

Ю. К. БЕЛЯЕВ, д-р физ.-мат. наук,
В. П. НОСКО, канд. физ.-мат. наук,

Московский университет

А. А. СВЕШНИКОВ, проф.

Ленинградский политехнический институт

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫБРОСОВ ДВУМЕРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

1. При решении многих прикладных задач возникает необходимость в исследовании случайных функций нескольких переменных (случайных полей), в частности, в исследовании вероятности достижения ординатой случайного поля заданного значения. К задачам такого типа относится ряд радиолокационных задач, в которых достижение помехой некоторого порогового уровня приводит к образованию ложной цели, а также задачи, связанные с обработкой рельефа морского волнения и т. п.

Определение средних характеристик пересечений двумерным случайным полем заданного уровня, в принципе, не отличается от определения средних характеристик выбросов функции одной переменной, рассмотренного еще Райсом [1]. При переходе от одномерного случая к многомерному возникают некоторые особенности. Они затрудняют вычисления, однако их нужно учитывать, чтобы избежать ошибок, которые, например, допущены при выводе некоторых формул для выбросов двумерного случайного поля в [2].

В настоящей работе получена оценка среднего числа выбросов двумерного случайного поля за данный уровень. Нахождение этой оценки, не отраженное в литературе, имеет особенности, позволяющие проследить отличие многомерной задачи о выбросах от одномерной.

2. Будем называть выбросом случайного поля $z = \zeta(x, y)$ за уровень a связный участок реализации этого поля, все точки которого расположены не ниже плоскости $z = a$ и к которому нельзя присоединить других точек реализации, также расположенных не ниже плоскости $z = a$, без нарушения свойства связности. Каждому выбросу соответствует в плоскости xOy связная область S , для всех точек которой $\zeta(x, y) \geq a$ и в непосредственной близости от границ которой $\zeta(x, y) < a$. Область S может быть односвязной (рис. 1, а) и многосвязной (рис. 1, б). Замкнутую связную часть границы области S будем называть контуром 1-го рода, если при обходе этой границы против часовой стрелки область S остается слева; в противном случае назовем замкнутую связную часть

границы области S контуром 2-го рода. Контур 1-го рода будем обозначать l_1 , а контуры 2-го рода l_2 (добавляя штрихи при наличии в области S нескольких контуров 2-го рода). Заметим, что в случае бесконечности области S граница последней может содержать и незамкнутые связные части.

Пусть на плоскости xOy выделена некоторая область D с границей Γ . Будем говорить, что выброс за уровень a целиком содержится

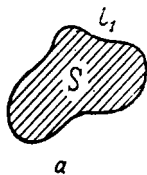


Рис. 1

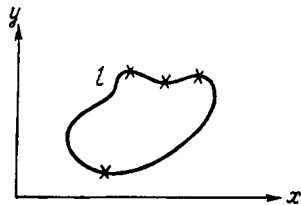


Рис. 2

в D , если все точки области S , соответствующей (в указанном выше смысле) этому выбросу, принадлежат D . Под средним числом выбросов, приходящимся на единицу площади, понимается в дальнейшем предел

$$\lim_{D \uparrow R^2} \frac{\eta_a(D)}{s(D)}$$

отношения числа выбросов за уровень a , целиком попавших в область D , к площади $s(D)$ этой области, когда D неограниченно расширяется до всей плоскости $xOy = R^2$. При этом предполагается, что граница Γ области D замкнута и «не слишком изрезана», так что длина ее при расширении D есть величина бесконечно малая по сравнению с площадью $s(D)$ области. Например, в качестве D можно взять круг радиусом r , $r \uparrow \infty$. Аналогичным образом определим среднее число контуров 1-го рода $n_1(a)$ и среднее число контуров 2-го рода $n_2(a)$:

$$n_1(a) = \lim_{D \uparrow R^2} \frac{\eta_a^1(D)}{s(D)}, \quad n_2(a) = \lim_{D \uparrow R^2} \frac{\eta_a^2(D)}{s(D)}.$$

Здесь $\eta_a^1(D)$ и $\eta_a^2(D)$ — числа контуров 1-го и 2-го рода (соответствующих выбросам за уровень a), целиком попавших в область D . При этом среднее число выбросов за уровень a совпадает с $n_1(a)$.

