Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 61, 1999, стор. 39–46

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 61, 1999, pp. 39–46

ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ КРАТНИХ СУМ

УДК 519.21

О. І. КЛЕСОВ

Резюме. Доведено закон повторного логарифма для зважених кратних сум незалежних однаково розподілених випадкових величин.

Нехай $\{X_n, n \geq 1\}$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, а $\{S_n, n \geq 1\}$ — послідовність часткових сум, $S_1 = X_1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ для $n \geq 2$. Хартман та Вінтнер [2] довели, що

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\chi(n)} = -1, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\chi(n)} = 1 \tag{1}$$

майже напевно, якщо

$$\mathsf{E}\, X = 0, \qquad \mathsf{E}\, X^2 = 1, \tag{2}$$

де $\chi(x) = \sqrt{2x \ln^+ \ln^+ x}$, $\ln^+ x = \ln(1 + |x|)$, а випадкова величина X має той же розподіл, що й всі X_n. Штрассен [4] довів, що з умови (1) випливають умови (2).

Розглянемо поле $\{X(\bar{n}), \bar{n} \in \mathbf{N}^d\}$ незалежних однаково розподілених випадкових величин й поле $\{S(\bar{n}), \bar{n} \in \mathbf{N}^d\}$ їх часткових сум,

$$S(\bar{n}) = \sum_{\bar{k} \leq \bar{n}} X(\bar{k}),$$

де "$\leq$" — покоординатний порядок в просторі $\mathbf{N}^d$. Для цього випадку Вічура [5] довів, що закон повторного логарифма, тобто співвідношення

$$\liminf \frac{S(\bar{n})}{\chi(|\bar{n}|)} = -\sqrt{d} \quad \text{та} \quad \limsup \frac{S(\bar{n})}{\chi(|\bar{n}|)} = \sqrt{d} \quad \text{м.н.} \tag{3}$$

є еквівалентним при $d \geq 2$ умовам (2) та

$$\mathsf{E}\, X^2 \frac{\left(\ln^+ |X|\right)^{d-1}}{\ln^+ \ln^+ |X|} < \infty, \tag{4}$$

де $|\bar{n}| = n_1 \ldots n_d$ для $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_d)$, м.н. — "майже напевно".

Співвідношення $\limsup a(\bar{n}) = a$ для поля $\{a(\bar{n}), \bar{n} \in \mathbf{N}^d\}$ та числа a означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ нерівність $a(\bar{n}) > (1+\varepsilon)a$ виконується лише скінченну кількість разів, а нерівність $a(\bar{n}) > (1-\varepsilon)a$ — нескінченну кількість разів. Співвідношення $\liminf a(\bar{n}) = a$ означає, що $\limsup[-a(\bar{n})] = -a$.

В цій роботі ми доводимо закон повторного логарифма для кратних сум зважених випадкових величин. Ми використовуємо два числових поля $\{W^2(\bar{n}), \bar{n} \in \mathbf{N}^d\}$ та $\{\varphi(\bar{n}), \bar{n} \in \mathbf{N}^d\}$. Нехай $\{w(\bar{n}), \bar{n} \in \mathbf{N}^d\}$ — невипадкові числа,

$$W^2(\bar{n}) = \sum_{\bar{k} \leq \bar{n}} w^2(\bar{k}).$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60F05.

Припустимо, що

$$\lim W^2(\bar{n}) = \infty. \tag{5}$$

Умова (5) означає, що для будь-якого числа Δ нерівність $W^2(\bar{n}) < \Delta$ виконується лише скінченну кількість разів.

Припустимо також, що існують монотонно зростаючі послідовності $\{W_k^{(1)}, k \geq 1\}$, $\ldots, \{W_k^{(d)}, k \geq 1\}$, такі, що

$$\lim \frac{W^2(\bar{n})}{W_{n_1}^{(1)} \ldots W_{n_d}^{(d)}} = 1, \tag{6}$$

де $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_d)$. Умова (6) означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ нерівність

$$\left| \frac{W^2(\bar{n})}{W_{n_1}^{(1)} \ldots W_{n_d}^{(d)}} - 1 \right| > \varepsilon$$

виконується лише скінченну кількість разів.

