Д. В. ГУСАК, канд. физ.-мат. наук
Институт математики АН УССР

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ВИНЕРОВСКИХ ПРОЦЕССОВ, УПРАВЛЯЕМЫХ КОНЕЧНОЙ ЦЕПЬЮ МАРКОВА

Рассмотрим двумерный марковский процесс $\{x_t, \xi(t)\}$. Здесь x_t — однородная цепь Маркова с конечным числом значений $k = \overline{1, n}$ и матрицей вероятностей перехода

$$P(t) = \| P\{x_t = k/x_0 = r\} \| = e^{tQ}; \quad Q = N[P - I](r, k \leqslant n), \quad (1)$$

где $N = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — диагональная матрица, составленная из параметров $\nu_k > 0$ показательно распределенных величин $\tau_k \geqslant 0$, определяющих моменты изменений состояний цепи x_t,

$$P = \| P\{x_{\tau_{1+0}} = k/x_{\tau_{1-0}} = r\} \| \quad (r, k \leqslant n).$$

Распределение компоненты $\xi(t)$ задается матрицей

$$P(t, x) = \| P\{\xi(t) < x, x_t = k/x_0 = r\} \| \quad (r, k \leqslant n, \xi(0) = 0), \quad (2)$$

которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial P(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P(t, x)}{\partial x^2} B^2 + P(t, x) Q. \quad (3)$$

Здесь $B^2 = (\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2)$ — диагональная матрица, составленная из дисперсий $\sigma_k^2 > 0$ винеровских компонент $\xi_k(t)$ $(D\xi_k(t) = t\sigma_k^2;\ 1 \leqslant k \leqslant n)$. Более общие процессы с независимыми приращениями, управляемые цепями Маркова, рассматривались в работе [1], в которой изучалось распределение максимума разрывных процессов с независимыми приращениями и знакопостоянными скачками, управляемых цепями Маркова.

В нашей работе исследуется распределение экстремальных значений процесса $\xi(t)$, совместное распределение процесса и его максимума, устанавливаются некоторые факторизационные тождества.

Введем обозначения

$$\xi^+(t) = \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \xi(s); \quad \xi^-(t) = \inf_{0 \leqslant s \leqslant t} \xi(s),$$
$$P_z(t, x) = \| P\{\xi(t) < z + x, \xi^+(t) < z; \quad x_t = k/x_0 = r\} \|. \quad (4)$$

Исследуемая матрица $P_z(t, x)$ при $x \leqslant 0$ удовлетворяет уравнению (3) и следующим граничным условиям:

$$P_z(t, x) = P_z(t, 0) \ (x \geqslant 0), \ P_z(0, x) = \delta(-z \leqslant x) I \ (x \leqslant 0), \quad (5)$$

где $\delta(\cdot)$ — индикаторная функция.

Исходное уравнение $P_z(t, x)$, доопределенное на всю прямую, после преобразования Лапласа по t с учетом начальных условий (5) и обозначений

$$\tilde{P}_z(s, x) = \int_0^\infty e^{-st} P_z(t, x)\, dt =$$

$$= \left\| \int_0^\infty e^{-st} P\{\xi(t) \leqslant x + z, \ \bar{\xi}^+(t) < z, \ x_t = k/x_0 = r\}\, dt \right\|, \quad (6)$$

$$P_z(s, \alpha) = \int_{-\infty}^{0} e^{i\alpha x} d_x P_z(s, x)$$

приводится к виду

$$s\tilde{P}_z(s, x) - \delta(x + z \geqslant 0) I = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{P}_z(s, x) \frac{B^2}{2} + \tilde{P}_z(s, x) Q +$$

$$+ R_+(s, x, z) \quad (-\infty < x < \infty), \quad (7)$$

$$R_+(s, x, z) = \tilde{P}_z(s, x)(sI - Q) - I \quad (x > 0).$$

Применяя к (7) преобразование Фурье — Стильтьеса, получаем уравнение

$$P_z(s, \alpha)\left[sI - Q + \frac{\alpha^2}{2} B^2\right] = e^{-i\alpha z} + \tilde{R}_+, \quad (8)$$

$$\tilde{R}_+ = \tilde{R}_+(s, \alpha, z) = \int_0^\infty e^{i\alpha x} dR_+(s, x, z),$$

