В. Л. ГИРКО, инж.
Киев

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СЛУЧАЙНОГО ДЕТЕРМИНАНТА. II

Приведем несколько определений.

Случайные величины $\xi_p^{(n)}$ называются бесконечно малыми, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{1\leqslant p\leqslant n} P\{|\xi_p^{(n)}| \geqslant \varepsilon\} = 0. \tag{1}$$

Преобразованием Меллина функции распределения $F(x)$ случайной величины $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ будем называть интеграл

$$m(t) = \int_0^\infty x^t dF(x) = M\xi^t, \ t \geqslant 0.$$

Заметим, что $m(t)$ равно преобразованию Лапласа случайной величины $-\ln \xi$.

Заданная на $(0, \infty)$ функция $\varphi(x)$ называется вполне монотонной, если она имеет производные $\varphi^{(k)}(x)$ всех порядков и

$$(-1)^k \varphi^{(k)}(x) \geqslant 0, \ x > 0.$$

Под сходимостью функций распределения будем понимать слабую сходимость.

Для определенности будем считать, что вектор-столбики случайной матрицы, расположенные выше диагонали, бесконечно малы.

Лемма 2. Пусть для некоторой случайной величины $\xi \geqslant 0$ существуют $M\xi^k = \mu_k$ и такая функция $m(t)$, что $m(k) = \mu_k$, $k = 1, 2, \ldots$

Для того чтобы $M\xi^t = m(t)$, $t > 0$ и $\xi \leqslant 1$ с вероятностью 1, необходимо и достаточно, чтобы $m(t)$ была вполне монотонной и $m(0) = 1$.

Доказательство. По теореме Бернштейна ([1], стр. 505), функция $m(t)$, $t \geqslant 0$ тогда и только тогда будет преобразованием Лапласа некоторой случайной величины $\eta \geqslant 0$, когда она вполне монотонна и $m(0) = 1$. Отсюда вытекает необходимость условий леммы 2.

Докажем достаточность. Так как $M \exp(-t\eta) = m(t)$, $t > 0$, то случайные величины $e^{-\eta}$ и ξ имеют одинаковые моменты. Тогда из расходимости ряда Карлемана ([1], стр. 282) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m(2k)^{-\frac{1}{2k}}$ следует, что случайные величины $e^{-\eta}$ и ξ имеют одинаковые единственные функции распределения. Лемма 2 доказана.

Теорема 3. Пусть для каждого n случайные величины $\xi_{pe}^{(n)}$, $p \geqslant e$, p, $e = \overline{1, n}$ независимы и бесконечно малы.

Для сходимости функций распределения случайных величин $\varkappa_n = [\det(I + rB_n^2)]^{-1}$ при любом $r > 0$ к предельной необходимо и достаточно, чтобы при любом $r > 0$ к предельной функции распределения сходились функции распределения случайных величин

$$\theta_n = \prod_{p=1}^{n} \left(1 + r \sum_{e=p+1}^{n} \nu_{pe}^2\right)^{-2} (1 + r\nu_{pp}^2)^{-1}.$$

Здесь $B_n = (\nu_{pe})$ — симметричная, квадратная матрица n-го порядка,

$$\nu_{pe} = \xi_{pe}^{(n)} - \lambda_{pe}, \quad \lambda_{pe} = \int\limits_{|x|<\tau} x d\Phi_{pe}(x),$$

где $\Phi_{pe}(x) = P\{\xi_{pe}^{(n)} < x\}$, $\tau > 0$ — постоянное число.

Предельные функции распределения для обеих последовательностей совпадают. Преобразование Меллина предельной функции распределения равно

$$\lim_{n\to\infty} M\varkappa_n^t = \lim_{n\to\infty} \prod_{p=1}^{n} M_{\exp}\left\{ \sum_{e=p+1}^{n} \int (e^{-rx^2\gamma_t} - 1)\, dF_{pe}(x) + \right.$$

$$\left. + \int [(1 + rx^2)^{-t} - 1]\, dF_{pp}(x)\right\}, \tag{2}$$

где γ_t — случайная величина с гамма-плотностью

$$\frac{1}{\Gamma(2t)} x^{2t-1} e^{-x}, \quad x > 0, \ t > 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как [3]

$$M\varkappa_n^{\frac{1}{2}} = M\exp\{i\sqrt{r} \hat{\sum} \nu_{pe} (\eta_p^{(1)} \eta_e^{(1)} - \zeta_p^{(1)} \zeta_e^{(1)})\},$$

и $0 \leqslant \varkappa_n \leqslant 1$, то из сходимости функций распределения $\varkappa_n$ к предельной для любого $r > 0$ следует сходимость $M\varkappa_n^{\frac{1}{2}}$ ([1], стр. 306), следовательно, и сходимость функций распределения случайных величин $\rho_n = \hat{\sum} \nu_{pe}(\eta_p^{(1)} \eta_e^{(1)} - \zeta_p^{(1)} \zeta_e^{(1)})$. Отсюда легко получить [2]

$$\hat{\sum} M \frac{\nu_{pe}^2}{1 + \nu_{pe}^2} < C, \tag{3}$$

где $C < \infty$ — некоторое постоянное число.