Вважаємо також, що для будь-якого $1 \leq j \leq d$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{W_{k+1}^{(j)}}{W_k^{(j)}} = 1. \tag{7}$$

Нехай $\{\varphi(\bar{n}), \bar{n} \in \mathbf{N}^d\}$ — монотонно зростаюче та необмежене поле, тобто

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{k}) \leq \varphi(\bar{n}) \quad &\text{для } \bar{k} \leq \bar{n}, \\ \lim \varphi(\bar{n}) = \infty. \end{aligned} \tag{8}$$

Припустимо, що

$$\min_{\bar{\lambda} \in \Lambda} \varphi\left(\bar{n} + \bar{\lambda}\right) = O\left(\varphi(\bar{n})\right), \tag{9}$$

де Λ — множина індексів, всі координати яких дорівнюють нулю, крім однієї, яка дорівнює 1. Зауважимо, що $\operatorname{card}(\Lambda) = d$. Умова (9) виконана, наприклад, якщо $\varphi(\bar{n} + \bar{\mathbf{1}}) = O(\varphi(\bar{n}))$ для $\bar{\mathbf{1}} = (1, \ldots, 1)$.

Теорема 1. *Нехай $\{X(\bar{n}), \bar{n} \in \mathbf{N}^d\}$ — поле незалежних однаково розподілених випадкових величин з $\mathsf{E}\, X = 0$, $\mathsf{E}\, X^2 = 1$. Нехай поле $\{W^2(\bar{n}), \bar{n} \in \mathbf{N}^d\}$ задовольняє умови (5)–(7), а поле $\{\varphi(\bar{n}), \bar{n} \in \mathbf{N}^d\}$ — умови (8)–(9). Якщо*

$$\sum_{\bar{n} \in \mathbf{N}^d} \mathsf{P}(|X| \geq \varphi(\bar{n})) < \infty \tag{10}$$

та

$$\sum_{\bar{n} \in \mathbf{N}^d} \left(\frac{w^2(\bar{n})}{\chi^2\left(W^2(\bar{n})\right)} \right)^{1+\delta/2} \int_{|x| < \varphi(\bar{n})} |x|^{2+\delta} \, dF(x) < \infty, \tag{11}$$

для деякого $0 < \delta < 1$, то виконаний закон повторного логарифма, тобто

$$\liminf \frac{S(\bar{n})}{\chi\left(W^2(\bar{n})\right)} = -\sqrt{d} \quad \text{та} \quad \limsup \frac{S(\bar{n})}{\chi\left(W^2(\bar{n})\right)} = \sqrt{d} \quad \text{майже напевно,} \tag{12}$$

де $S(\bar{n}) = \sum_{\bar{k} \leq \bar{n}} w(\bar{k}) X(\bar{k})$, $F(\cdot)$ — функція розподілу випадкових величин $X(\bar{n})$.

Зауваження 1. Якщо φ залежить лише від $|\bar{n}|$, то умова (10) стає простішою. Позначимо через τ_k кількість розв'язків рівняння $|\bar{n}| = k$ та покладемо $T_k = \tau_1 + \cdots + \tau_k$, $k \geq 2$, $T_1 = \tau_1$. Умова (10) в цьому випадку еквівалентна

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau_k \mathsf{P}(|X| \geq \varphi(k)) < \infty$$

або

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k \mathsf{P}\big(\varphi(k) \le |X| < \varphi(k+1)\big) < \infty.$$

Скориставшись асимптотикою

$$T_k \asymp k \left(\ln^+ k\right)^{d-1}, \tag{D}$$

доводимо, що у випадку регулярно зростаючої функції $\varphi(\cdot)$ умова (10) еквівалентна

$$\mathsf{E}\,\varphi^{-1}(|X|)\left(\ln^+ \varphi^{-1}(|X|)\right) < \infty,$$

де $\varphi^{-1}(\cdot)$ — обернена функція. Наприклад, якщо $\varphi(x) = \sqrt{x \ln^+ \ln^+ x}$, то

$$\varphi^{-1}(x) \asymp \frac{x^2}{\ln^+ \ln^+ x}$$

й умова (10) співпадає з умовою Вічури (4).

