Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 61, 1999, стор. 91–96

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 61, 1999, pp. 91–96

КІЛЬКІСНА ОЦІНКА ЗНИЗУ МАТЕМАТИЧНОГО СПОДІВАННЯ ЧАСУ БЕЗВІДМОВНОЇ РОБОТИ ВИСОКОНАДІЙНОЇ СИСТЕМИ ІЗ ЗАХИСТОМ У НЕСТАЦІОНАРНОМУ РЕЖИМІ

УДК 519.21

О. О. КУШНІР

Резюме. Отримана кількісна оцінка знизу математичного сподівання часу безвідмовної роботи системи із захистом через верхню оцінку функції розподілу цієї випадкової величини у випадку існування моментів другого порядку вихідних функцій розподілу.

У статті [1] методом складання та аналізу інтегральних рівнянь отримані граничні теореми про експоненціальну асимптотику функції розподілу часу безвідмовної роботи системи із захистом. У даній роботі використовуються цей метод та результати праць [1]–[7] для отримання нижньої оцінки математичного сподівання цієї випадкової величини.

Розглянемо три послідовності невід'ємних незалежних у сукупності випадкових величин $(\xi_n)_{n\geq 1}$, $(\eta_n)_{n\geq 1}$ та $(\zeta_n)_{n\geq 1}$ з функціями розподілу $\mathsf{P}\{\xi_n < x\} = F(x)$, $\mathsf{P}\{\eta_n < x\} = G(x)$, $\mathsf{P}\{\zeta_n < x\} = J(x)$ для всіх $n \geq 1$, а також моменти часу $T_1 = 0$, $S_0 = -s$ $(s > 0)$; $T_n' = T_n + \zeta_n$, $T_{n+1} = T_n' + \eta_n$ та $S_n = S_{n-1} + \xi_n$ для всіх $n \geq 1$.

Нехай τ — момент першого попадання послідовності $(S_k)_{k\geq 1}$ у відрізки альтернуючого процесу $[T_n, T_n']$, $n \geq 1$, тобто

$$\tau = \inf_{k\geq 1}\left\{ S_k \;\middle|\; S_k \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [T_n, T_n'] \right\}.$$

Позначимо $b_s = \mathsf{E}(\tau \,/\, S_0 = -s)$ — умовне математичне сподівання випадкової величини τ за умови $S_0 = -s$ $(s > 0)$; $\varphi_s(x) = \mathsf{P}\{\tau < x \,/\, S_0 = -s\}$ — умовна функція розподілу.

У даній роботі оцінюється знизу b_s. Ця оцінка буде асимптотично точною при фіксованих F, G і

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{E}\,\zeta_1 = \int_0^{+\infty} (1 - J(x))\,dx \to 0.$$

Крім α для оцінки b_s будемо використовувати ще такі показники:

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{E}\,\xi_1 = \int_0^{+\infty} (1 - F(x))\,dx; \qquad m \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{E}\,\eta_1 = \int_0^{+\infty} (1 - G(x))\,dx;$$

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{E}(\xi_1 \wedge \zeta_1) = \int_0^{+\infty} (1 - F(x))(1 - J(x))\,dx \leq \alpha$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60K05, 60K10.

(тут і далі знак $\wedge$ означає мінімум чисел);

$$\varkappa = \frac{1}{2}\left(\mathsf{E}\left(\eta_1\right)\right)^{-2}\mathsf{E}\left(\eta_n^2\right) = m^{-2}\int_0^{+\infty} x(1-G(x))\,dx;$$

$$c_3 = c_3(F) = \sup_{y>0}\sup_{t>0}\left(\frac{1}{y}R_t(y)\right),$$

де $R_t(y)$ — ймовірність попадання хоча б одного моменту відновлення у проміжок $[t, t+y)$ за умови, що процес відновлення стартує з нульового моменту часу, тобто

$$R_t(y) = \mathsf{P}\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right\}\cap[t, t+y) \neq \varnothing\right\};$$

константи c_1 та c_2, що також залежать від F, визначаються з умови

$$\sup_{s>0}\left(\delta(s) - \frac{c_1}{1+c_2 s}\right) \leq 0,$$

де

$$\delta(s) = \sup_{t\geq s}\sup_{B\in\mathcal{B}^+}\left|\widehat{R_t}(B) - \hat{R}(B)\right|,$$

$\mathcal{B}^+$ — звуження борелівської σ-алгебри на $(0, +\infty)$, $\widehat{R}_t$ і $\widehat{R}$ — міри Лебега–Стілтьєса, породжені функціями R_t та R відповідно;

$$R(x) \stackrel{\text{def}}{\equiv} \varlimsup_{t\to\infty} R_t(x).$$

Теорема. *Нехай випадкова величина ξ_n має обмежену щільність $f(x)$, яка збігається до нуля на нескінченності, $F(+0) = 0$, $G(+0) = 0$, $\mathsf{E}\,\xi_1^2 < +\infty$, $\mathsf{E}\,\eta_1^2 < +\infty$.*
Тоді

$$b_s \geq \frac{m(\mu-\varepsilon)}{\varepsilon}\left(1 - h(1-\ln h)\right), \tag{1}$$

