Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 61, 1999, стор. 33–38

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 61, 1999, pp. 33–38

ПРО ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ

УДК 519.21

О. В. ІЛЬЧЕНКО

Резюме. В статті встановлюється існування періодичних розв'язків системи стохастичних диференціальних рівнянь з малим параметром. За умови стійкості лінійної системи, отриманої після усереднення вихідної системи по часу, побудована функція типу Ляпунова, яка забезпечує існування періодичних розв'язків.

Дослідження якісної поведінки розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь останнім часом інтенсивно розвиваються. До питань, що викликають значний інтерес, належить існування та властивості періодичних розв'язків. Ця тематика налічує чимало робіт. Дивись, наприклад, [1–6]. Існують різні підходи до пошуку умов існування періодичних розв'язків. Р. Хасьминський [1] формулює достатні умови існування періодичних розв'язків в термінах функцій типу Ляпунова. А. Я. Дороговцев в [2] встановлює існування та стійкість в середньоквадратичному періодичних розв'язків за умовами стійкості лінійної складової детермінованої частини рівняння.

В даній публікації у випадку стандартної залежності коефіцієнтів рівняння від малого параметру автор застосовує метод усереднення по часу, який явно входить в коефіцієнти рівняння. Якщо лінійна система, яка відповідає усередненій, стійка з ймовірністю 1, то на основі отриманих в [7] результатів вдається побудувати функцію типу Ляпунова, яка забезпечує існування періодичних розв'язків. Такий підхід дає можливість враховувати дифузійний вплив і побудувати лінійну автономну систему, стійкість якої забезпечує існування періодичних розв'язків.

Розглянемо систему стохастичних диференційних рівнянь:

$$dx(t) = \varepsilon b(t, x(t))\, dt + \sqrt{\varepsilon} \sum_{r=1}^{N} \sigma^r(t, x(t))\, dw_r(t), \tag{1}$$

де $b(t,x) = (b_1(t,x), b_2(t,x), \dots, b_n(t,x))$, $\sigma^r(t,x) = (\sigma_1^r(t,x), \sigma_2^r(t,x), \dots, \sigma_n^r(t,x))$, $r = 1, \dots, N$, — стовпці вектор-функцій, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ — розв'язок-стовпець, $w_r(t)$, $t \ge 0$, $r = 1, \dots, N$, — незалежні вінерівські процеси, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ — малий додатній параметр.

Позначимо через $(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ та $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ — скалярний добуток та норму векторів. Для періодичних періода T функцій $f(t)$ будемо розглядати інтегральне середнє $\overline{f}$ по періоду T:

$$\overline{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt.$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60H10.

Припустимо, що відносно системи (1) виконуються такі припущення:

1) коефіцієнти $b(t,x)$ та $\sigma^r(t,x)$ системи (1) періодичні по t з періодом $\mathrm{T} > 0$:

$$b(t+T,x) = b(t,x), \qquad \sigma^r(t+T,x) = \sigma^r(t,x),$$
$$t \geq 0, \qquad x \in \mathbf{R}^n, \qquad r = 1,\dots,N;$$

2) коефіцієнти $b(t,x)$ та $\sigma^r(t,x)$, $r = 1,\dots,N$, мають вигляд

$$b(t,x) = b_0(t,x) + b_1(t) \cdot x, \qquad \sigma^r(t,x) = \sigma_0^r(t,x) + \sigma_1^r(t) \cdot x,$$
$$||b_0(t,x)|| + ||\sigma_0^r(t,x)|| \leq k,$$

для деякого $k < \infty$;

3) функції $b(t,x)$ та $\sigma^r(t,x)$, $r = 1,\dots,N$, неперервні по t і мають частинні похідні до четвертого порядку включно по x обмежені і рівномірно неперервні по x при $t \geq 0$ та $x \in \mathbf{R}^n$;

4) для $\alpha = 1,\dots,4$ справедливі співвідношення:

$$D^\alpha \bar{b}_i(x) = \frac{1}{T}\int_0^T D^\alpha b_i(s,x)\,ds,$$
$$D^\alpha \bar{\sigma}_{ji}^r(x) = \frac{1}{T}\int_0^T D^\alpha \left(\sigma_i^r(s,x)\sigma_j^r(s,x)\right)\,ds,$$

