Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 61, 1999, стор. 1–2

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 61, 1999, pp. 1–2

ПРО ОЦІНКУ НЕВІДОМОГО СЕРЕДНЬОГО ОДНОРІДНОГО І ІЗОТРОПНОГО ВИПАДКОВОГО ПОЛЯ, ЩО СПОСТЕРІГАЄТЬСЯ НА КІЛЬЦІ

УДК 519.21

С. БЕКТАШОВ

Резюме. Розглядається асимптотична поведінка дисперсії середньоарифметичної оцінки (оцінки методу найменших квадратів) за спостереженнями поля на кільці.

Припустимо, що однорідне і ізотропне випадкове поле([1], [2])

$$\xi(r,\varphi) = \alpha + \eta(r,\varphi) \tag{1}$$

спостерігається на кільці

$$R_1 \le r \le R_2. \tag{2}$$

В якості оцінки невідомого середнього α ми розглянемо середньоарифметичну оцінку

$$\hat{\alpha}_{[R_1,R_2]} = \frac{1}{\pi\left[R_2^2 - R_1^2\right]} \iint_{R_1 \le r \le R_1} \xi(r,\varphi) r\, dr\, d\varphi. \tag{3}$$

Використовуючи спектральне зображення однорідного і ізотропного поля ([1], стор. 8, або [2], стор. 22), одержимо, що

$$\hat{\alpha}_{[R_1,R_2]} = \alpha + \frac{2}{\left[R_2^2 - R_1^2\right]^2} \int_0^{+\infty} \left[\int_{R_1}^{R_2} r J_0(\lambda r)\, dr\right] Z_0^{(1)}(d\lambda). \tag{4}$$

Із (4) і властивостей стохастичного інтегралу випливає таке твердження.

Теорема 1. *Має місце співвідношення:*

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\, \hat{\alpha}_{[R_1,R_2]} &= \frac{4}{\left[R_2^2 - R_1^2\right]^2} \int_0^{+\infty} \left[\int_{R_1}^{R_2} r J_0(\lambda r) dr\right]^2 d\Phi(\lambda) \\ &= \frac{4}{\left[R_2^2 - R_1^2\right]^2} \int_0^{+\infty} \frac{\left[R_2 J_1(\lambda R_2) - R_1 J_1(\lambda R_1)\right]^2}{\lambda^2}\, d\Phi(\lambda), \end{aligned} \tag{5}$$

(при обчисленнях ми використовуємо співвідношення 7.14.10 із [3]).

Припустимо, що випадкове поле $\xi(r,\varphi)$ має спектральну щільність $f\left(\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}\right)$. Тоді

$$\Phi'(\lambda) = 2\pi\lambda f(\lambda). \tag{6}$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60G60, 62M40.

Помітимо, що

$$\mathbf{D}\,\hat{\alpha}_{[R_1,R_2]} = \frac{8\pi}{\left[R_2^2 - R_1^2\right]^2}\left\{R_2^2 \int_0^{\infty} \frac{J_0^2(\lambda R_2)}{\lambda^2}\lambda f(\lambda)\,d(\lambda) - 2R_1R_2\int_0^{+\infty} \frac{J_1(\lambda R_1)J_1(\lambda R_2)}{\lambda^2} f(\lambda)\,d\lambda + R_1^2\int_0^{\infty}\frac{J_1^2(\lambda R_1)}{\lambda} f(\lambda)\,d(\lambda)\right\}. \quad (7)$$

Припустимо, що функція $f(\lambda)$ неперервна в деякому околі нуля, $f(\lambda) \neq 0$ і $f(\lambda)$ обмежена на $[0, +\infty)$.

Із теореми 5 в [1] випливає, що

$$R_2^2 \int_0^{+\infty} \frac{J_1^2(\lambda R_2)}{\lambda^2}\lambda f(\lambda)\,d\lambda = R_2^4\int_0^{+\infty}\frac{J_1^2(\lambda R_2)}{\lambda^2 R_2} f(\lambda)\,d\lambda = R_2^4\left[\frac{1}{2}f(0)\frac{1}{R_2^2} + o\left(\frac{1}{R_2^2}\right)\right]. \quad (8)$$

Тут ми використали інтеграл

$$\int_0^{+\infty}\frac{J_1^2(x)}{x^2}x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Із теореми 5 в [1] (розділ 1) випливає також, що

$$R_2\int_0^{+\infty}\frac{J_1(\lambda R_1)J_1(\lambda R_2)}{\lambda^2}\lambda f(\lambda)\,d\lambda = R_2^3\int_0^{\infty}\frac{J_1(\lambda R_2)}{(\lambda R_2)^2}\lambda f(\lambda)J_1(\lambda R_1)\,d(\lambda) = R_2^3 o\left(\frac{1}{R_2^2}\right). \quad (9)$$

Тут ми використали інтеграл

$$\int_0^{+\infty}\frac{J_1(x)}{x}\,dx = 1.$$

Співставляючи (7), (8), (9), переконуємось в справедливості такої теореми.

Теорема 2. *Якщо функція $f(\lambda)$ неперервна в деякому околі нуля, $f(\lambda) \neq 0$, $f(\lambda)$ — обмежена функція на $[0, +\infty)$, то*

$$\lim_{R_2\to+\infty} R_2^2\,\mathbf{D}\,\hat{\alpha}_{[R_1 R_2]} = 4\pi f(0). \quad (10)$$

Література

1. M. I. Yadrenko, *Spectral theory of random fields*, Optimization Software Inc., New York, 1983.
2. N. N. Leonenko, *Limit theorems for random fields with singular spectrum*, Kluwer Academic Publ., 1999.
3. Г. Бейтмен, А. Эрдеи, *Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, "Наука", Москва, 1966.

Узбекистан, Самарканд, Самаркандський кооперативний інститут

Надійшла 15/01/1999