де $h = h_1 \wedge 1$;

$$h_1 = 2\sqrt{\frac{\alpha c_1 c_3}{m c_2}} + 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2 m}} + \sqrt{\varkappa}\right) + 2\alpha c_3\varkappa + \frac{\alpha}{m} + \frac{\varepsilon}{\mu}(1+6\varkappa)$$
$$+ 2\varkappa\inf_{\theta\in(0,1)}\left(\frac{1}{(1-\theta)^2}\frac{\varepsilon}{\mu} + \frac{\alpha\sqrt{\varepsilon}}{\theta m\sqrt{\varkappa\mu}}\right).$$

Зауваження 1. Згідно з роботами [2, 3, 4], при виконанні умов теореми існують числа $c_1 = c_1(F) < +\infty$ та $c_2 = c_2(F) < +\infty$ такі, що для всіх $s > 0$ виконується нерівність

$$\delta(s) \leq \frac{c_1}{1+c_2 s}. \tag{2}$$

Зауваження 2. При виконанні умов теореми $c_3 = c_3(F) < +\infty$.

Зауваження 3. При $\varepsilon \leq \mu m c_1 c_2$ твердження теореми можна уточнити, віднявши від h_1 вираз $\varepsilon/(\mu m c_2)$, а якщо, крім цього, $\alpha \leq m c_1 c_2/c_3$, то від h_1 можна відняти додатково $\alpha c_3/(m c_2)$.

Лема. *Нехай для функції розподілу $\varphi(x)$ невід'ємної випадкової величини τ виконується нерівність*

$$\varphi(x) \le 1 - \exp\{-\lambda x\} + h,$$

де $h \in (0, 1]$.

Тоді для математичного сподівання $b = \mathsf{E}\,\tau$ виконується нерівність

$$b \ge \frac{1}{\lambda}\bigl(1 - h(1 - \ln h)\bigr).$$

Доведення зауваження 2. Позначимо $H = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n\star}$ — функція відновлення, де

$$F^{0\star} = \chi = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0, \\ 1, & \text{якщо } x > 0, \end{cases}$$

$$F^{1\star} = F, \qquad F^{(n+1)\star}(x) = \int_0^x F^{n\star}(x - y)\,dF(y),$$

$h = f \star H$ — щільність відновлення.

При виконанні умов теореми, згідно з [5, с. 205],

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = 1/\mu,$$

а на обмеженому проміжку

$$\sup_{x\in[0,T]} h(x) \le A \cdot H(T),$$

де $A \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\ge 0} f(x) < +\infty$ за умовою.

Отже, щільність відновлення h обмежена, тобто існує таке $k \in (0, +\infty)$, що

$$\sup_{x\ge 0} h(x) \le k.$$

Далі отримуємо

$$\begin{aligned} R_t(y) &= \int_0^y \bigl(F(t - z + y) - F(t - z)\bigr)\,dH(y) = \int_0^{t+y} dF(u) \int_{t-u}^{t-u+y} dH(y) \\ &= \int_0^t dF(u) \int_{t-u}^{t-u+y} h(y)\,dy + \int_t^{t+y} f(u)\,du \int_{t-u}^{t-u+y} dH(y) \le ky + H(y)Ay. \end{aligned}$$

Тоді для $y \le (k + A)^{-1}$

$$R_t(y) \le y\left(k + A \cdot H\left(\frac{1}{k + A}\right)\right),$$

а для $y > (k + A)^{-1}$

$$R_t(y) \le 1 \le y(k + A) \le y\left(k + A \cdot H\left(\frac{1}{k + A}\right)\right).$$

Отже, $c_3 \le k + A \cdot H\bigl((k + A)^{-1}\bigr) < +\infty$, що й потрібно було довести. □

Доведення леми.

$$\begin{aligned} b &= \int_0^\infty (1 - \varphi(x))\,dx \ge \int_0^{-\ln h/\lambda} (1 - \varphi(x))\,dx \\ &= \int_0^{-\ln h/\lambda} (\exp\{-\lambda x\} - h)\,dx = \frac{1 - h + h\ln h}{\lambda}, \end{aligned}$$

що й потрібно було довести. □

Доведення теореми. За нерівностями (31), (37) статті [1] для довільного $T \geq 0$

$$\varphi_s(x) \leq \widetilde{\varphi}(x) + \mathbf{H}\, G(T) \sup_{t \geq s} \int_0^\infty R_t(y)\, dJ(y) + \delta(T), \tag{3}$$

