В. В. БУЛДЫГИН, студ.
Киевский университет

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН СО ЗНАЧЕНИЯМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Пусть X — банахово пространство и топология в нем порождается множествами $\{x : \|x\| < \varepsilon\}$ и их сдвигами, X^* — пространство, сопряженное к X. Пусть $\{\Omega, F, P\}$ — вероятностное пространство. Под случайной величиной ξ понимаем измеримое отображение $\xi : \{\Omega, F, P\} \to \{X, \mathfrak{A}\}$, где $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра, порожденная открытыми подмножествами пространства X.

Случайная величина ξ индуцирует на $\{X, \mathfrak{A}\}$ вероятностную меру $\mu\{\cdot\}$. Будем говорить, что вероятностные меры μ_n, $n \geqslant 1$ равномерно компактны, если для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт K_ε такой, что для каждого n

$$\mu_n(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon.$$

Среднее значение $m = M\xi$ распределения вероятностей на банаховом пространстве определяется с помощью интеграла Петтиса. Говорят, что μ имеет среднее значение m, если $x^*(x)$ интегрируемо для любого $x^* \in X^*$ и если существует элемент $m \in X$, удовлетворяющий соотношению

$$x^*(m) = \int\limits_X x^*(x)\,\mu(dx)$$

для всех $x^* \in X^*$.

Согласно [4] (стр. 91—95), если $M\|\xi\| < \infty$, то $M\xi$ существует и $\|M\xi\| \leqslant M\|\xi\|$. Пусть $\xi_k(\omega)$, $k \geqslant 1$ — последовательность независимых случайных величин со значениями в X,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega)$$

и μ_n — вероятностная мера, индуцированная $S_n(\omega)$. Целью данной статьи является изучение условий, обеспечивающих сходимость S_n в топологии X с вероятностью единица. Подобные условия рассмотрены в работе [1], в частности, приведены следующие две теоремы.

Теорема А. Условия: a) S_n сходится почти наверное, b) S_n сходится по вероятности, c) μ_n сходится в смысле прохоровской метрики — эквивалентны.

Теорема В. Если $\xi_k(\omega)$ имеют симметричные распределения, то условия: a) S_n сходится почти наверное, b) $\{\mu_n\}$ равномерно компактны — эквивалентны.

В предлагаемой работе приводятся необходимые и достаточные условия, обеспечивающие сходимость S_n с вероятностью единица без предположения симметричности распределений.

2. Определим

$$A_\gamma(x^*) = \{x : x^*(x) > \gamma \|x\|\}, \tag{1}$$

где $1 > \gamma > 0$ и $x^* \in X^*$.

Так как для всех $x,\ y \in A_\gamma(x^*)$ $x + y \in A_\gamma(x^*)$ и для любого $\lambda > 0$ $\lambda x \in A_\gamma(x^*)$, то $A_\gamma(x^*)$ — открытый выпуклый конус в пространстве X. Для каждого $h \in X$ определим

$$hA_\gamma(x^*) = \{x:\ x - h \in A\gamma(x^*)\}, \tag{2}$$

т. е. $hA_\gamma(x^*)$ — сдвиг конуса $A_\gamma(x^*)$ вершиной в точку h.

Лемма 1. Для всех $hA_\gamma(x^*)$ и $\xi(\omega)$ имеет место неравенство

$$P\{\omega :\ \xi \in hA_\gamma(x^*), \|\xi\| > \varepsilon\} \leqslant \frac{2M[x^*(\xi)]^2}{\gamma^2[\varepsilon - \|h\|]^2} + \frac{2[x^*(h)]^2}{\gamma^2[\varepsilon - \|h\|]^2}. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть

$$B = \{\omega :\ \xi \in hA\gamma(x^*)\},$$
$$C = \{\omega :\ \|\xi - h\| > \varepsilon - \|h\|\},$$
$$D = \{\omega :\ \xi \in hA_\gamma(x^*), \|\xi\| > \varepsilon\},$$

I_A — индикатор множества A.