Для оценки среднего числа выбросов поля $\zeta(x, y)$ за уровень a запишем $n_1(a)$ в виде

$$n_1(a) = \frac{1}{2} [(n_1(a) + n_2(a)) + (n_1(a) - n_2(a))].$$

Сумма $n_1(a) + n_2(a)$ — это среднее число замкнутых контуров на плоскости xOy , соответствующих изолиниям уровня a . Каждый контур (замкнутый или незамкнутый) можно представить как совокупность графиков функциональной зависимости $y = \psi(x)$

координаты y от координаты x . Поскольку у замкнутого контура l имеется не менее двух стационарных точек (рис. 2), то справедлива оценка

$$n_1(a) + n_2(a) \leq \frac{1}{2} \lambda(a),$$

где $\lambda(a)$ — среднее число стационарных точек изолиний уровня a , т. е. точек, в которых $\zeta(x, y) = a$, $\frac{d\psi(x)}{dx} = 0$.

Для того, чтобы оценить разность $n_1(a) - n_2(a)$, заметим, что разность $\eta_a^1(D) - \eta_a^2(D)$ совпадает с величиной $\eta_a^*(D)$, равной разности числа минимумов и числа максимумов функции $\psi(x)$, расположенных на тех участках контуров 1-го и 2-го рода, целиком попавших в D , для которых $(d\zeta(x, y)/dy) > 0$. Если к $\eta_a(D)$ добавить разность числа минимумов и числа максимумов функций $\psi(x)$, расположенных на определяемых условием $\frac{\partial \zeta(x, y)}{\partial y} > 0$ участках контуров, лишь частично попавших в D , то получим величину $\eta_a^-(D) - \eta_a^+(D)$, равную разности числа минимумов и числа максимумов функций $\psi(x)$, расположенных на участках изолиний уровня a , для которых $\frac{\partial \zeta(x, y)}{\partial y} > 0$. Математическое ожидание среднего

$$v(a) = \lim_{D \rightarrow R^2} \frac{\eta_a^-(D) - \eta_a^+(D)}{s(D)}$$

подсчитано в [2] и равно

$$Mv(a) = - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(a, 0, x_3, x_4) x_3 x_4 dx_3 dx_4,$$

где $f(a, 0, x_3, x_4)$ — совместная плотность вероятностей первых четырех величин системы

$$\begin{aligned} x_1 &= \zeta, \quad x_2 = \zeta_x = \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad x_3 = \zeta_y = \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \\ x_4 &= \zeta_{xx} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad x_5 = \zeta_{xy} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (1)$$

Разность $\eta_a^-(D) - \eta_a^+(D)$ может оказаться и большей и меньшей разности $\eta_a^1(D) - \eta_a^2(D)$; поэтому, для того чтобы оценить $\eta_a^1(D) - \eta_a^2(D)$ сверху, достаточно добавить к $\eta_a^-(D) - \eta_a^+(D)$ такую величину, которая в сумме с $\eta_a^-(D) - \eta_a^+(D)$ не была меньше $\eta_a^1(D) - \eta_a^2(D)$. В качестве такой добавки можно использовать величину $\eta_a(\Gamma)$, равную числу пересечений границы Γ области D контурами, соответствующими изолиниям уровня a . При этом $\eta_a(\Gamma)$ есть число пересечений уровня a процессом $\xi_\Gamma(t)$, индуцированным полем $\zeta(x, y)$ на контуре Γ , на интервале $0 \leq t < T$, соответствующем однократному обходу границы Γ области D в опре-

деленном направлении. В случае однородности поля $\zeta(x, y)$ трудно показать, что величина $M\eta_a(\Gamma)$ пропорциональна длине Γ , так что в силу сделанных предположений о выборе области D

$$\lim_{D \uparrow R^2} \frac{M\eta_a(\Gamma)}{s(D)} = 0,$$

$$M[n_1(a) - n_2(a)] \leq M\nu(a).$$

Из полученных результатов заключаем, что в качестве верхней оценки для $Mn_1(a)$ можно использовать

$$n_1^*(a) = \frac{1}{4} [M\lambda(a) + 2M\nu(a)]. \quad (2)$$

Заметим, что если величину $\eta_a(\Gamma)$ вычесть из $\eta_a^-(D) - \eta_a^+(D)$, то придем к неравенству