Зауваження 2. Якщо $\varphi(\bar{n}) = \sqrt{|\bar{n}| \ln^+ \ln^+ |\bar{n}|}$ та $w^2(\bar{n}) \asymp 1$, то умова (11) є еквівалентною до

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_k}{\chi^{2+\delta}(k)} \int_{|x|<\varphi(k)} |x|^{2+\delta}\, dF(x) < \infty.$$

Після нескладних перетворень на підставі (D) отримуємо

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_k}{\chi^{2+\delta}(k)} \int_{|x|<\varphi(k)} |x|^{2+\delta}\, dF(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\varphi(j-1)\le|x|<\varphi(j)} |x|^{2+\delta}\, dF(x) \sum_{k=j}^{\infty} \frac{\tau_k}{\chi^{2+\delta}(k)} \\
&\le \mathrm{const}\cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\ln^+ j\right)^{d-1}}{j^{\delta/2}\left(\ln^+\ln^+ j\right)^{1+\delta/2}} \varphi^{2+\delta}(j) \mathsf{P}\big(\varphi(j-1) \le |X| < \varphi(j)\big) \\
&= \mathrm{const}\cdot \sum_{j=1}^{\infty} j \left(\ln^+ j\right)^{d-1} \mathsf{P}\big(\varphi(j-1) \le |X| < \varphi(j)\big) \\
&\le \mathrm{const}\cdot \mathsf{E}\,X^2 \frac{\left(\ln^+ |X|\right)^{d-1}}{\ln^+\ln^+|X|},
\end{aligned}$$

тобто умова (11) випливає з (4).

Зауваження 3. Розглянемо найпростіший випадок $w(\bar{n}) = 1$ для всіх $\bar{n}$. Візьмемо $\varphi(\bar{n}) = \sqrt{|\bar{n}| \ln^+ \ln^+ |\bar{n}|}$. Як ми довели у зауваженнях 1 та 2, умови (10) та (11) в цьому випадку випливають з умови Вічури (4). Таким чином, з теореми 1 випливає, що закон повторного логарифма (12) виконаний, якщо виконані умови (2) та (4). Таким чином, теорема 1 узагальнює результат Вічури [5]. Необхідність умов (2) та (4) в цьому випадку також неважко отримати.

Дійсно, якщо (3) виконано, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ нерівність

$$|X(\bar{n})| > 2^d \left(\sqrt{d} + \varepsilon\right) \chi(|\bar{n}|)$$

майже напевно виконується лише скінченну кількість разів. Оскільки випадкові величини $X(\bar{n})$ незалежні, то за лемою Бореля–Кантеллі

$$\sum_{\bar{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}\big(|X(\bar{n})| \ge \gamma\chi(|\bar{n}|)\big) < \infty,$$

де $\gamma = 2^d(\sqrt{d}+\varepsilon)$. Оскільки випадкові величини $X(\bar{n})$ однаково розподілені, то

$$\sum_{k\geq 1} \tau_k \mathsf{P}\big(|X| \geq \gamma\chi(k)\big) < \infty.$$

Після перетворень отримуємо

$$\sum_{k\geq 1} T_k \mathsf{P}\big(\chi(k) \leq |X/\gamma| < \chi(k+1)\big) < \infty.$$

На підставі асимптотики (D) звідси випливає умова (4). Інші моментні умови в (2) випливають з класичного закону повторного логарифма.