де $i,j = 1,\dots,n$, $r = 1,\dots,N$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, $x \in \mathbf{R}^n$ та

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Визначимо матриці A та B^r, $r = 1,\dots,M$, із співвідношень:

$$A = \bar{b}_1; \qquad \sum_{r=1}^{M}(\mathbf{B}^r y,\xi)^2 = (\mathbf{\Phi}(y)\xi,\xi),$$

$$\xi = (\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n), \qquad \mathbf{\Phi}(y) = (\varphi_{ij}(y))_{i,j=1}^n, \qquad \varphi_{ij}(y) = \sum_{K,l=1}^{n}\sum_{r=1}^{N}\bar{h}_{ijkl}^r y_k y_l,$$

$$\bar{h}_{ijkl}^r(y) = \sigma_{1ik}^r(t)\sigma_{1jl}^r(t), \qquad \sigma_{ij}^r(t,x) = \sigma_i^r(t,x)\sigma_j^r(t,x), \qquad i,j,k,l = 1,\dots,n.$$

Разом з системою (1) розглянемо лінійну систему

$$dy(t) = Ay(t)\,dt + \sum_{r=1}^{M} B^r y(t)\,d\tilde{w}_r(t) \tag{2}$$

з належними вінерівськими процесами $\tilde{w}_r(t)$, $t \geq 0$, $r = 1,\dots,M$.

Означення 1. Тривіальний розв'язок системи (2) називається стійкім з ймовірністю 1, якщо для довільного розв'язку $y(t)$ системи (2)

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{t\to\infty} y(t) = 0\right\} = 1.$$

Означення 2. Випадковий процес $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t))$ називається періодичним з періодом $T > 0$, якщо

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{\xi(t_1+T) \in A_1, \xi(t_2+T) \in A_2, \dots, \xi(t_m+T) \in A_m\} \\ = \mathsf{P}\{\xi(t_1) \in A_1, \xi(t_2) \in A_2, \dots, \xi(t_m) \in A_m\}\end{aligned}$$

для довільних $t_i \in \mathbf{R}$, $A_i \in B(\mathbf{R}^n)$, $i = 1, \dots, m$, $m \in \mathbf{N}$, $B(\mathbf{R}^n)$ — σ-алгебра борелевських множин з $\mathbf{R}^n$.

Перш ніж сформулювати умови існування періодичних розв'язків системи (1) наведемо допоміжну властивість функцій, які мають інтегральне середнє.

Лема. Нехай функція $f(t, x, \varepsilon)$ задовольняє умовам

I) $|f(t, x, \varepsilon)| < c$ для деякої сталої $c < +\infty$;

II) $\lim_{T\to\infty} T^{-1} \int_t^T f(s, x, \varepsilon)\, ds = 0$ рівномірно відносно $(t, x, \varepsilon) \in \{t \geq 0\} \times \{\|x\| \leq R\} \times (0, \varepsilon_0]$.

Тоді

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{t\geq 0, |x|\leq R} \varepsilon \int_0^t e^{-\varepsilon(t-s)} f(s, x, \varepsilon)\, ds = 0.$$

Доведення леми можна знайти в [9].

Зауваження. Якщо функція $f(t)$ періодична, то функція $g(t) = f(t) - \overline{f}$ має інтегральне середнє по періоду, рівне нулю і, отже, задовольняє умовам леми.

Теорема. *Нехай виконується припущення* 1)–4). *Якщо тривальний розв'язок системи* (2) *стійкий з ймовірністю* 1, *то при достатньо малих значеннях* $\varepsilon > 0$ *система* (1) *має періодичний розв'язок періоду* T.

Доведення. Для доведення твердження теореми достатньо для деякого $\varepsilon_1 > 0$ побудувати таку функцію $V(t, x, \varepsilon)$, щоб при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ вона задовольняла умовам:

A) $V(t+T, x, \varepsilon) = V(t, x, \varepsilon), \qquad (t, x, \varepsilon) \in \{t \geq 0\} \times \mathbf{R}^n \times (0, \varepsilon_1]$;

B) $V(t, x, \varepsilon) \in C^{1,2}(\{t \geq 0\} \times \mathbf{R}^n), \qquad \varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$;

C) $\lim\limits_{R\to\infty} \inf\limits_{\|x\|>R} V(t, x, \varepsilon) = +\infty$;

D) $\lim\limits_{R\to\infty} \sup\limits_{\|x\|>R} LV(t, x, \varepsilon) = -\infty$,

$$L \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{r=1}^{N} \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_i^r(t, x) \sigma_j^r(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} b_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

L — твірний оператор марківського процесу, породженого системою (1). При виконанні умов A)–D) справедливість твердження теорми буде випливати з [1].

