Т. П. БЕЗДЕТНЫЙ, асп.
Киевский университет

О НЕКОТОРЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В задачах прогнозирования стационарных случайных процессов возникает необходимость описания двумерной плотности распределения процессов. В настоящей работе предлагается два представления для двумерного распределения стационарной в узком смысле последовательности, принимающей конечное число значений.

Обозначим через H_m класс монотонно возрастающих функций $f(x)$, заданных на $\left[0, \frac{m-1}{m}\right]$, непрерывных слева и в точках $\frac{s}{m^r}$, где $r = \overline{1, \infty}$, $s = \overline{0, (m-1)\,m^{r-1}}$, $m = \overline{2, \infty}$, и таких, что $f(0) = 0$ и

$$\sum_{k=1}^{m-1} \int\limits_{\frac{k-1}{m}}^{\frac{k}{m}} \log_m \frac{m}{k-ms}\, df(s) < \infty.$$

Пусть задана стационарная в узком смысле последовательность $\{\xi_n\}_{n=\overline{0,\infty}}$ и каждая случайная величина ξ_n принимает значения 0 или 1. Введем обозначения

$$P_n(ij) = P\{\xi_0 = i, \xi_n = j\},$$
$$p_i = P\{\xi_0 = i\} \quad (i, j = 0, 1).$$

Рассмотрим отображение последовательности $\{\xi_n\}_{n=\overline{0,\infty}}$ на $[0,1]$ $\eta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi_k}{2^{k+1}}$. Оно порождает на $[0, 1]$ некоторую вероятностную меру P', с которой можно связать функцию

$$F(x) = P'\{\eta < x\}.$$

Лемма. Функция $F(x)$ соответствует стационарной в узком смысле последовательности, не равной тождественно 0 или 1, тогда и только тогда, когда она имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2} \\ f(2^l(x-1)+1)-\sum\limits_{k=1}^{l} f\left(\frac{2^k(x-1)+1}{2}\right)+lp_0, \\ \qquad 1-\frac{1}{2^l}<x\leqslant 1-\frac{1}{2^{l+1}}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\quad f(x)\in H_2,\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=p_0$ и

$$\int_0^{1/2}\left[\log_2\frac{2}{1-2s}\right]df(s)=1.$$

Доказательство. Операции сдвига S последовательности $\{\xi_n\}_{n=\overline{0,\infty}}$ соответствует для случайной величины η операция $T\eta=\{2\eta\}$, где $\{x\}$ — дробная часть числа x. Так как последовательность $\{\xi_n\}_{n=\overline{0,\infty}}$ стационарная в узком смысле, то мера P' должна быть инвариантна относительно операции T, а $F(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$F(x)-F\left(\frac{x}{2}\right)+p_0=F\left(\frac{x+1}{2}\right), \tag{2}$$

поскольку

$$F(x)=P'\{\{2\eta\}<x\}=P'\left\{\eta\leqslant\frac{1}{2},\ \eta<\frac{x}{2}\right\}+$$

$$+P'\left\{\eta>\frac{1}{2},\ \eta<\frac{x+1}{2}\right\}=F\left(\frac{x}{2}\right)+F\left(\frac{x+1}{2}\right)-p_0.$$

Решением (2) есть (1), причем $f(x)$ должна удовлетворять условиям: непрерывная слева как функция распределения и

$$f(0)=P'\{\eta<0\}=0,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=P'\left\{\eta<\frac{1}{2}\right\}=P\{\xi_0=0\}=p_0,$$

$$f\left(\frac{r}{2^s}+0\right)-f\left(\frac{r}{2^s}\right)=P'\left\{\eta=\frac{r}{2^s}\right\}=0\quad (r=\overline{0,2^{s-1}},\quad s=\overline{1,\infty}).$$

Действительно, рассмотрим событие $U_l^i=\{\omega:\xi_k=i,\ k\geqslant l\}$. Тогда событие $A=\bigcup\limits_{i=0}^{1}\bigcup\limits_{l=0}^{\infty}U_l^i$ состоит из тех ω, для которых последовательность, начиная с некоторого номера, превращается в постоянную. Учитывая стационарность последовательности, получаем

$$P\{A\}\leqslant\sum_{i=0}^{1}\sum_{l=0}^{\infty}P\{U_l^i\}=\sum_{i=0}^{1}\sum_{l=0}^{\infty}P\{U_0^i\}=0.$$