из которого постараемся определить интересующее нас совместное распределение $P_z(t, x)$. Для факторизации матрицы $\left(sI - Q + \frac{\alpha^2}{2} B^2\right)^{-1}$ нам понадобится понятие симметризации стохастических матриц.

Определение. Стохастическую матрицу P будем называть симметризуемой, если существует невырожденная диагональная матрица $C = \|c_k \delta_{ik}\|$ $(c_k > 0, \ k = \overline{1, n})$ такая, что

$$PC = CP'. \quad (9)$$

Воспользуемся утверждением, которое следует из результатов п. 5.3 [4] для обратимых эргодических цепей.

Лемма 1. Если однородная цепь Маркова z_m с матрицей вероятностей перехода P эргодична с периодом $d \leqslant 2$, то для симметризации матрицы P (9) необходимо и достаточно, чтобы цепь z_m была обратимой $(p_{ik} = \rho_i^{-1} \rho_{ki} \rho_k)$. При этом $c_k = \rho_k^{-1} > 0$, где $\{\rho_k, \ k = \overline{1, n}\}$ — стационарное распределение цепи z_m.

Уместно отметить, что если P симметризуется справа диагональной матрицей C, то она симметризуется слева матрицей C^{-1} ($C^{-1}P = P'C^{-1}$). Если D — диагональная положительная матрица и P симметризуема, то матрицы $P + D$, DP, PD тоже симметризуемы.

Лемма 2. Пусть цепь z_m с матрицей вероятностей перехода P ($d \leqslant 2$) обратима. Тогда при $s > 0$ симметризованная матрица

$$K(s) = (sI - N[P - I])C > 0 \tag{10}$$

положительно определена, где $C = \| \delta_{ik} \nu_k \rho_k^{-1} \|$ ($k = \overline{1, n}$).

Покажем, что все главные миноры K_r матрицы $K(s)$ положительны. Заметим, что

$$K_r = |N_{(r)}| \cdot |(sN^{-1} + I - P)_{(r)}| \cdot |C_{(r)}| (r = \overline{1, n}), \tag{11}$$

где индекс (r) у знака матрицы означает, что вместо нее рассматривается матрица r-го порядка, стоящая в левом верхнем углу.

Поскольку $|N_{(r)}| > 0$ и $|C_{(r)}| > 0$, нам достаточно показать, что

$$D_r = |(sN^{-1} + I - P)_{(r)}| > 0.$$

Для всех строк в D_r выполнено условие

$$s\nu_i^{-1} + 1 - p_{ii} > 0, \; s\nu_i^{-1} + 1 - p_{ii} > \sum_{j \neq i,\, j=1}^{r} p_{ij} \; (i = \overline{1, r}), \tag{12}$$

которое позволяет применить следствие теоремы Адамара (см. [2], стр. 26), обеспечивающее положительность D_r. Поэтому в силу критерия Сильвестра симметризованная матрица $K(s)$ положительно определена.

Нам понадобится такое разложение $K(s) + \alpha^2 D^2$ на линейные множители, в котором выполнено следующее факторизационное условие: обратимые величины фактор-множителей определяют аналитические функции в полуплоскостях $\pm \operatorname{Im} \alpha > 0$.

Лемма 3. Если выполнены условия леммы 2 и $B^2 > 0$, то разложение при $\operatorname{Im} \alpha = 0$

$$K(s) + \alpha^2 D^2 = D(Z(s) + i\alpha I)(Z(s) - i\alpha I)D, \tag{13}$$

в котором $Z(s) = \sqrt{D^{-1} K(s) D^{-1}} > 0$ при $s > 0$, является единственным разложением, удовлетворяющим требуемому факторизационному условию.