Розпочнемо побудову функції $V(t, x, \varepsilon)$. Покладемо $U_0(x) = \int_0^\infty M\|H_0^t x\|^p\, dt$, де H_0^t, $t \geq 0$, — матричнозначний процес, який задовольняє системі

$$dH_0^t = AH_0^t\, dt + \sum_{r=1}^{M} B^r H_0^t\, d\tilde{w}_r(t), \qquad H_0^0 = E.$$

За умов теореми в [8] доведено існування такого $p{:}\, 0 < p < 1$, що функція $U_0(x)$ визначена разом зі своїми похідними і задовольняє оцінкам

$$\begin{gathered} C_1\|x\|^p \leq U_0(x) \leq C_2\|x\|^p, \\ |D^\alpha U_0(x)| \leq C_3\|x\|^{p-\alpha}, \\ x \neq 0, \qquad \alpha = 1, \dots, 4, \qquad C_i > 0, \quad i = 1, \dots, 3. \end{gathered} \tag{3}$$

Нехай

$$U(x) = \begin{cases} U_0(x), & \|x\| \geq 1, \\ \varphi(x), & \|x\| < 1. \end{cases}$$

Функція $\varphi(x)$ вибрана з умови $U(x) \in C^4(\mathbf{R}^n)$. З [8] відомо, що функція $U(x)$ для $\|x\| > 1$ задовольняє співвідношенню

$$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{M}\sum_{i,j=1}^{n}(B^r x)_i (B^r x)_j \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n}(Ax)_i \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} = -\|x\|^p, \tag{4}$$

де позначено

$$(B^r x)_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}^r x_k, \qquad (Ax)_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k, \qquad i = 1, \ldots, n, \ r = 1, \ldots, M.$$

Покладемо

$$V(t, x, \varepsilon) = U(x) - V_0(x, \varepsilon)e^{-\varepsilon t} - \varepsilon \int_0^t e^{-\varepsilon(t-u)} \left[F(u, x) - \overline{F}(x)\right] d\tau,$$

$$V_0(x, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1 - e^{-\varepsilon t}} \int_0^T e^{-\varepsilon(T-u)} \left[F(u, x) - \overline{F}(x)\right] du,$$

$$F(t, x) = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{n} \sigma_i^r(t, x) \cdot \sigma_j^r(t, x) \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t, x) \frac{\partial U(x)}{\partial x_i},$$

$$\overline{F}(x) = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{n} \bar{\sigma}_{ij}^r(x) \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i(t, x) \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}.$$

Перевіримо виконання умови A), тобто T-періодичність функції $V(t, x, \varepsilon)$ по t. Якщо покласти $G(t, x) = F(t, x) - \overline{F}(x)$, то завдяки припущнню 1) теореми будемо мати

$$\begin{aligned}
\varepsilon \int_0^{t+T} e^{-\varepsilon(t+T-u)} G(u, x)\, du &= \varepsilon \int_0^{t+T} e^{-\varepsilon u} G(t + T - u)\, du \\
&= \varepsilon \int_0^t e^{-\varepsilon u} G(t - u, x)\, du + \varepsilon \int_t^{t+T} e^{-\varepsilon u} G(t + T - u, x)\, du \\
&= \varepsilon \int_0^t e^{-\varepsilon u} G(t - u, x)\, du + \varepsilon \int_0^T e^{-\varepsilon(t+T-u)} G(u, x)\, du \\
&= \varepsilon \int_0^T e^{-\varepsilon(t-u)} G(u, x)\, du + e^{-\varepsilon t}\left[1 - e^{-\varepsilon T}\right] \cdot V_0(x, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
V(t + T, x, \varepsilon) - U(x) &= e^{-\varepsilon(t+T)} V_0(x, \varepsilon) - \varepsilon \int_0^{t+T} e^{-\varepsilon(t+T-u)} G(u, x)\, du \\
&= e^{-\varepsilon t} \cdot e^{-\varepsilon T} V_0(x, \varepsilon) - \varepsilon \int_0^t e^{-\varepsilon(t-u)} G(u, x)\, du + e^{-\varepsilon t}\left[1 - e^{-\varepsilon T}\right] V_0(x, \varepsilon) \\
&= e^{-\varepsilon t} \cdot V_0(x, \varepsilon) - \varepsilon \int_0^t e^{-\varepsilon(t-u)} G(u, x)\, du = V(t, x, \varepsilon) - U(x).
\end{aligned}$$

