И. В. БАРХАТОВА, асс.
Донецкий университет

О НАХОЖДЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

В настоящей статье предлагается метод, позволяющий в некоторых случаях находить математические ожидания функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом вида

$$\xi(t) = \xi(u) + \int_u^t a(s, \xi(s), \xi(s-\tau))\, ds + \int_u^t b(s, \xi(s), \xi(s-\tau))\, dw(s), \quad (1)$$

где $0 \leqslant u \leqslant t < \infty$, $a(t, x, y)$, $b(t, x, y)$ — функции, определенные для $t \geqslant 0$ и $x, y \in (-\infty, \infty)$ и удовлетворяющие условиям

$$|a(t, x_1, y) - a(t, x_2, y)| \leqslant K|x_1 - x_2|^2,$$
$$|b(t, x_1, y) - b(t, x_2, y)| \leqslant K|x_1 - x_2|^2,$$

причем постоянная предполагается независимой от x_1, x_2, y, $w(t)$ — винеровский случайный процесс, τ — произвольное положительное число.

Для того, чтобы найти решение уравнения (1) в момент времени t, необходимо задать значения $\xi(-u)$ для всех $0 \leqslant u \leqslant \tau$.

Введем следующие обозначения:

$$\xi_0(s) = \xi(s-\tau), \quad 0 \leqslant s \leqslant \tau,$$
$$\xi_k(s) = \xi(s + (k-1)\tau), \quad 0 \leqslant s \leqslant \tau, \quad k = \overline{1, \infty},$$
$$a_k(s, x, y) = a(s + (k-1)\tau, x, y), \quad 0 \leqslant s \leqslant \tau, \quad k = \overline{1, \infty},$$
$$b_k(s, x, y) = b(s + (k-1)\tau, x, y), \quad 0 \leqslant s \leqslant \tau, \quad k = \overline{1, \infty},$$
$$w_k(s) = w(s + (k-1)\tau) - w((k-1)\tau), \quad 0 \leqslant s \leqslant \tau, \quad k = \overline{1, \infty}.$$

Тогда уравнение (1) будет эквивалентно системе уравнений

$$\xi_k(t) = \xi_k(u) + \int_u^t a_k(s, \xi_k(s), \xi_{k-1}(s))\, ds +$$
$$+ \int_u^t b_k(s, \xi_k(s), \xi_{k-1}(s))\, dw_k(s), \quad 0 \leqslant u \leqslant t \leqslant \tau, \quad k = \overline{1, \infty}. \quad (2)$$

Система уравнений (2) является системой треугольного типа. для нахождения функции $\xi_k(t)$ надо знать значения функций $\xi_0(t), \ldots, \xi_{k-1}(t)$.

В дальнейшем будем предполагать, что винеровский процесс $w(t)$ не зависит от $\xi_0(s)$. Очевидно, что $w_k(t)$ — винеровские процессы, независимые в совокупности и не зависящие от $\xi_0(t)$.

Рассмотрим урезанную систему

$$\xi_k(t) = \xi_k(u) + \int_u^t a_k(s, \xi_k(s), \xi_{k-1}(s))\, ds +$$
$$+ \int_u^t b_k(s, \xi_k(s), \xi_{k-1}(s))\, dw_k(s), \quad k = \overline{1, N}. \tag{3}$$

При фиксированных значениях $\xi_0(s)$ решением этой системы будет N-мерный марковский процесс $\{\xi_1(t), \ldots, \xi_N(t)\}$, определенный на интервале $[0, \tau]$. Используя это обстоятельство, получим уравнения для нахождения следующих условных математических ожиданий:

$$F(\xi_0(\cdot), s, x_1, \ldots, x_N) =$$
$$= M\{f(\xi(t), \ldots, \xi(t + (N-1)\tau))/\xi_0(\cdot), \xi(s) = x_1, \ldots$$
$$\ldots, \xi(s + (N-1)\tau) = x_N\}, \tag{4}$$

$$G(\xi_0(\cdot), s, x_1, \ldots, x_N) =$$
$$= M\left\{\int_s^t g(u, \xi(u), \ldots, \xi(u + (N-1)\tau))\, du / \xi_0(\cdot), \xi(s) = x_1, \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, \xi(s + (N-1)\tau) = x_N\right\}, \tag{5}$$

$$\Phi(\xi_0(\cdot), s, x_1, \ldots, x_N) = M\left\{f(\xi(t), \ldots, \xi(t + (N-1)\tau) \times\right.$$
$$\times \exp\left[\int_s^t \varphi(u, \xi(u), \ldots, \xi(u + (N-1)\tau))\, du\right] / \xi_0(\cdot), \xi(s) =$$
$$\left.= x_1, \ldots, \xi(s + (N-1)\tau) = x_N\right\}. \tag{6}$$

Нахождение таких условных математических ожиданий может встретиться при изучении циклических процессов.