Доведення теореми 1. Розглянемо випадкові величини

$$Y(\bar{n}) = \begin{cases} X(\bar{n}), & \text{якщо } |X(\bar{n})| < \varphi(\bar{n}), \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

З умови (10) та леми Бореля–Кантеллі випливає, що

$$\mathsf{P}\big(X(\bar{n}) \neq Y(\bar{n}) \text{ н.к.р.}\big) = 0,$$

де "н.к.р." — це скорочення для "нескінченну кількість разів". Таким чином закон повторного логарифма (12) випливає з

$$\lim \frac{1}{\chi\left(W^2(\bar{n})\right)} \sum_{\bar{k}\leq\bar{n}} w(\bar{k})\mu(\bar{k}) = 0, \tag{13}$$

$$\limsup \frac{1}{\chi\left(W^2(\bar{n})\right)} \sum_{\bar{k}\leq\bar{n}} \mu(\bar{k})\left(Y(\bar{k}) - \mu(\bar{k})\right) = \sqrt{d},$$

$$\liminf \frac{1}{\chi\left(W^2(\bar{n})\right)} \sum_{\bar{k}\leq\bar{n}} \mu(\bar{k})\left(Y(\bar{k}) - \mu(\bar{k})\right) = -\sqrt{d}, \tag{14}$$

де

$$\mu(\bar{k}) = \mathsf{E}Y(\bar{k}) = \int_{|x|<\varphi(\bar{k})} x\,dF(x).$$

Для доведення (13) застосуємо нерівність Коші–Буняковського:

$$\left|\frac{1}{\chi\left(W^2(\bar{n})\right)} \sum_{\bar{k}\leq\bar{n}} w(\bar{k})\mu(\bar{k})\right| \leq \left(\frac{1}{2\ln^+\ln^+ W^2(\bar{n})} \sum_{\bar{k}\leq\bar{n}} \mu^2(\bar{k})\right)^2.$$

Оскільки виконана умова (5), (10) випливає зі збіжності ряду $\sum \mu^2(\bar{n})$. Доведемо, що цей ряд збігається.

Розглянемо множину чисел $\Psi = \{\varphi(\bar{n}), \bar{n} \in \mathbf{N}^d\}$. Нехай $\{\psi_k, k \geq 1\}$ — це числа множини Ψ, розташовані у зростаючому порядку з урахуванням повторів. Таким чином, якщо для деякого z в множині Ψ існує l чисел, рівних z, то $\{\psi_k, k \geq 1\}$ містить l послідовних елементів, що дорівнюють z. Зрозуміло, що умова (10) еквівалентна збіжності ряду $\sum_{k\geq 1} \mathsf{P}(|X| \geq \psi_k)$. Покладемо $\mu_k = \int_{|x|<\psi_k} x\,dF(x)$ й доведемо, що $\sum_{k\geq 1} \mu_k^2 < \infty$, це й означає, що ряд $\sum_{\bar{n}\in\mathbf{N}^d} \mu^2(\bar{n})$ збігається. Зауважимо, що з $\mathsf{E}X = 0$ випливає

$$|\mu_n| \leq \int_{|x|\geq\psi_n} |x|\,dF(x) = \sum_{i=n}^{\infty} \alpha_i, \quad \text{де } \alpha_i = \int_{\psi_i\leq|x|<\psi_{i+1}} |x|\,dF(x).$$

Ми маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^2 \le \sum_{n=1}^{\infty}|\mu_n|\sum_{i=n}^{\infty}\alpha_i = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\sum_{n=1}^{i}|\mu_n| \le \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\sum_{n=1}^{i}\sum_{j=n}^{\infty}\alpha_j$$
$$\le \sum_{i=1}^{\infty} i\alpha_i\sum_{j>i}\alpha_j + \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\sum_{j\le i} j\alpha_j \le 2\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m\sum_{n\le m} n\alpha_n.$$