Умова A) виконана.

Виконання умови B) забезпечується припущенням 3) теореми та гладкістю функції $U(x)$.

Перевіремо справедливість умови C) для функції $V(t,x,\varepsilon)$. Згідно 2) маємо:

$$\begin{gathered} b(t,x)-\bar{b}(x)=b_0(t,x)+P_1(t)x,\\ \sigma_1^r(t,x)\sigma_j^r(t,x)-\overline{\sigma_{ij}^r}(x)=q_{0ij}^r(t,x)+\left(q_{1ij}^r(t,x),x\right)+\left(q_{2ij}^r(t)x,x\right),\\ P_1(t)=b_1(t)-\bar{b}_1,\qquad \bar{P}_1=0,\\ q_{2ij}^r(t)=\left(h_{ijkl}^r(t)-\bar{h}_{ijkl}^r\right),\qquad \bar{q}_{2ij}^r=0,\\ \left|q_{0ij}^r(t,x)\right|+\left|q_{1ij}^r(t,x)\right|\le 2k. \end{gathered}$$

Враховуючи оцінку (3) та припущення 2) отримаємо

$$F(t,x)-\overline{F}(x)=S_0(t)G_0(x)+S_1(t,x)G_1(x)+S_2(t,x)G_2(x), \tag{5}$$

та

$$\begin{gathered} \overline{S}_0=0,\qquad |S_1(t,x)|+|S_2(t,x)|\le 2K_1;\\ K_1\|x\|^p\le|G_0(x)|\le K_2\|x\|^p,\qquad |G_i(x)|\le K_2\|x\|^{p-i},\\ \|x\|>1,\qquad K_i=\text{const},\quad i=1,2. \end{gathered}\tag{6}$$

Оскільки функція $S_0(t)\cdot G_0(x)$ задовольняє умовам леми, то з врахуванням (5) та (6), маємо

$$\begin{gathered} \sup_{t\ge0,\|x\|>1}\left|\varepsilon\int_0^t e^{-\varepsilon(t-u)}\left[F(u,x)-\overline{F}(x)\right]du\right|\le R_1(\varepsilon)\|x\|^p+R_2\|x\|^{p-1}+R_3\|x\|^{p-2};\\ \lim_{\varepsilon\to0}R_1(\varepsilon)=0,\qquad R_i=\text{const},\quad i=2,3. \end{gathered}\tag{7}$$

Аналогічно оцінюючи функцію $V_0(x,\varepsilon)e^{-\varepsilon t}$ легко переконатися, що при $\|x\|>1$

$$\begin{gathered} \left|V_0(x,\varepsilon)e^{-\varepsilon t}\right|\le R_4(\varepsilon)\|x\|^p+R_5\|x\|^{p-1}+R_6\|x\|^{p-2},\\ \lim_{\varepsilon\to0}R_4(\varepsilon)=0,\qquad R_i=\text{const},\quad i=5,6. \end{gathered}\tag{8}$$

Тепер з (7), (8) та (4) для $V(t,x,\varepsilon)$ при $\|x\|>1$ випливає, що

$$V(t,x,\varepsilon)\ge(C_1-R_1(\varepsilon)-R_4(\varepsilon))\|x\|^p-(R_2+R_5)\|x\|^{p-1}-(R_3+R_6)\|x\|^{p-2}. \tag{9}$$

Безпосереднім наслідком (9) є існування такого $\varepsilon_1>0$, що при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ та $t\ge0$

$$\lim_{R\to\infty}\inf_{\|x\|>R}V(t,x,\varepsilon)=+\infty.$$

Умова C) виконується.