Определение 1. Будем говорить, что функция $a(t, x, y)$ удовлетворяет условию A, если существует такая постоянная K, что при $t \in [0, T]$, $x, y \in (-\infty, \infty)$ справедливо неравенство

$$|a(t, x, y)|^2 \leqslant K(1 + |x|^2 + |y|^2),$$

$a(t, x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема и ее производные ограничены.

Определение 2. Функция $g(t, x_1, \ldots, x_N)$ удовлетворяет условию $Б$, если она ограничена, непрерывна и имеет ограниченные и непрерывные производные до второго порядка включительно.

Предложение 1. Пусть функции $a(t, x, y)$ и $b(t, x, y)$ удовлетворяют условию A, а функция $f(x_1, ..., x_N)$ — условию $Б$. Тогда функция (4) удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial s} F(\xi_0(\cdot), s, x_1, \ldots, x_N) =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} a_k(s, x_k, x_{k-1}) \frac{\partial}{\partial x_k} F(\xi_0(\cdot), s, x_1, \ldots, x_N) +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} b_k^2(s, x_k, x_{k-1}) \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} F(\xi_0(\cdot), s, x_1, \ldots, x_N) \tag{7}$$

и граничному условию

$$\lim_{s \to t} F(\xi_0(\cdot), s, x_1, \ldots, x_N) = f(x_1, \ldots, x_N). \tag{7'}$$

Как уже отмечалось выше, процесс $\{\xi(t), ..., \xi(t + (N-1)\tau)\}$ будет марковским при фиксированных значениях $\xi_0(\cdot)$, поэтому справедливость предложения следует из теоремы 1 *).

Аналогично доказываются следующие предложения.

Предложение 2. Пусть функции $a(t, x, y)$ и $b(t, x, y)$ удовлетворяют условию A, а функция $g(t, x_1, ..., x_N)$ удовлетворяет условию $Б$. Тогда функция (5) $G(\xi_0(\cdot), s, x_1, ..., x_N)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial s} G(\xi_0(\cdot), s, x_1, \ldots, x_N) =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} a_k(s, x_k, x_{k-1}) \frac{\partial}{\partial x_k} G(\xi_0(\cdot), s, x_1, \ldots, x_N) +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} b_k^2(s, x_k, x_{k-1}) \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} G(\xi_0 \cdot), s, x_1, \ldots, x_N) \tag{8}$$

и граничному условию

$$\lim_{s \to t} G(\xi_0(\cdot), s, x_1, \ldots, x_N) = 0. \tag{8'}$$

Предложение 3. Пусть функции $a(t, x, y)$; $b(t, x, y)$ удовлетворяют условию A, а функции $f(x_1, ..., x_N)$ и $\varphi(t, x_1, ..., x_N)$ условию $Б$. Тогда функция (6) $\Phi(\xi_0(\cdot), s, x_1, ..., x_N)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial s} \Phi(\xi_0(\cdot), s, x_1, \ldots, x_N) =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} a_k(s, x_k, x_{k-1}) \frac{\partial}{\partial x_k} \Phi(\varepsilon_0(\cdot), s, x_1, \ldots, x_N) +$$

*) Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. «Наука», М., 1965, стр. 535.

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} b_k^2(s, x_k, x_{k-1})\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\Phi(\xi_0(\cdot), s, x_1, \ldots, x_N)+$$

$$+\varphi(s, x_1, \ldots, x_N)\Phi(\xi_0(\cdot), s, x_1, \ldots, x_N), \tag{9}$$

и граничному условию

$$\lim_{s\to t}\Phi(\xi_0(\cdot), s, x_1, \ldots, x_N)=f(x_1, \ldots, x_N). \tag{9'}$$

I. V. Barkhatova

ON FINDING OF DISTRIBUTIONS OF SOLUTIONS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RETARDED ARGUMENT

Summary

It is proved that conditional expectations of functionals of solutions of stochastic differential equation with retarded argument can be found as solutions of differential parabolic equations.

Поступила в редколлегию 25.XII.1970.