Предположим, что искомое разложение имеет вид

$$K(s) + \alpha^2 D^2 = (X(s) + i\alpha D)(Y(s) - i\alpha D), \tag{14}$$

где $X(s)$ и $Y(s)$ определяются уравнениями

$$X(s) Y(s) = K(s), \; X(s) D = DY(s),$$

приводящими к квадратному уравнению

$$Z^2(s) = D^{-1} K(s) D^{-1}, \; Z(s) = D^{-1} X(s). \tag{15}$$

Все характеристические корни (число их равно $2n$ при $B^2 > 0$) уравнения $|K(s) + \alpha^2 D^2| = 0$ мнимы и попарно симметричны. Из C_{2n}^n возможных выборов множителей в (14), включающих по n

корней из всех $2n$ корней уравнения $|K(s)+\alpha^2D^2|=0$, требуемым свойством обладают только множители (13), которые выражаются через единственное положительно определенное решение $Z(s)$ $(s>0)$ квадратного уравнения (15).

Введем случайную величину $\theta_s>0$ $(s>0)$ с распределением $P\{\theta_s>t\}=e^{-st}$ $(t\geqslant 0)$ и обозначения

$$P(s,\alpha;z)=\|M(e^{i\alpha(\xi(\theta_s)-z)},\ \xi^+(\theta_s)<z,\ x_{\theta_s}=k/x_0=r)\|,$$

$$\Phi^{\pm}(s,\alpha)=\|\{Me^{i\alpha\xi^{\pm}(\theta_s)},\ x_{\theta_s}=k/x_0=r\}\|,$$

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}\,dF(x)\right]_{\pm}=\pm\int_{\mp 0}^{\pm\infty}e^{i\alpha x}\,dF(x), \tag{16}$$

где $F(x)$ — матрица, элементы которой обладают суммируемой вариацией. Последнее соотношение в (16) определяет операцию проектирования.

Теорема. Если $B^2>0$ и цепь z_m с матрицей вероятностей перехода P эргодична с периодом $d\leqslant 2$ и обратима, то

$$P(s,\alpha;\ \ z)=[e^{-i\alpha z}\Phi^+(s,\alpha)]_-(Me^{\theta_s Q})^{-1}\,\Phi^-(s,\alpha); \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\Phi^{\pm}(s,\alpha)&=sCD^{-1}(Z(s)\mp i\alpha I)^{-1}Z^{-1}(s)D^{-1}=\\&=sC(K(s)\mp i\alpha DZ(s)D)^{-1};\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\|M(e^{i\alpha\xi(\theta_s)-u\xi^+(\theta_s)},\ x_{\theta_s}=k/x_0=r)\|&=\Phi^+(s,\alpha+iu)\times\\&\times(Me^{\theta_s Q})^{-1}\,\Phi^{-1}(s,\alpha).\end{aligned} \tag{19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Симметризованное уравнение (8) приводит к уравнению для $P(s,\alpha,z)$

$$P(s,\alpha,z)(K(s)+\alpha^2D^2)=se^{-i\alpha z}C+s\tilde{R}_+C,$$

которое с учетом тождества (13) перепишется в виде

$$P(s,\alpha,z)D(Z(s)+i\alpha I)=s(e^{-i\alpha z}C+\tilde{R}_+C)D^{-1}(Z(s)-i\alpha I)^{-1}.$$

Отсюда после применения операции проектирования и других несложных преобразований следует, что при $\operatorname{Im}\alpha=0$

$$P(s,\alpha,z)=s[e^{-i\alpha z}CD^{-1}(Z(s)-i\alpha I)^{-1}]_-(Z(s)+i\alpha I)^{-1}D^{-1}. \tag{20}$$