Так как $F(1)=P'\{\eta<1\}=1$, то

$$f\left(\frac{1}{2}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{2^k-1}{2^{k+1}}\right)\right]=1.$$

Легко убедиться, что это условие можно переписать в виде

$$\int_0^{1/2} \left[\log_2 \frac{2}{1-2s}\right] df(s) = 1,$$

где $[x]$ — целая часть числа x.

Если $F(x)$ удовлетворяет (1), то она порождает вероятностную меру P', инвариантную относительно T, а следовательно, распределение последовательности $\{\xi_n\}_{n=\overline{0,\infty}}$ будет инвариантно относительно сдвига, т. е. эта последовательность стационарна в узком смысле. Лемма доказана.

Для $P_n(i\,j)$ можно получить представление

$$P_n(ij) = P'\left\{\frac{i}{2} \leqslant \eta < \frac{i+1}{2},\quad \frac{j}{2} \leqslant T^n\eta < \frac{j+1}{2}\right\} =$$

$$= \int_{\frac{i}{2}}^{\frac{i+1}{2}} \chi_{\left\{y:\frac{j}{2} \leqslant T^n y < \frac{j+1}{2}\right\}}(x)\,dF(x), \tag{3}$$

где $F(x)$ удовлетворяет условиям функции в (1).

Введем функцию

$$g(t) = \begin{cases} 1, & k \leqslant t < k + \frac{1}{2} \\ 0, & k + \frac{1}{2} \leqslant t < k+1 \end{cases}$$

$$(k = \overline{0, \pm\infty}).$$

Тогда (3) примет вид

$$P_n(ij) = \int_{\frac{i}{2}}^{\frac{i+1}{2}} g\left(2^n x + \frac{j}{2}\right) dF(x) \quad (i, j = 0, 1).$$

Учитывая $F(x)$, $P_n(ij)$ можно представить в виде

$$P_n(0, j) = \int_0^{1/2} g\left(2^n x + \frac{j}{2}\right) df(x),$$

$$P_n(1, j) = -\int_0^{1/2} g\left(2^n x + \frac{j}{2}\right) df(x) + p_j \quad (j = 0, 1),$$

где $f(x) \in H_2$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = p_0$ и

$$\int_0^{1/2} \left[\log_2 \frac{2}{1-2s}\right] df(s) = 1.$$

Подобная схема применима и для последовательностей, принимающих значения в $R = \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Функция, отображающая $\{\xi_n\}_{n=\overline{0,\infty}}$ в точку из $[0, 1]$, имеет вид $\eta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi_k}{m^{k+1}}$, а уравнение для $F(x)$

$$F\left(\frac{x}{m} + \frac{m-1}{m}\right) = F(x) - \sum_{k=0}^{m-2} F\left(\frac{k}{m} + \frac{x}{m}\right) + \sum_{k=1}^{m-1} F\left(\frac{k}{m}\right).$$

Его решение

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leqslant x \leqslant \frac{m-1}{m} \\ l \sum_{k=1}^{m-1} f\left(\frac{k}{m}\right) + f(m^l(x-1)+1) - \sum_{r=1}^{l} \sum_{k=1}^{m-1} f\left(\frac{m^r(x-1)+k}{m}\right), & \\ \qquad 1 - \frac{1}{m^l} < x \leqslant 1 - \frac{1}{m^{l+1}} \end{cases} \qquad (4)$$

где $f(x) \in H_m$, $f\left(\frac{k}{m}\right) - f\left(\frac{k-1}{m}\right) = P\{\xi_n = k-1\} = p_{k-1}$ $(k = \overline{1, n})$, $0 < f\left(\frac{1}{m}\right) < \cdots < f\left(\frac{m-1}{m}\right) < 1$, а

$$\sum_{k=1}^{m-1} \int_{\frac{k-1}{m}}^{\frac{k}{m}} \left[\log_m \frac{m}{k - ms}\right] df(s) = 1.$$

$AP_n(ij)$ можно выразить через $F(x)$ следующим образом:

$$P_n(ij) = \int_{\frac{i}{m}}^{\frac{i+1}{m}} \chi_{\left\{y:\, \frac{j}{m} \leqslant (m^n y) < \frac{j+1}{m}\right\}}(x)\, dF(x), \qquad (5)$$

где $F(x)$ — функция вида (4).