В силу очевидного неравенства

$$2[x^*(\xi)]^2 + 2[x^*(h)]^2 \geqslant [x^*(\xi - h)]^2$$

получаем

$$2M[x^*(\xi)]^2 + 2[x^*(h)]^2 \geqslant M[x^*(\xi - h)]^2 I_{B\cap C}.$$

Согласно определению $hA_\gamma(x^*)$, для всех $\omega \in B$ $\xi(\omega) - h \in A_\gamma(x^*)$, следовательно, $x^*(\xi - h) \geqslant \gamma\|\xi - h\|$, откуда следует, что

$$M[x^*(\xi - h)]^2 I_{B\cap C} \geqslant \gamma^2 M\|\xi - h\|^2 I_{B\cap C} \geqslant$$
$$\geqslant \gamma^2(\varepsilon - \|h\|)^2 P(B \cap C),$$

и

$$\frac{2M[x^*(\xi)]^2}{\gamma^2(\varepsilon - \|h\|)^2} + \frac{2[x^*(h)]^2}{\gamma^2[\varepsilon - \|h\|]^2} \geqslant P(B \cap C).$$

В силу очевидного неравенства

$$P\{\|\xi\| \geqslant \varepsilon\} \leqslant P\{\|\xi - h\| \geqslant \varepsilon - \|h\|\}$$

получаем $P(B \cap C) \geqslant P(D)$. Так как

$$P(D) = P\{\omega:\ \xi \in hA_\gamma(x^*),\ \|\xi\| > \varepsilon\},$$

то лемма доказана.

Следствие 1. Для произвольных $A_\gamma(x^*)$ и $\xi(\omega)$ имеет место неравенство

$$P\{\omega:\ \xi \in A_\gamma(x^*), \|\xi\| > \varepsilon\} \leqslant \frac{2M[x^*(\xi)]^2}{\gamma^2\varepsilon^2}. \tag{4}$$

Неравенство (4) следует из неравенства (3), если положить $h = 0$.

Для каждого $x \in X$ в силу теоремы Хана — Банаха существует $l_x \in X^*$ такой, что

$$l_x(x) = \|x\|, \quad \|l_x\| = 1. \tag{5}$$

Для произвольного множества $M \subset X$ определим

$$L(M) = \bigcup_{x \in M} l_x. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что

$$X = \bigcup_{x^* \in L(X)} A_\gamma(x^*).$$

Если X сепарабельное, то имеет место следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $\dot{X} = X \setminus \{0\}$ — прокол пространства X в 0 и R — множество сепарабельности в X, тогда существуют $\{x_n^*, n \geqslant 1\} \in L(R)$ и $\gamma \in (0, 1)$ такие, что $\dot{X} = \bigcup_n A_\gamma(x_n^*)$.

Доказательство. Рассмотрим $S_\varepsilon(x) = \{y : \|y - x\| < \varepsilon\}$, где $x \in R$. По определению $L(R)$, существует $l_x \in L(R)$ такой, что выполняются условия (5).

Для каждого $y \in S_\varepsilon(x)$ имеют место неравенства

$$|l_x(x - y)| \leqslant \|l_x\| \|x - y\| < \varepsilon, \tag{7}$$

$$\|y\| - \varepsilon < \|x\| < \|y\| + \varepsilon. \tag{8}$$

Так как $l_x(x) = \|x\|$, то из (7), (8) получаем

$$l_x(y) > \|y\| - 2\varepsilon,$$

т. е. для $y \in S_\varepsilon(x) \setminus \{0\}$ имеет место неравенство

$$l_x(y) > \|y\| \left(1 - \frac{2\varepsilon}{\|y\|}\right). \tag{9}$$

Пусть $\tilde{S}_r(0) = \{x : \|x\| = r\}$. Поскольку $\bigcup_{x \in R} S_\varepsilon(x)$ покрывает все пространство X, то существуют $S_\varepsilon(x_n)$ такие, что $S_\varepsilon(x_n) \cap \tilde{S}_r(0) \neq \varnothing$ и

$$\tilde{S}_r(0) \subset \bigcup S_\varepsilon(x_n). \tag{10}$$

Для каждого $y \in S_n$ имеет место неравенство

$$r - 2\varepsilon \leqslant \|y\|, \tag{11}$$

поэтому из (9), (11) следует, что для $y \in S_n$

$$l_{x_n}(y) > \left(1 - \frac{2\varepsilon}{r - 2\varepsilon}\right) \|y\|.$$

Положим $\gamma = 1 - \frac{2\varepsilon}{r - 2\varepsilon}$ и выберем r так, чтобы $r > 4\varepsilon$, тогда $1 > \gamma > 0$ и для $y \in S_n$

$$l_n(y) = l_{x_n}(y) > \gamma \| y \| ,$$

т. е.