Очевидно, что $(Z(s)\mp i\alpha I)^{-1}$ являются преобразованиями Фурье — Стильтьеса функций, обладающих полугрупповым свойством по x,

$$Q_s^{\pm}(x)=e^{\pm xZ(s)}Z^{-1}(s)\quad(\pm x>0).$$

В силу этого замечания из (20) следует, что

$$s\tilde{P}_z(s,x)=sCD^{-1}\int_{-z}^{0}Q_s^+(z+dy)\,Q_s^-(x-y)\,D^{-1}.$$

Осуществляя преобразование Фурье — Стильтьеса по z в формуле

$$s\tilde{P}_z(s,0)=sCD^{-1}[Q_s^{\pm}(z)-Q_s^+(0)]\,Z^{-1}(s)\,D^{-1},$$

получим первую формулу в (18)

$$\Phi^+(s, \alpha) = sCD^{-1}(Z(s) - i\alpha I)^{-1} Z^{-1}(s) D^{-1},$$

которая легко поддается обращению ($z > 0$)

$$\| P\{\xi^+(\theta_s) > z,\ x(\theta_s) = k/x_0 = r\} \| = CD^{-1} e^{-zZ(s)} DC^{-1} Me^{\theta_s Q}. \quad (21)$$

Аналогичным образом можно установить формулу для $\Phi^-(s, \alpha)$. Тогда из (20) следует, что

$$P(s, \alpha, z) = [e^{-i\alpha z}\Phi^+(s, \alpha)]_- DZ(s)(Z(s) + i\alpha I)^{-1} D^{-1} =$$
$$= s^{-1}[e^{-i\alpha z}\Phi^+(s, \alpha)]_- DZ^2DC^{-1}\Phi^-(s, \alpha) =$$
$$= [e^{-i\alpha z}\Phi^+(s, \alpha)]_- s^{-1}(sI - Q)\Phi^-(s, \alpha),$$

т. е. справедливо соотношение (17), из которого после применения одностороннего преобразования Фурье — Стильтьеса по $z > 0$ следует (19). Теорема доказана.

Воспользовавшись формулами (18), нетрудно установить вероятностный смысл обратных величин множителей в (13) и убедиться в справедливости утверждения.

Следствие. В условиях теоремы имеет место тождество, обобщающее тождество безгранично делимой факторизации

$$\| M(e^{i\alpha\xi(\theta_s)},\ x_{\theta_s} = k/x_0 = r) \| \equiv s\left(sI - Q + \frac{\alpha^2}{2}B^2\right)^{-1} =$$
$$= \Phi^+(s, \alpha)(Me^{\theta_s Q})^{-1}\Phi^-(s, \alpha)\ (\operatorname{Im}\alpha = 0). \quad (22)$$

В заключение отметим, что в отличие от [1], где рассматривалось распределение $\tau(z)$ — момента 1-го достижения уровня $z > 0$ для $\xi(t)$ на цепи $\eta_z = x_{\tau(z)}$, здесь распределение $\bar{\xi}^{\pm}(t)$ рассматривается на цепи x_t.

ЛИТЕРАТУРА

1. Єжов І. І., Королюк В. С., Штатланд Є. С. Про розподіл максимуму процесів з незалежними приростами, керованих ланцюгом Маркова.— ДАН УРСР, 1969, № 2.

2. Пароди М. Локализация характеристических чисел матриц. М., ИЛ, 1960.

3. Гусак Д. В. Про екстремальні значення вінеровських процесів, керованих ланцюгом Маркова.— ДАН УРСР, 1970, № 10.

4. Кемени Дж., Снелл Дж., Конечные цепи Маркова, М., «Наука», 1970.

D. V. Gusak

EXTREME VALUES OF NON-DEGENERATE WIENER PROCESSES CONTROLLED WITH FINITE MARKOV CHAIN

Summary

The distribution of the extrema of non-degenerate Wiener processes, controlled with finite Markov chain are studied.

Поступила в редколлегию 19.I.1971.