Далее [3],

$$\mu_{kn} = M(G_k / R_n \leqslant \varepsilon_n) P(R_n \leqslant \varepsilon_n) + M(G_k / R_n > \varepsilon_n) P(R_n > \varepsilon_n), \tag{4}$$

где

$$G_k = M\left[\exp\left(i\sqrt{r}\,\hat{\sum}\nu_{pe}\beta_{pe}\right)/\beta_{pe},\ p, e=\overline{1, n}\right],$$

$$R_n = \hat{\sum}\left(|\alpha_{pe}|^2 + |M_p\alpha_{pe}|^2\right) + \left|\hat{\sum}(\alpha_{pe} - M_p\alpha_{pe})\right|,$$

$$M_p\alpha_{pe} = M\left(\alpha_{pe}/\eta_e^{(m)}, \zeta_e^{(m)},\ m=\overline{1,2K}\right),$$

$$\varepsilon_n > 0,\ \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0.$$

Аналогично, как и при доказательстве теоремы 1 [3], начиная с некоторого n получим при условии, что $R_n \leqslant \varepsilon_n$,

$$|\ln G_k - \hat{\sum} M_p\alpha_{pe}| \leqslant R_n, \qquad |\ln G_k - \hat{\sum}\ln(1+M_p\alpha_{pe})| \leqslant$$

$$\leqslant |\ln G_k - \hat{\sum} M_p\alpha_{pe}| + |\hat{\sum} M_p\alpha_{pe} - \hat{\sum}\ln(1+M_p\alpha_{pe})| \leqslant R_n.$$

Из [2] (стр. 121, 104) для любого $\varepsilon > 0$ следует

$$|\alpha_{pe}| \leqslant \sqrt{r}\,\varepsilon\,|\beta_{pe}| + 2P\{|\nu_{pe}| \geqslant \varepsilon\},\quad |\alpha_{pe}| \leqslant T_{pe}(\beta_{pe}, \tau),$$

$$T_{pe}(\beta_{pe}, \tau) = \frac{r}{2}|\beta_{pe}|^2 \int\limits_{|x|<\tau} x^2\,dF_{pe}(x) + 2\int\limits_{|x|\geqslant\tau} dF_{pe}(x) +$$

$$+\sqrt{r}\,|\beta_{pe}|\left|\int\limits_{|x|<\tau} x\,dF_{pe}(x)\right|.$$

Тогда ([2], стр. 122), используя (3), при достаточно больших n получим

$$\hat{\sum} T_{pe}(1, \tau) \leqslant \left\{r\frac{1+\tau^2}{2} + 2\frac{1+\tau^2}{\tau^2} + 2\sqrt{r}\,\frac{4+\tau^2}{\tau}\right\}C = c(\tau, r). \quad (5)$$

Поэтому

$$\hat{\sum} M|\alpha_{pe}| \leqslant M|\beta_{pe}|^2 c(\tau, r), \tag{6}$$

$$\sum_{p=1}^{n} M\left(\sum_{e=p}^{n}|\alpha_{pe}|\right)^3 \leqslant M|\beta_{pe}|^4 \sum_{p=1}^{n} d_p^2, \tag{7}$$

$$\hat{\sum} M|\alpha_{pe}|^2 \leqslant M|\beta_{pe}|^3\left[\sqrt{r}\,\varepsilon + 2\sup_{1\leqslant p,e\leqslant n} P\{|\nu_{pe}| \geqslant \varepsilon\}\right]c(\tau, r),$$

где $d_p = \sum\limits_{e=p}^{n} T_{pe}(1, \tau)$.