$$S_n = S_\varepsilon(x_n) \subset A_\gamma(l_n).$$

Пусть $C \subset X$ и $Q(C) = \{y : y = \lambda x,\ x \in C,\ \lambda > 0\}$, тогда $Q(S_n) \subset \subset A_\gamma(l_n)$. В силу (10)

$$Q(\tilde{S}_r(0)) \subset Q(\bigcup_n S_n) \subset \bigcup_n A_\gamma(x^*{}_n),$$

но $Q(\tilde{S}_r(0)) = X$, следовательно,

$$\dot{X} = \bigcup_n A_\gamma(l_n).$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Пусть $\bar{A}_\gamma(x_n^*) = \{x : |x_n^*(x)| \geqslant \gamma \|x\|\}$, т. е. $\bar{A}_\gamma(x_n^*)$ — замыкание $A_\gamma(x_n^*)$, тогда

$$x = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_\gamma(x^*{}_n).$$

Лемма 3. Если K — компактное множество в X, то существует конечное число конусов $A_\gamma(x_n^*)$, $n = \overline{0,\ m(K)}$ и $h_0 \in X$, такие, что

$$K \subset h_0 A_\gamma(x_0^*) \cup [\bigcup_{n=1}^{m(K)} A_\gamma(x^*{}_n)]\cdot$$

Доказательство. В силу леммы 2

$$\dot{X} = \bigcup_n A_\gamma(x^*{}_n).$$

Возьмем произвольный конус $A_\gamma(x_0^*)$ и $h_0 \in X$ так, чтобы $-h_0 \in A_\gamma(x_0^*)$, тогда $h_0 A_\gamma(x_0^*) \supset A_\gamma(x_0^*)$ и $0 \in h_0 A_\gamma(x_0^*)$, следовательно,

$$X = h_0 A_\gamma(x_0^*) \cup [\bigcup_{n=1}^{\infty} A_\gamma(x_n^*)].$$

Так как $h_0 A_\gamma(x_0^*)$ и $A_\gamma(x_n^*)$, $n \geqslant 1$ — открытые множества, объединение которых покрывает K, то в силу компактности K можно выбрать конечное подпокрытие. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть K — компактное множество сепарабельного банахова пространства X. Тогда существуют $\gamma \in (0, 1)$, $h_0 \in X$ и $x_n^* \in L(R)$, $n = \overline{0,\ m(K)}$ такие, что имеет место неравенство

$$P\{\omega: \|\xi\| > \varepsilon,\ \xi \in K\} \leqslant \frac{1}{\gamma^2 \varepsilon^2} \sum_{n=1}^{m(K)} M[x_n^*(\xi)]^2 + \\ + \frac{M[x_0(\xi)]^2 + [x_0(h)]^2}{\gamma^2 [\varepsilon - \|h_0\|]^2}. \tag{12}$$

Замечание 2. Для произвольного банахова пространства неравенство (12) также имеет место, но $x_n^* \in L(X)$.

3. Пусть $\xi_k(\omega)$, $k \geqslant 1$ — последовательность независимых случайных величин со значениями в сепарабельном банаховом пространстве X, R — множество сепарабельности в X, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ и μ_n — мера, индуцированная S_n.

Теорема 1. Если: 1) $\{\mu_n\}$ равномерно компактны, 2) $M\xi_k = 0$, $k \geqslant 1$, 3) для всех $x^* \in L(R)$ $\sum_{k=1}^{\infty} M[x^*(\xi_k)]^2 < \infty$, то S_n сходится почти наверное в смысле нормы пространства X.