$$M[n_1(a) - n_2(a)] \geq M\nu(a),$$

$$M[n_1(a) - n_2(a)] = M\nu(a),$$

и в качестве нижней оценки для $Mn_1(a)$ можно использовать

$$n_{1*}(a) = M\nu(a)^*. \quad (3)$$

Из (2) и (3) получаем двустороннюю оценку для $Mn_1(a)$

$$M\nu(a) \leq Mn_1(a) \leq \frac{1}{4} [M\lambda(a) + 2M\nu(a)]. \quad (4)$$

Пусть $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ — совместная плотность вероятностей значений величин системы (1). Интеграл от $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ по области изменения ее аргументов, соответствующей элементу плоскости $dxdy$, расположенному вблизи точки контура, в которой первая производная $\zeta_x(x, y) = x_2$ обращается в нуль, а другие элементы системы (1) могут принимать любые значения, равен $M\lambda(a) dxdy$. Для определения пределов интегрирования по переменным x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , соответствующих указанной области, заметим, что при переходе от переменных $\zeta(x, y), \zeta_x(x, y), \zeta_y(x, y), \zeta_{xx}(x, y), \zeta_{xy}(x, y)$ к переменным $x, y, \zeta_y(x, y), \zeta_{xx}(x, y), \zeta_{xy}(x, y)$ элемент области интегрирования $d\zeta d\zeta_x d\zeta_y d\zeta_{xx} d\zeta_{xy}$ преобразуется в элемент области $|J| dxdy d\zeta_y d\zeta_{xx} d\zeta_{xy}$, где якобиан J преобразования определяется формулой

$$J = \begin{vmatrix} \zeta_x & \zeta_{xx} \\ \zeta_y & \zeta_{xy} \end{vmatrix} = x_2 x_5 - x_3 x_4.$$

Следовательно, имеем

$$M\lambda(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(a, 0, x_3, x_4) |x_3 x_4| dx_3 dx_4, \quad (5)$$

*) В работе [2] $\nu(a)$ ошибочно рассматривается как среднее число выбросов на единицу площади. Ошибка состоит в том, что не учтена возможность появления контуров 2-го рода.

где при получении окончательной формулы произведено сокращение на элемент площади $dx dy$ и учтено, что в непосредственной близости от рассматриваемой точки $\zeta(x, y) = a$, $\zeta_x(x, y) = 0$.

3. Предположим, что двумерная спектральная плотность одно-родного нормального поля $\zeta(x, y)$, $M\zeta(x, y) \equiv 0$ равна

$$S_{\zeta}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\sigma_1^2}{2\pi\alpha^2} e^{-(\omega_1^2 + \omega_2^2)/2\alpha^2},$$

ковариационная функция этого поля

$$R_{\zeta}(\tau_1, \tau_2) = \sigma_1^2 e^{-\alpha^2(\tau_1^2 + \tau_2^2)/2}.$$

Будем считать, что величина a задана в долях среднего квадратичного отклонения случайного поля $\zeta(x, y)$. В этом случае можно положить $\sigma_1 = 1$. Явный вид плотности

$$f(a, 0, x_3, x_4) = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi^2\alpha^4} \exp\left\{-\frac{1}{4\alpha^8}(\alpha^8 3\alpha^2 + 2\alpha^6 a x_4 + 2\alpha^6 x_3^2 + \alpha^4 x_4^2)\right\}.$$

Подставляя это выражение в (5), приходим к соотношению

$$M\lambda(a) = \frac{\alpha^2}{\pi^2} \left[\sqrt{2} e^{-3a^2/4} + a \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a^2/2} \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \right],$$

где

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

Выражение для $M\nu(a)$ в этом случае принимает вид

$$M\nu(a) = \frac{\alpha^2}{(2\pi)^{3/2}} a e^{-a^2/2}.$$

Подставив полученные выражения для $M\lambda(a)$ и $M\nu(a)$ в (4), получим явные выражения для $n_1^*(a)$ и $n_1(a)$. При этом

$$Mn_1(a) = \frac{\alpha^2}{(2\pi)^{3/2}} a e^{-a^2/2} [1 + o(e^{-a^2/4})],$$

когда $a \uparrow \infty$. Таким образом, предложенная двусторонняя оценка дает возможность изучать асимптотическое поведение $Mn_1(a)$ при $a \uparrow \infty$.

4. Успех в изучении выбросов случайных процессов в значительной мере связан с тем, что пересечения процессом заданного уровня имеют локальный характер. Естественно поэтому и в случае полей пытаться исследовать характеристики локального типа. При этом некоторые выводы могут быть использованы, как видно из предыдущего, и для получения интегральных характеристик.