Отсюда, используя (1), получаем

$$\lim_{n\to\infty}\hat{\sum} M|\alpha_{pe}|^2 = 0. \tag{8}$$

Из (5) следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ среди d_p, $p=\overline{1, n}$ найдется только $m \leqslant \frac{c(\tau, r)}{\varepsilon}$ чисел, каждое из которых больше ε. Тогда, используя (7) и (8), получаем

$$M\left|\hat{\sum}(\alpha_{pe}-M_p\alpha_{pe})\right|\leqslant\sum_{e=1}^{m}\sqrt{M\left|\sum_{p=e}^{n}(\alpha_{pe}-M_p\alpha_{pe})\right|^2}+$$

$$+\sqrt{M\left|\sum_{e=m+1}^{n}\sum_{p=e}^{n}(\alpha_{pe}-M_p\alpha_{pe})\right|^2}\leqslant\sum_{e=1}^{m}\sqrt{M\sum_{p=e}^{n}|\alpha_{pe}|^2}+$$

$$+\varepsilon\sqrt{M|\beta_{pe}|^4 c(\tau, r)}.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} M\left|\hat{\sum}(\alpha_{pe}-M_p\alpha_{pe})\right|=0. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует $\lim\limits_{n\to\infty} MR_n=0$. Выбрав $\varepsilon_n=(MR_n)^\delta$, $0<\delta<1$, получим $P(R>\varepsilon_n)\leqslant(MR_n)^{1-\delta}$. Тогда из (4) следует [3]

$$\lim_{n\to\infty}\left|\mu_{kn}-M\exp\left(\hat{\sum} M_p\alpha_{pe}\right)\right|=0, \tag{10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\mu_{kn}-M\hat{\prod}(M_p\alpha_{pe}+1)\right|=0. \tag{11}$$

Очевидно, что

$$M_p\alpha_{pe}=\int\left[\exp\left\{-rx^2\sum_{m=1}^{2k}\left(\eta_e^{(m)}\right)^2+\left(\zeta_e^{(m)}\right)^2\right\}-1\right]dF_{pe}(x),\quad p\neq e,$$

$$M_p\alpha_{pp}=M\left[(1+r\nu_{pp}^2)^{-k}-1\right],\quad M\hat{\prod}(M_p\alpha_{pe}+1)=M\theta_n^k, \tag{12}$$

$$M\exp\left(\hat{\sum} M_p\,\alpha_{pe}\right)=\prod_{p=1}^{n} M\exp\left\{-\sum_{e=p+1}^{n}\int(e^{-rx^2\nu_k}-1)\,dF_{pe}(x)-\right.$$

$$\left.-\int\left[(1+rx^2)^{-k}-1\right]dF_{pp}(x)\right\}=L_n(k).$$

Так как $0\leqslant\theta_n\leqslant1$, то из (11) и (12) следует необходимость условий теоремы и совпадения предельных функций распределения для обеих последовательностей ([1], стр. 306).

Очевидно, что

$$L_n(k)=M\prod_{p=1}^{n}(1+r\eta_p^2)^{-2k}\exp\left\{M(1+r\nu_{pp}^2)^{-k}-1\right\},$$

где η_p^2 — случайная величина с преобразованием Лапласа

$$Me^{-t\eta_p^2}=\exp\left\{-\sum_{e=p+1}^{n}\int(e^{-tx^2}-1)\,dF_{pe}(x)\right\},\quad t\geqslant0.$$

Согласно свойствам вполне монотонных функций ([1], стр. 507), $L_n t$ — вполне монотонная функция. Тогда по теореме Бернштейна $L_n(k)=M\exp(-k\zeta_n)$, где $\zeta_n\geqslant0$ — некоторая случайная величина. Поэтому из сходимости $L_n(k)$ следует сходимость функций распределения ζ_n к предельной, следовательно, и сходимость $L_n(t)$. Ясно, что $m(t) = \lim\limits_{n\to\infty} L_n(t)$ — вполне монотонная функция и $m(0) = 1$. Отсюда, пользуясь леммой 2 и (10), получаем (2).

Докажем достаточность условий теоремы. Так как

$$M\theta_n^{\frac{1}{2}} = M\exp\left\{i4\sqrt{r}\,\hat{\sum}\,\nu_{pe}z_p^2y_{pe}\right\},$$

где z_p, y_{pe}, $p \geqslant e$, p, $e = 1, 2, \ldots$ — независимые случайные величины, одинаково распределенные по нормальному закону с $Mz_1 = 0$, $Dz_1 = \frac{1}{2}$, и $0 \leqslant \theta_n \leqslant 1$, то из сходимости функций распределения θ_n к предельной при любом $r > 0$ следует сходимость функций распределения случайных величин $\hat{\sum}\nu_{pe}z_p^2y_{pe}$. Отсюда, так же как и при доказательстве необходимости условий, получаем (3).