Доказательство. Заметим, что если вероятностные меры μ_n, индуцированные S_n, равномерно компактны, то меры μ_{nm}, индуцированные $S_n - S_m$, также равномерно компактны. В силу этого для любого $\delta > 0$ существует компакт K_δ такой, что для всех n, m

$$\mu_{nm}(K_\delta) > 1 - \frac{\delta}{4}.$$

Оценим вероятность события $\{\omega: \|S_n - S_m\| > \varepsilon\}$. Так как

$$P\{\omega: \|S_n - S_m\| > \varepsilon\} = P\{\omega: \|S_n - S_m\| > \varepsilon,\ S_n - S_m \in K_\delta\} +$$
$$+ P\{\omega: \|S_n - S_m\| > \varepsilon,\ S_n - S_m \bar{\in} K_\delta\} \leqslant P\{\omega: S_n - S_m \bar{\in} K_\delta\} +$$
$$+ P\{\omega: \|S_n - S_m\| > \varepsilon,\ S_n - S_m \in K_\delta\},$$

то, используя лемму 4, имеем

$$P\{\|S_n - S_m\| > \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\gamma^2\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{N} M[x_k^*(S_n - S_m)]^2 +$$
$$+ \frac{M[x_0^*(S_n - S_m)]^2}{\gamma^2[\varepsilon - \|h\|]^2} + \frac{\|h\|^2}{\gamma^2[\varepsilon - \|h\|]^2} + \frac{\delta}{4}.$$

В силу условия 2)

$$P\{\|S_n - S_m\| > \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\gamma^2\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=m}^{n} M[x_k^*(\xi_i)]^2 +$$
$$+ \frac{\sum_{i=n}^{m} M[x_0^*(\xi_i)]^2}{\gamma^2[\varepsilon - \|h\|]^2} + \frac{\|h\|^2}{\gamma^2[\varepsilon - \|h\|]^2} + \frac{\delta}{4}. \tag{13}$$

Для фиксированных ε и δ подбираем h так, чтобы

$$\frac{\|h\|^2}{\gamma^2[\varepsilon - \|h\|]^2} < \frac{\delta}{4}.$$

Из условия 3) следует, что существует такое число N, что для всех n, $m > N$ первые два члена неравенства по абсолютной величине меньше $\frac{\delta}{4}$, т. е. $P\{\|S_n - S_m\| > \varepsilon\} < \delta$. В силу произвольности δ

получаем, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n,m\to\infty} P\{\|S_n - S_m\| > \varepsilon\} = 0,$$

т. е. $\sum \xi_k$ сходится по вероятности и в силу теоремы А почти наверное. Теорема доказана.

Теорема 2. Если $M\xi_k = 0$, $k \geqslant 1$ и для всех $x^* \in L(R)$ $\sup_k |x^*(\xi_k)| < c(x^*) < \infty$, то условия: 1) S_n сходится почти наверное в смысле нормы пространства X, 2) $\{\mu_n\}$ равномерно компактны — эквивалентны.

Доказательство. Пусть $\xi_k^s = \xi_k - \xi_k'$, где ξ_k' — независимая одинаково распределенная с ξ_k случайная величина. Легко видеть, что ξ_k^s имеет симметричное распределение, т. е.

$$P\{\xi_k^s \in A\} = P\{\xi_k^s \in -A\}.$$

Из условия 2) теоремы 2 следует, что вероятностные меры μ_n^s, индуцированные суммами $S_n^s = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^s$, равномерно компактны и в силу теоремы В S_n^s сходится почти наверное.

В силу слабой ограниченности ξ_k на функционалах, принадлежащих $L(R)$, для всех $x^* \in L(R)$ сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} M[x^*(\xi_k)]^2.$$

Используя теорему 1, получаем, что в теореме 2 1) следует из 2). Обратное утверждение, очевидно, следует из теоремы А. Теорема доказана.