де $\widetilde{\varphi}(x) \overset{\text{def}}{\equiv} \lim_{s \to \infty} \varphi_s(x)$ (при виконанні умов теореми ця границя існує),

$$\mathbf{H}\, G = \sum_{n=0}^{\infty} G^{n\star}.$$

Для $\delta(T)$ виконується нерівність (2), а для $\mathbf{H}\, G(T)$ — нерівність Дейлі [6]

$$\mathbf{H}\, G(T) \leq 2\varkappa + T/m. \tag{4}$$

Згідно з означенням константи c_3 виконується нерівність $R_t(y) \leq c_3 y$, тому

$$\sup_{t \geq s} \int_0^\infty R_t(y)\, dJ(y) \leq c_3 \alpha. \tag{5}$$

Підставивши (2), (4) і (5) у (3), дістанемо

$$\varphi_s(x) \leq \widetilde{\varphi}(x) + 2\varkappa c_3 \alpha + \frac{c_3 \alpha T}{m} + \frac{c_1}{1 + c_2 T}. \tag{6}$$

При $\alpha \leq m c_1 c_2 / c_3$ візьмемо в (6)

$$T = \sqrt{\frac{m c_1}{\alpha c_2 c_3}} - \frac{1}{c_2}$$

і отримаємо

$$\varphi_s(x) \leq \widetilde{\varphi}(x) + c_3 \alpha \left(2\varkappa - \frac{1}{m c_2} \right) + 2\sqrt{\frac{\alpha c_1 c_3}{m c_2}}. \tag{7}$$

Якщо ж $\alpha > m c_1 c_2 / c_3$, то візьмемо в (6) $T = 0$ і дістанемо

$$\varphi_s(x) \leq \widetilde{\varphi}(x) + 2\varkappa c_3 \alpha + c_1 \leq \widetilde{\varphi}(x) + 2\varkappa c_3 \alpha + c_1 \sqrt{\frac{\alpha c_3}{m c_1 c_2}},$$

звідки, врахувавши (7), маємо для довільних $\alpha > 0$

$$\varphi_s(x) \leq \widetilde{\varphi}(x) + 2\alpha c_3 \varkappa + 2\sqrt{\frac{\alpha c_1 c_3}{m c_2}}. \tag{8}$$

Із формул (19), (41), (38), (15), (31), (34) статті [1] та нерівностей (4), (5) даної роботи випливає, що для будь-яких $Z \geq 0$ і $Y \geq 0$

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(x) \leq \psi(x) + \delta(Z) + \left(2\varkappa + \frac{Z + Y}{m} \right) \int_0^\infty R(y)\, dJ(y) + 2\varkappa (1 - G \star J(Y)) \\ + \frac{1}{m} \int_Y^\infty (1 - G \star J(y))\, dy, \end{aligned} \tag{9}$$

де $\psi(x)$ — мінімальний розв'язок рівняння

$$\psi(x) = \int_0^\infty R(x \wedge u)\, dJ(y) + \int_0^\infty (1 - R(u))\, dJ(u) \int_0^{x-u} \psi(x - u - v)\, dG(v).$$

(У формулі (38) статті [1] — помилка: замість G має бути $G \star J$.)

Оцінимо

$$\int_Y^\infty (G(y) - G \star J(y))\,dy \le \int_0^\infty (G(y) - G \star J(y))\,dy$$
$$\le \int_0^\infty (1 - G \star J(y))\,dy - \int_0^\infty (1 - G(y))\,dy = m + \alpha - m = \alpha;$$
$$\int_Y^\infty (1 - G(y))\,dy \le \frac{1}{Y}\int_Y^\infty y(1 - G(y))\,dy \le \frac{1}{Y}\int_0^\infty y(1-G(y))\,dy = \frac{\varkappa m^2}{Y},$$

звідки

$$\int_Y^\infty (1 - G \star J(y))\,dy \le \alpha + \frac{\varkappa m^2}{Y}. \tag{10}$$

Із напівадитивності ймовірності випливає, що для будь-якого $\theta \in (0,1)$

$$1 - G \star J(Y) \le 1 - J(\theta Y) + 1 - G\left((1-\theta)Y\right). \tag{11}$$

Для будь-якого $x > 0$

$$1 - G(x) \le \frac{1}{x^2}\int_x^\infty y^2\,dG(y) \le \frac{1}{x^2}\int_0^\infty y^2\,dG(y) = \frac{2\varkappa m^2}{x^2}. \tag{12}$$