Дальше доказательство аналогично доказательству необходимости условий теоремы 3. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть случайные величины ξ_{pe}, $p \geqslant e$, p, $e = 1, 2, \ldots$ независимы и одинаково распределены. Для того, чтобы при некотором подборе постоянных b_n и c_n функции распределения случайных величин $\varkappa_n = [\det(I + rD_n^2)]^{-1}$ сходились к предельной при любом $r > 0$, необходимо и достаточно, чтобы при любом $r > 0$ к предельной функции распределения сходились функции распределения случайных величин $\prod\limits_{p,e=1}^{n}(1 + r\nu_{pe}^2)^{-1}$ где $D_n = (\nu_{pe})$ — симметричная, квадратная матрица n-го порядка, $\nu_{pe} = \dfrac{\xi_{pe} - c_n}{b_n}$.

Предельные функции распределения для обеих последовательностей совпадают. Преобразование Меллина предельной функции распределения равно

$$\lim_{n\to\infty} M\varkappa_n^t = \exp\left\{-cr^{\frac{\alpha}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+4t}{2}\right)}{\Gamma(2t)}\right\},$$

где $0 < \alpha \leqslant 2$, $c \geqslant 0$ — некоторое постоянное число.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 3 с той лишь разницей, что везде надо $M_p\alpha_{pe}$ заменить на $M\alpha_{pe}$. Заметим, что тогда все d_p, $p = \overline{1, n}$ стремятся к нулю при $n \to \infty$. Поэтому

$$M\left|\hat{\sum}(\alpha_{pe} - M\alpha_{pe})\right| \leqslant \sqrt{M|\beta_{pe}|^4\sum_{p=1}^{n}d_p^2} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Преобразование Меллина предельной функции распределения в этом случае равно

$$\lim_{n\to\infty} M\varkappa_n^t = \lim_{n\to\infty}\exp\left\{\hat{\sum} M[(1 + r\nu_{pe}^2)^{-2t} - 1] + \sum_{p=1}^{n} M[(1 + r\nu_{pp}^2)^{-t} - 1]\right\}.$$

Очевидно,

$$\sum_{p=1}^{n} M[(1+r\nu_{pp}^2)^{-k}-1]=nM\alpha_{11}.$$

Из (6) ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} nM\alpha_{11}=0$. Поэтому из сходимости преобразований Меллина следует сходимость

$$\rho_n=\int[(1+rx^2)^{-2t}-1]\frac{1+x^2}{x^2}\,dG_n(x),$$

где

$$G_n(u)=\frac{n(n-1)}{2}\int_{-\infty}^{u}\frac{x^2}{1+x^2}\,dF_{11}(x).$$

Как и в [2], получим, что из сходимости ρ_n следует слабая сходимость $G_n(x)$ к неубывающей функции $G(x)$ ограниченной вариации. Отсюда следует сходимость характеристических функций сумм

$$\zeta_n=\hat{\sum}\frac{\xi_{pe}-c_n}{b_n}.$$

Поэтому функции распределения случайных величин ζ_n сходятся к предельной [2]. Тогда предельная функция распределения будет устойчивой.

Отсюда, меняя порядок интегрирования, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n=\int M\left(e^{i\sqrt{r\gamma_t}\eta x}-1-\frac{i\sqrt{r\gamma_t}\eta x}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)=$$

$$=\left\{-cr^{\frac{\alpha}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+4t}{2}\right)}{\Gamma(2t)}\right\},$$

где η — случайная величина, распределенная по нормальному закону с $M\eta=0$, $D\eta=2$. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Пусть для каждого n случайные величины $\nu_{pe}^{(n)}$, $p\geqslant e$, p, $e=\overline{1,\ n}$ независимы, имеют нулевые математические ожидания и конечные дисперсии σ_{pe}^2, $\hat{\sum}\sigma_{pe}^2\leqslant B$, существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{p=1}^{n}\sigma_{pp}^2=c$ и выполняется условие Линдеберга: для любого $\tau>0$

$$K_n=\hat{\sum}\int_{|x|>\tau}x^2\,dF_{pe}(x)\to 0 \text{ при } n\to\infty. \tag{13}$$

Тогда

$$\operatorname{Re}\ln[C_n\det(I+iA_n)]\xrightarrow{p}0,$$

$$\lim_{n\to\infty}P\{\operatorname{Im}\ln[C_n\det(I+iA_n)]<z\}=\int_{-\infty}^{z}p(x)\,dx,$$

где $A_n = (\nu_{pe})$ — симметричная, квадратная матрица n-го порядка,

$$F_{pe}(x) = P(\nu_{pe} < x),\ C_n = \exp\left(-\sum_{p=1}^{n} \sigma_{pp}^2\right) \prod_{p=1}^{n} \left(1 + \sum_{e=p+1} 2\sigma_{pe}^2\right)^{-1},$$