Сопоставим каждому функционалу $x^* \in L(R)$ некоторое действительное число $c(x^*) < \infty$ и рассмотрим множество

$$c^* = \{c(x^*),\ x^* \in L(R)\}.$$

Будем говорить, что ξ^{c^*} есть слабое усечение ξ на $L(R)$, порожденное множеством c^*, если

$$\xi^{c^*} = \begin{cases} \xi, & \forall\, x^* \in L(R) \ |x^*(\xi)| \leqslant c(x^*) \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $S_n^{c^*}$ обозначает $\sum_{k=1}^{n} \xi_k^{c^*}$ и $\mu_n^{c^*}$ — мера, индуцированная $S_n^{c^*}$. Известно, что для эквивалентной сходимости рядов $\sum \xi_k$ и $\sum \xi_k^{c^*}$ достаточно, чтобы

$$\sum P\{\xi_k \neq \xi_k^{c^*}\} < \infty.$$

Так как

$$\{\omega: \xi_k \neq \xi_k^{c^*}\} = \bigcup_{x^* \in L(R)} \{\omega: |x^*(\xi_k)| > c(x^*)\},$$

то условие эквивалентной сходимости принимает вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{\bigcup_{x^*\in L(R)} [|x^*(\xi_k)| > c(x^*)]\} < \infty. \tag{14}$$

Заметим, что если $\inf\limits_{x^*\in L(R)} c(x^*) > c$, то справедливо неравенство

$$P\{\|\xi_k\| > c\} \geqslant P\{\bigcup_{x^*\in L(R)} [|x^*(\xi_k)| > c(x^*)]\}. \tag{15}$$

Лемма 5. Если ряд $\sum \xi_k$ сходится почти наверное для всех $x^* \in L(R)$ $|x^*(\xi_k)| < c(x^*)$ и $\{MS_n\}$ — компактное множество в X, то $\sum M\xi_k$ сходится в смысле нормы пространства X.

Заметим, что если μ_n, $n \geqslant 1$ равномерно компактны и $\{MS_n\}$ — компактное множество, то меры, индуцированные случайными величинами $S_n - S_m - M(S_n - S_m)$, также равномерно компактны. Учитывая замечание, доказательство леммы проводим аналогично доказательству леммы (16.3б) [3].

Теорема 3. Пусть $\xi_k(\omega)$, $k \geqslant 1$ — последовательность независимых случайных величин со значениями в сепарабельном банаховом пространстве X. Для того чтобы ряд $\sum \xi_k(\omega)$ сходился в смысле нормы пространства X с вероятностью единица, достаточно, чтобы при некотором $c^* = \{c(x^*), x^* \in L(R)\}$, и необходимо, чтобы при любом $c^* = \{c(x^*), x^* \in L(R)\}$, таком, что $\inf\limits_{c^*} c(x^*) > 0$ и $\{MS_n^{c^*}\}$ — компактное множество в X, выполнялись следующие условия: 1) $\{\mu_n^{c^*}\}$ — равномерно компактны, 2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P\{\bigcup\limits_{x^*\in L(R)} [|x^*(\xi_k)| > c(x^*)]\} < \infty$, 3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} M\xi_k^{c^*}$ — сходится в смысле нормы пространства X.

Доказательство теоремы 3 следует из теоремы 2 и леммы 6 и проводится аналогично доказательству теоремы о трех рядах [3].

Следствие 2. Если выполняются условия: 1) $\{\mu_n^c\}$ — равномерно компактны, 2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P\{\|\xi_k\| > c\} < \infty$, 3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} M\xi_k^{c^*}$ сходится в смысле нормы пространства X, то ряд $\sum \xi_k(\omega)$ сходится в смысле нормы пространства X с вероятностью единица.

Доказательство следует из теоремы 3, если положить $c(x^*) = c$ для всех $x^* \in L(R)$.

4. Рассмотрим пространство $C[0, 1]$ с нормой $\|x(t)\| = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)|$. Полиномы $p_n(t)$ с рациональными коэффициентгми образуют множество сепарабельности в $C[0, 1]$. Определим на $C[0, 1]$ функционал δ_{t_0} так, чтобы $\delta_{t_0}(x(t)) = x(t_0)$. Легко видеть, что $\|\delta_{t_0}\| = 1$.