Згідно з [5, т. 12.8]

$$R(y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y (1 - F(u))\,du.$$

Отже,

$$\int_0^\infty R(y)\,dJ(y) = \frac{\varepsilon}{\mu}. \tag{13}$$

При $\varepsilon \le \mu m c_1 c_2$, підставивши у (9)

$$Z = \sqrt{\frac{\mu m c_1}{c_2 \varepsilon}} - \frac{1}{c_2} \quad \text{та} \quad Y = m\sqrt{\frac{\varkappa\mu}{\varepsilon}}$$

та врахувавши (2), (10), (11), (12), (13), дістанемо

$$\widetilde{\varphi}(x) \le \psi(x) + 2\sqrt{\frac{\varepsilon c_1}{\mu m c_2}} + \frac{\varepsilon}{\mu}\left(2\varkappa - \frac{1}{m c_2}\right) + 2\sqrt{\frac{\varkappa\varepsilon}{\mu}} + \frac{\alpha}{m}$$
$$+ 2\varkappa \inf_{\theta\in(0,1)}\left(\frac{1}{(1-\theta)^2}\frac{\varepsilon}{\mu} + \frac{\alpha\sqrt{\varepsilon}}{\theta m\sqrt{\varkappa\mu}}\right). \tag{14}$$

Якщо ж $\varepsilon > \mu m c_1 c_2$, то, взявши $Z = 0$ та врахувавши, що $1 < \sqrt{\varepsilon/(\mu m c_1 c_2)}$, і (14), дістанемо для будь-яких $\varepsilon > 0$

$$\widetilde{\varphi}(x) \le \psi(x) + 2\sqrt{\frac{\varepsilon c_1}{\mu m c_2}} + 2\varkappa\frac{\varepsilon}{\mu} + 2\sqrt{\frac{\varkappa\varepsilon}{\mu}} + \frac{\alpha}{m}$$
$$+ 2\varkappa \inf_{\theta\in(0,1)}\left(\frac{1}{(1-\theta)^2}\frac{\varepsilon}{\mu} + \frac{\alpha\sqrt{\varepsilon}}{\theta m\sqrt{\varkappa\mu}}\right). \tag{15}$$

Позначимо

$$V(t) = \frac{1}{1 - \varepsilon/\mu}\int_0^t (1 - R(x))\,dJ(x); \qquad C(t) = \frac{\mu}{\varepsilon}\int_0^{+\infty} R(t \wedge x)\,dJ(x).$$

Очевидно, що $V(t)$ та $C(t)$ є функціями розподілу. Позначимо $W = G \star V$.

Функцію $\psi(x)$ можна оцінити так:

$$\psi = \frac{\varepsilon}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{n} C \star W^{n\star} \le \frac{\varepsilon}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{n} W^{n\star}$$
$$\le \frac{\varepsilon}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{n} G^{n\star} = \frac{\varepsilon}{\mu}\chi + \left(1-\frac{\varepsilon}{\mu}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\mu}\left(1-\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{n-1} G^{n\star}. \tag{16}$$

Згідно з [7, т. 2],

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\mu}\left(1-\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{n-1} G^{n\star}(x) \le 1 - \exp\{-\frac{\varepsilon x}{(\mu-\varepsilon)m}\} + 2\varkappa\frac{\varepsilon}{\mu-\varepsilon}. \tag{17}$$

Із (16) та (17) дістаємо при $x \ge 0$

$$\psi(x) \le \frac{\varepsilon}{\mu} + 1 - \exp\left\{-\frac{\varepsilon x}{(\mu-\varepsilon)m}\right\} + \frac{2\varkappa\varepsilon}{\mu}. \tag{18}$$

Врахувавши лему, із (8), (15), (18) отримаємо (1).

Теорема доведена. □

Використавши нерівності (7), (8), (14), (18), дістанемо твердження зауваження 3.

Література

1. О. О. Кушнір, *Дослідження високонадійної системи із захистом за допомогою теореми Реньї*, Теор. ймовірност. та матем. статист. **55** (1996), 117–124.
2. Н. В. Карташов, *Количественные оценки скорости сходимости в теореме восстановления и их применение в теории массового обслуживания*, Дис. … канд. физ.-мат. наук, Київ, 1978.
3. ______, *Степенные оценки скорости сходимости в теореме восстановления*, Теор. вероятност. и применен. **24** (1979), № 3, 600–607.
4. ______, *Равномерная асимптотическая теорема восстановления*, Теор. вероятност. и применен. **25** (1980), № 3, 597–600.
5. И. Н. Коваленко, Н. Ю. Кузнецов, В. М. Шуренков (ред.), *Случайные процессы*, Справочник, "Наукова думка", Київ, 1983.
6. D. J. Daley, *Tight bounds for the renewal function of a random walk*, Ann. Probab. **8** (1980), № 3, 615–621.
7. Н. В. Карташов, *Неравенства в теореме Реньи*, Теор. вероятност. и матем. статист. **45** (1991), 27–33.

Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Надійшла 01/08/1999