Введя функцию

$$g_m(x) = \begin{cases} 1, & k \leqslant x < k + \frac{1}{m} \\ 0, & k + \frac{1}{m} \leqslant x < k + 1 \quad (k = \overline{0, \pm\infty}), \end{cases}$$

можно записать (5) в виде

$$P_n(ij) = \int_{\frac{i}{m}}^{\frac{i+1}{m}} g_m\left(m^n x - \frac{j}{m}\right) dF(x),$$

или с учетом $F(x)$:

$$P_n(ij) = \int\limits_{\frac{i}{m}}^{\frac{i+1}{m}} g_m\left(m^n x + \frac{j}{m}\right) df(x) \quad (i = \overline{0, m-2};\ j = \overline{0, m-1}),$$

$$P_n(m-1, j) = p_j - \int\limits_{0}^{\frac{m-1}{m}} g_m\left(m^n x + \frac{j}{m}\right) df(x) \quad (j = \overline{0, m-1}),$$

где функция $f(x)$ такая же, как и в (4).

Рассмотрим теперь другое представление для $P_n(i, j)$. Совокупность $P_n(i, j)$ $(i, j = 0, m-1)$ образует матрицу, которую обозначим через $P(n)$. Она обладает такой симметрией:

$$P_n(kl) = P_{-n}(lk).$$

Кроме того, матрица $P(n)$ обладает свойством положительной определенности, т. е. для любых N; $n_1, n_2, \ldots, n_N$ и произвольной последовательности комплексных векторов

$$\vec{C}_i = \{c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{im}\} \quad (i = \overline{1, N})$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} (P(n_i - n_j)\vec{C}_j, \vec{C}_i) = \sum_{i,j=1}^{N} \sum_{k,l=0}^{m-1} P_{n_i-n_j}(kl)\, c_{jl}\bar{c}_{ik} \geqslant 0.$$

Действительно, рассмотрим последовательность $\eta(r)$, которая принимает значение c_{ij} в момент времени n_i, если $\xi_{n_i} = j$:

$$0 \leqslant M\left|\sum_{i=1}^{N} \eta(n_i)\right|^2 = \sum_{i,j=1}^{N} M\eta(n_j)\overline{\eta(n_i)} = \sum_{i,l=1}^{N} \sum_{k,l=0}^{m-1} P_{n_i-n_j}(kl)\, c_{jl}\bar{c}_{ik},$$

т. е. $P(n)$ — положительно определенная матрица. А для всякой положительно определенной матрицы верно представление [*]

$$P(n) = \int\limits_0^{2\pi} e^{int} dF(t), \tag{6}$$

где $F(t) = \{F_{kj}(t)\}_{k=\overline{0,m-1}}^{j=\overline{0,m-1}}$ — матричная функция, заданная на $[0, 2\pi)$ и обладающая свойствами:

1) для любых t_1, t_2; $t_1 < t_2$; $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$ матрица $\Delta F(\cdot) = F(t_2) - F(t_1)$ неотрицательно определена.

2) $\operatorname{Sp}[F(2\pi - 0) - F(0)] < \infty$.

Но в (6) уже не для всякой матрицы $F(t)$, удовлетворяющей этим свойствам, существует процесс, имеющий такое представление.

---

[*] Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.

T. P. Besdetny

ABOUT SOME REPRESENTATIONS FOR TWO-DIMENTIONAL DISTRIBUTION OF STATIONARY RANDOM PROCESSES

Summary

Two kinds of representation for two-dimentional distribution for stationary in strict sense random sequence are obtained.

Поступила в редколлегию 19.I.1971.