Полю $\zeta(x, y)$ можно сопоставить разнообразные точечные множества, например: S^0 — множество стационарных точек поля, т. е.

точек, в которых $\zeta_x = \zeta_y = 0$; S^+ — множество локальных максимумов поля, S^- — множество локальных минимумов поля, S^c — множество седловых точек, а также подмножества $S_a^0, S_a^+, S_a^-, S_a^c$ этих множеств, образованные из S^0, S^+, S^-, S^c отбрасыванием точек, значение поля в которых $\zeta(x, y) < a$. Так, например, S_a^+ — это множество таких локальных максимумов поля, в которых значение $\zeta(x, y) \geq a$ и т. п.

Для каждого вектора $\vec{b} = (b_1, b_2)$, $-\infty < b_1, b_2 < \infty$, обозначим:

$S^{\vec{b}}$ — множество точек, в которых поле имеет блик, согласованный с вектором $(-b, 1)$, т. е. множество таких точек $\vec{t} = (x, y)$, для которых $\zeta_x(\vec{t}) = b_1, \zeta_y(\vec{t}) = b_2$, а вектор нормали к поверхности реализации поля в точке \vec{t} параллелен вектору $(-b, 1)$;

$S_a^{\vec{b}}$ — подмножество $S^{\vec{b}}$, образованное всеми точками множества $S^{\vec{b}}$, для которых $\zeta(\vec{t}) \geq a$.

Заметим, что $S^0(S_a^0)$ соответствует множеству $S^{\vec{b}}(S_a^{\vec{b}})$ для значения $\vec{b} = (0, 0)$ и

$$S^0 = S^+ \cup S^- \cup S^c, \quad S_a^0 = S_a^+ \cup S_a^- \cup S_a^c.$$

Исследованию свойств перечисленных выше множеств посвящены работы [3—7], в них рассматриваются поля, почти все реализации которых дважды непрерывно дифференцируемы. В статье [3] получены формулы для среднего числа точек множества S^0, S^+, S^-, S^c . В работах [4, 5] приведены формулы для математического ожидания и старших моментов среднего числа точек множеств $S_a^0, S_a^+, S_a^-, S_a^c$. Например, математическое ожидание среднего числа точек множества S_a^+ , приходящегося на единицу площади, дается формулой

$$M_a^+ = \int_a^\infty du \int_{G_2^-} (\zeta_{xx}\zeta_{yy} - \zeta_{xy}^2) f(u, 0, 0, \zeta_{xx}, \zeta_{xy}, \zeta_{yy}) d\zeta_{xx} d\zeta_{xy} d\zeta_{yy}, \quad (6)$$

где G_2^- — область изменения $\zeta_{xx}, \zeta_{xy}, \zeta_{yy}$, определяемая условиями $\zeta_{xx} < 0, \zeta_{xx}\zeta_{yy} - \zeta_{xy}^2 > 0$ отрицательной определенности матрицы значений вторых частных производных поля в точке максимума, а $f(u, b_1, b_2, \zeta_{xx}, \zeta_{xy}, \zeta_{yy})$ — совместная плотность вероятностей значений $\zeta(x, y) = u, \zeta_x(x, y) = b_1, \zeta_y(x, y) = b_2, \zeta_{xx}(x, y), \zeta_{xy}(x, y), \zeta_{yy}(x, y)$.

Формула для математического ожидания среднего числа точек множества $S_a^{\vec{b}}$ имеет аналогичный вид:

$$M_a^{\vec{b}} = \int_a^\infty du \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (\zeta_{xx}\zeta_{yy} - \zeta_{xy}^2) f(u, b_1, b_2, \zeta_{xx}, \zeta_{xy}, \zeta_{yy}) d\zeta_{xx} d\zeta_{xy} d\zeta_{yy}. \quad (7)$$

Если в формулах (6) и (7) положить $a = -\infty$, то получается выражение для средних чисел точек $\mu^{+\ast}$ и $\mu^{\vec{b}}$ множеств S^+ и $S^{\vec{b}}$ соответственно. Для изотропного гауссовского поля, имеющего нулевое среднее, формула для μ^+ принимает вид [3]

$$\mu^+ = \frac{1}{8\pi\sqrt{3}} \cdot \frac{k_{22} + k_{33}}{M_4},$$

где M_4 — сумма значений четвертых частных производных ковариационной функции поля в нуле,

$$M_4 = \frac{\partial^4 K(0,0)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 K(0,0)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 K(0,0)}{\partial y^4}.$$