Сопоставим каждому полиному функционал $p_n(t)$ так, чтобы

$$\delta_{t_n}(p_n(t)) = p_n(t_n) = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} p_n(t) = \|p_n(t)\|.$$

Из определения $L(R)$ следует, что $L(\{p_n\}) = \bigcup \delta_{t_n}$. Пусть $\xi_k(t)$, $k \geq 1$ — последовательность независимых случайных процессов, реализации которых с вероятностью единица принадлежат $C[0, 1]$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Если $M\xi_k(t) = 0$, $k \geq 1$ и выполняются условия: 1) $\{\mu_n\}$ равномерно компактны, 2) для каждого δ_{t_n} $\sum_{k=1}^{\infty} M[\delta_{t_n}(\xi_k)]^2 < < \infty$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t)$ равномерно сходится с вероятностью единица.

Легко видеть, что теорема 4 является частным случаем теоремы 1.

Лемма 6. Если $S_n(t)$, $n \geq 1$ — последовательность случайных процессов, реализации которых с вероятностью единица принадлежат $C[0, 1]$, и если выполняются следующие условия: существует число $H_\varepsilon > 0$ и $t \in [0, 1]$ такие, что для всех n

$$P\{\omega: |S_n(t)| > H_\varepsilon\} < \varepsilon; \tag{16}$$

для всех $t \in [0, 1]$ и n

$$M|S_n(t+h) - S_n(t)|^2 \leqslant k\varphi(h), \tag{17}$$

где $k > 0$, $\beta > 0$ и функция $\varphi(h)$ такая, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^m m^{2(1+\beta)} \varphi\left(\frac{1}{2^m}\right) < \infty, \tag{18}$$

то меры $\{\mu_n\}$, индуцированные S_n, равномерно компактны. Доказательство см. [5].

Замечание 3. Условию (18) удовлетворяют, в частности, функции

$$\varphi(h) = |h|^{1+\varepsilon}, \quad \varphi(h) = \frac{|h|}{|\ln|h||^{3+\varepsilon}}.$$

Теорема 5. Если $\xi_k(t)$, $k \geq 1$ — последовательность независимых случайных процессов, реализации которых с вероятностью единица принадлежат $C[0, 1]$, $M\xi_k(t) = 0$, $k \geq 1$ и $M|\xi_k(t+h) - \xi_k(t)|^2 \leqslant c_k\varphi(h)$, где $\varphi(h)$ удовлетворяет условию (18), то для того чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t)$ равномерно сходился с вероятностью единица, достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) для всех $t \in [0,1]$ $\sum_k M\xi_k^2(t) < \infty$;

2) $\sum_k c_k < \infty$,

Доказательство следует из теоремы 4 и леммы 6.

Следствие 3. Если $\xi_k(t) = \xi_k f_k(t)$, где ξ_k, $k \geq 1$ — независимые случайные величины, а $f_k(t) \in C[0, 1]$, то для равномерной сходимости ряда $\sum \xi_k(t)$ с вероятностью единица достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$|f_k(t+h) - f_k(t)|^2 \leqslant c_k\varphi(h)$$

(где $\varphi(h)$ удовлетворяет условию (18)),

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k M|\xi_k|^2 < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\sup_{0\leq t\leq 1} |f_k(t)|]^2 M|\xi_k|^2 < \infty.$$

В заключение автор приносит глубокую благодарность Ю. М. Рыжову и Ю. В. Козаченко за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ito K., Nisio M. On the converegence of sums of independent Banach space valued random variables.— Osaka Journ. of Math., 5, 1, June, 1968.
2. Иосида К. Функциональный анализ. «Мир», М., 1967.
3. Лоэв М. Теория вероятностей. ИЛ, М., 1962.
4. Хилле, Филипс. Функциональный анализ и полугруппы. ИЛ, М., 1965.
5. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. «Наука», М., 1965.

V. V. Buldigin

ON CONVERGENCE OF THE SERIES OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES WITH VALUES IN BANACH SPACE

Summary

Necessary and sufficient conditions of convergence almost surely of the series of independent random variables with values in Banach space are considered.

Поступила в редколлегию 15.IV.1970.