Залишається перевірити умову D). Для $LV(t,x,\varepsilon)$ маємо

$$\begin{aligned} LV(t,x,\varepsilon)=\varepsilon\Bigg\{\overline{F}(x)+Z(t,x,\varepsilon)-\frac12\sum_{r=1}^N\sum_{i,j=1}^n\sigma_i^r(t,x)\sigma_j^r(t,x)\frac{\partial^2 Z(t,x,\varepsilon)}{\partial x_i\partial x_j}&\\ -\sum_{i=1}^n b_i(t,x)\frac{\partial Z(t,x,\varepsilon)}{\partial x_i}\Bigg\},& \end{aligned}\tag{10}$$

де позначено

$$Z(t,x,\varepsilon)=-V_0(x,\varepsilon)e^{-\varepsilon t}-\varepsilon\int_0^t e^{-\varepsilon(t-u)}\left[F(u,x)-\overline{F}(x)\right]du.$$

Виходячи з (3) та (4), отримаємо

$$\begin{gathered} \overline{F}(x)\le-\|x\|^p+R_7\|x\|^{p-1}+R_8\|x\|^{p-2},\\ \|x\|>1,\qquad R_i=\text{const},\quad i=7,8. \end{gathered}\tag{11}$$

Діючи, як при перевірці умови C), приходимо до нервіності:

$$\left| Z(t,x,\varepsilon) - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{n} \sigma_i^r(t,x)\cdot\sigma_j^r(t,x)\frac{\partial^2 Z(t,x,\varepsilon)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial Z(t,x,\varepsilon)}{\partial x_i} \right|$$
$$\le R_9(\varepsilon)\|x\|^p + R_{10}\|x\|^{p-1} + R_{11}\|x\|^{p-2} + R_{12}\|x\|^{p-3} + R_{13}\|x\|^{p-4}, \qquad (12)$$
$$\|x\| > 1, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} R_9(\varepsilon) = 0, \qquad R_i = \text{const}, \quad i = 10,\dots,13.$$

В результаті (10), (11) та (12) $LV(t,x,\varepsilon)$ оцінюється як

$$LV(t,x,\varepsilon)$$
$$\le \varepsilon\big\{(-1+R_9(\varepsilon))\|x\|^p + R_{10}\|x\|^{p-1} + R_{11}\|x\|^{p-2} + R_{12}\|x\|^{p-3} + R_{13}\|x\|^{p-4}\big\} \qquad (13)$$

при $\|x\| > 1$, тобто існує таке $\varepsilon_2 > 0$, що при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ та $t \ge 0$

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{\|x\|>R} LV(t,x,\varepsilon) = -\infty.$$

Умова D) виконується.

Теорема доведена. □

Література

1. Р. З. Хасьминский, *Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров*, "Наука", Москва, 1969.
2. А. Я. Дороговцев, *Періодичні і стаціонарні режими нескінченномірних детермінованих і стохастичних динамічних систем*, "Вища школа", Київ, 1992.
3. ———, *Некоторые замечания о дифференциальных уравнениях, возмущаемых переодическими случайными процессами*, Укр. мат. ж. **14** (1962), № 2, 119–128.
4. T. Morozan, *Periodic solutions of some affine stochastic differential equations*, Prepr. Babes-Bolyai Univ. Fac. Math. **3** (1986), 105–112.
5. ———, *Periodic solutions of affine stochastic differential equations*, Atoch. Anal. **4** (1986), № 1, 87–110.
6. A. Ya. Dorogovtsev, *Necessary and sufficient connotations for existence of stationary and periodic solution of a stochastic difference equation in Hilbert space*, Computes Math. Appl. **1** (1990), 31–37.
7. A. V. Ilchenko, *Asymptotic behavior of solutions of nonhomogeneous linear systems of stochastic differential equations with constant coefficients*, Rand. Oper. Stoch. Eq. **1** (1993), № 1, 47–55.
8. А. В. Скороход, *Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений*, т. 1987, "Наукова думка", Київ.
9. Ю. А. Митропольский, *Метод усреднения в нелинейной механике*, "Наукова думка", Київ, 1971.

252022 Київ, пр. Академіка Глушкова, 6, Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра загальної математики

Надійшла 28/12/1999