_t)$ случайную величину, равную числу попаданий в состояние $\{1\}$ за n_t

---

*) Для цепей Маркова с произвольным фазовым пространством в [7] для сумм подобного вида изучались условия сходимости к нормальному закону.

скачков, то из существования стационарного распределения следует, что $n_t^{-1}\hat{\nu}_1(n_t) \xrightarrow{P} \bar{q}(l)$. Дальнейшее доказательство и оценка остаточных членов производится так же, как в предыдущей теореме. Следствие вытекает из данной теоремы и работы [5]. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анисимов В. В. Предельные теоремы для полумарковских процессов, 1, 2.— Теория вероят. и матем. статистика, вып. 2, 1970.

2. Анисимов В. В. Многомерные предельные теоремы для полумарковских процессов со счетным множеством состояний.— Теория вероят. и матем. статистика, вып. 3, 1970.

3. Анисимов В. В. Предельные теоремы для полумарковских процессов со счетным множеством состояний.— ДАН СССР, **193**, 3, 1970.

4. Волконский В. А. Многомерная предельная теорема для однородных цепей Маркова со счетным множеством состояний.— Теория вероят. и ее примен., **2**, 2, 1957.

5. Добрушин Р. Л. Лемма о пределе сложной случайной функции.— УМН, **10**, 2, 1955.

6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. «Мир», М., 1967.

7. Форманов Ш. К. Обобщение теоремы Роббинса.— Случайные процессы и смежные вопросы, т. 1. «Фан», Ташкент, 1970.

8. Keilson J., Wishart. A central limit theorem for processes, defined on a finite Markov chain.— Pros. Camb. Soc., **60**, 3, 1964.

9. Kesten H. Occupation times for Markov and semi-Markov chains.— Trans. Amer. Math. Soc., **103**, 1, 1962.

10. Pyke R., Schaufele. Limit theorems for Markov renewal processes.— Ann. Math. Stat., **35**, 4, 1964.

11. Stephen R., Kimbleton. A stable limit theorems for Markov chains.— Ann. Math. Stat., **40**, 4, 1969.

V. V. Anisimov

SOME LIMIT THEOREMS FOR SEMI-MARKOV PROCESSES WITH COUNTABLE SET OF STATES IN THE SCHEME OF SERIES

Summary

The sum of random variables, defined on a semi-Markov process, which constructed between two hittings into one fixed state is considered in the scheme of series. The results obtained are applied to studing of limit distributions for sums of random variables, defined on a semi-Markov process.

Поступила в редколлегию 1.II.1971.