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi c}} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{4c}(x + 2k\pi)^2\right\}, & x \in (-\pi, \pi), \\ 0 & x \in (-\infty, -\pi] \cup [\pi, \infty). \end{cases}$$

Доказательство. Из [3] следует

$$\mu_{kn} = M[\det(I + iA_n)]^{-k} = M(G_k/R_n \leqslant \varepsilon_n) P(R_n \leqslant \varepsilon_n) + \\ + M(G_k/R_n > \varepsilon_n) P(R_n > \varepsilon_n),$$

где

$$G_k = M\left|\exp\left\{i\hat{\sum} \nu_{pe}\rho_{pe}\right\} / \rho_{pe},\ p,\ e = \overline{1, n}\right|,$$

$$\rho_{pe} = \gamma_{pe} \sum_{m=1}^{2k} \eta_p^{(m)} \eta_e^{(m)},$$

$$R_n = \hat{\sum} T_{pe} + P_n, \qquad T_{pe} = \int_{|x\rho_{pe}| > \tau} x^2 \rho_{pe}^2 \, dF_{pe}(x),$$

$$P_n = \left|\hat{\sum} \sigma_{pe}^2 (\rho_{pe}^2 - M_p \rho_{pe}^2)\right|,\ \varepsilon_n > 0,\ \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0. \tag{14}$$

Тогда для достаточно больших n при условии, что $R_n \leqslant \varepsilon_n$,

$$L_n = \left|\ln G_k + \hat{\sum} \sigma_{pe}^2 M_p \rho_{pe}^2\right| \leqslant \left|\ln G_k + \hat{\sum} \sigma_{pe}^2 \rho_{pe}^2\right| + P_n.$$

Так как выполняется условие Линдеберга: для любого $\tau > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{\sum} T_{pe} = 0$, то $\left|\ln G_k + \hat{\sum} \sigma_{pe}^2 \rho_{pe}^2\right| \to 0$ при $n \to \infty$ [2].

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = 0$.

Из (13) следует, что $\lim \max\limits_{1 \leqslant p,\ e \leqslant n} \sigma_{pe} = 0$, поэтому, как и при доказательстве теоремы 3, $\lim\limits_{n\to\infty} MP_n = 0$.

Используя (13), получим $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{\sum} MT_{pe} = 0$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} MR_n = 0$. Очевидно, что

$$M \exp\left\{-\hat{\sum} \sigma_{pe}^2 M_p \rho_{pe}\right\} = \exp\left\{-k^2 \sum_{p=1}^{n} \sigma_{pp}^2\right\} C_n^k.$$

Следовательно, из [14] получаем

$$\lim_{n\to\infty} \left|\mu_{kn} C_n^{-k} - \exp(-ck^2)\right| = 0. \tag{15}$$

Проделав аналогичные преобразования для $\det(I + A_n^2)$, найдем

$$\lim_{n\to\infty} M[\det(I + A_n^2)]^{-\frac{1}{2}} C_n^{-1} = \lim_{n\to\infty} M[\det(I + A_n^2)]^{-1} C_n^{-2} = 1.$$

Отсюда следует, что при $n \to \infty$

$$\psi_n = C_n^2 \det(I + A_n^2) \xrightarrow{p} 1. \tag{16}$$

Очевидно, что

$$\ln[C_n \det(I + iA_n)] = i\eta_n + \ln\sqrt{\psi_n},$$

$$e^{i\eta_n} = \frac{\det(I + iA_n)}{\sqrt{\det(I + A_n^2)}},$$

$\ln\sqrt{\psi_n} \xrightarrow{p} 0$, η_n — некоторая случайная величина, заданная на $(-\pi, \pi)$.

Из (15), (16) для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n следует

$$|Me^{-ik\eta_n} - e^{-ck^2}| \leqslant \varepsilon.$$

Так как предельная функция распределения задана на $(-\pi, \pi)$, то она однозначно определяется коэффициентами Фурье ([1], стр. 111), и плотность предельной функции распределения находится по формулам [1] (стр. 710). Теорема 5 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. «Мир», М., 1967.
2. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М., ГОИНТИ, 1949.
3. Гирко В. Л. Предельные теоремы для случайного детерминанта. I.— Теория вероят. и мат. статистика, 5, 1971.

V. L. Girco

LIMIT THEOREMS FOR A RANDOM DETERMINANT. II

Summary

Limit theorems of mutual type for a determinant of some random matrices are proved.

Поступила в редколлегию 14.XII.1970.