В работе [7] для гауссовских однородных полей получено следующее асимптотическое представление μ_a^+ при $a \uparrow \infty$:

$$\mu_a^+ = \frac{\sqrt{k_{22}k_{33} - k_{23}^2}}{(2\pi k_{11})^{3/2}} a e^{-a^2/2k_{11}} \left(1 + O\left(\frac{1}{a}\right)\right); \quad (8)$$

такую же асимптотику имеет и $\mu_a^{\vec{0}}$. Последнее означает, что с ростом $a \uparrow \infty$ доля локальных максимумов в общем числе стационарных точек поля, превышающих уровень a , приближается к единице, в то время как доля локальных минимумов и седловых точек близка к нулю. Для рассмотренного в п. 3 поля имеем, согласно (8),

$$\mu_a^+ = \frac{\alpha^2}{(2\pi)^{3/2}} a e^{-a^2/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{a}\right)\right). \quad (9)$$

Нетрудно заметить, что это выражение совпадает с асимптотическим выражением, соответствующим $\frac{1}{2} M\lambda(a)$. Моделирование на ЭВМ точного выражения для μ_a^+ показывает, что ошибка от замены точного значения μ_a^+ главным членом асимптотики (9) не превышает 5% для значений $a \geq 3$.

С помощью указанных выше локальных характеристик можно исследовать строение выбросов поля $\zeta(x, y)$ за высокий уровень a . Подобные результаты приведены в статье [6, 7]. Выбросы поля аппроксимируются сегментами эллиптических параболоидов, параметры которых зависят от уровня a и от значений k_{11} , k_{22} , k_{23} , k_{33} . Распределение высоты h_a произвольного выброса поля $\zeta(x, y)$ за уровень a описывается соотношением [7]

$$P\{ah_a \geq v\} = e^{-v/k_{11}}, \quad v \geq 0.$$

Обобщение асимптотического представления (8) и результатов о строении высоких выбросов поля на случай, когда аргумент поля имеет размерность $m > 2$, дано в работе [7].

* В [2] при выводе выражения (45.34) для μ^+ допущена ошибка.

Для гауссовских полей отметим еще формулу для математического ожидания средней длины контура уровня a , приходящейся на единицу площади xOy , [3]*):

$$\mu(a) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{k_{22} + k_{33}}{k_{11}} \right)^{\frac{1}{2}} (1 + \gamma^2)^{-1/2} E(\sqrt{1 - \gamma^2}) e^{-a^2/2k_{11}},$$

в которой

$$\gamma = \frac{N_{\min}}{N_{\max}},$$

$$N_{\max}, N_{\min} = \frac{1}{\pi \sqrt{k_{11}}} \left[(k_{22} + k_{33}) \pm \sqrt{(k_{22} - k_{33})^2 + 4k_{23}^2} \right]^{1/2},$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Rise S. O. *Mathematical Analysis of Random Noise*.— Bell Syst. Tech. J., 23, 24, 1944, 1945.
2. Свешников А. А. *Прикладные методы теории случайных функций*. М., «Наука», 1968.
3. Лонге-Хиггинс М. С. *Статистический анализ случайной движущейся поверхности*.— В сб.: *Ветровые волны*. М., ИЛ, 1962.
4. Беляев Ю. К. *О всплесках и бликах случайных полей*.— ДАН СССР, 176, 3, 1967.
5. Беляев Ю. К. *Случайные множества всплесков и бликов случайных полей*.— Советско-Японский симпозиум по теории вероятностей, Хабаровск, 1969 г. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1969.
6. Носко В. П. *Локальная структура гауссовских случайных полей в окрестности высоких бликов*.— ДАН СССР, 189, 4, 1969.
7. Носко В. П. *Характеристики выбросов гауссовских однородных полей за высокий уровень*.— Советско-Японский симпозиум по теории вероятностей, Хабаровск, 1969 г., Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1969.

Yu. K. Belyaev, V. P. Nosko, A. A. Sveshnikov

PROBABILITY CHARACTERISTICS OF UPWARDS EXCURSIONS OF A TWO-DIMENSIONAL RANDOM FIELD

S u m m a r y

The two-side estimation for the mean number of contours, formed by crossing of the two-dimensional random field sample path with a horizontal plane is obtained.

The formulas for mean number of the shine and other stationary points are contained.

Поступила в редколлегию 13.I.1971.

*) Формула (45.62) [2] для $\mu(a)$ ошибочна.