Далі

$$\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m\sum_{n\le m} n\alpha_n \le \sum_{m=1}^{\infty}\int_{\psi_m\le|x|<\psi_{m+1}}\frac{x^2}{\varphi(m)}\,dF(x)\sum_{n=1}^{m} n\alpha_n,$$
$$\frac{1}{\varphi(m)}\sum_{n=1}^{m} n\alpha_n \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\alpha_n}{\psi_n} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n} n\mathsf{P}\big(\psi_n\le|X|<\psi_{n+1}\big)$$
$$\le \mathrm{const}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(|X|\ge\psi_n).$$

Зауважимо, що співвідношення $\psi_{n+1}=O(\psi_n)$ є наслідком умови (9). Таким чином,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^2 \le \mathrm{const}\cdot\left[\sum_{m=1}^{\infty}\int_{\psi_m\le|x|<\psi_{m+1}} x^2\,dF(x)\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(|X|\ge\psi_n)\right] < \infty,$$

що й доводить збіжність $\sum \mu_k^2$, тобто $\sum \mu^2(\bar n) < \infty$ і співвідношення (13) виконане.

Доведемо тепер співвідношення (14). Спочатку ми розглядаємо твердження для $\limsup$. Покладемо

$$\widehat{W}^2(\bar n) = \sum_{\bar k\le\bar n} w^2(\bar k)\,\mathrm{Var}\,Y(\bar k).$$

Зрозуміло, що

$$\lim\frac{\widehat{W}(\bar n)}{W(\bar n)} = 1. \tag{15}$$

Дійсно, для довільного $\varepsilon>0$ нерівність $|\mathrm{Var}\,Y(\bar n)-\mathrm{Var}\,X|>\varepsilon$ може виконуватись лише скінченну кількість разів, оскільки $\lim\varphi(\bar n)=\infty$. Тоді нерівності $W(\bar n)(1-\varepsilon) > \widehat{W}(\bar n)$ та $\widehat{W}(\bar n) > W(\bar n)(1+\varepsilon)$ можуть виконуватись лише скінченну кількість разів, що й доводить (15) на підставі довільності ε.

З (15) та (6) випливає також, що

$$\widehat{W}(\bar n) = W_{n_1}^{(1)}\ldots W_{n_d}^{(d)}(1+o(1)), \qquad \bar n=(n_1,\ldots,n_d).$$

Зафіксуємо $\theta_0>1$, покладемо $\theta=\theta_0^2$ та означимо d послідовностей $\{n_k^{(i)},k\ge1\}$, $i=1,\ldots,d$, таких, що

$$W_{n_k^{(i)}}^{(i)} \le \theta_0^k < W_{n_k^{(i)}+1}^{(i)}, \qquad i=1,\ldots,d.$$

Послідовності $\{n_k^{(i)},k\ge1\}$ однозначно визначаються для досить великих k, скажімо для $k>k_0^{(i)}$, оскільки виконана умова (7). Значення $n_k^{(i)}$ для $k\le k_0^{(i)}$ не грають визначальної ролі для подальших міркувань й тому можуть бути обрані довільним чином, наприклад $n_k^{(i)}=1$, $k\le k_0^{(i)}$.

Будемо користуватись наступною нерівністю Бікяліса [1]: *Якщо* $\{Y_k, k \ge 1\}$ — *незалежні випадкові величини,* $\mathsf{E}\, Y_k = \mu_k$, $\mathrm{Var}(Y_k) = \sigma_k^2$, $B_n = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$, *та* $\mathsf{E}\,|Y_k|^{2+\delta} < \infty$ *для деякого* $\delta \in (0,1)$, *то для будь-яких* $n \ge 1$ *та* $x \in \mathbf{R}$

$$\left| \mathsf{P}\Big(\sum_{k\le n} (Y_k - \mu_k) \ge x\sqrt{B_n} \Big) - \Phi(-x) \right| \le \frac{\mathrm{const}}{B_n^{1+\delta/2}(1+|x|)^{2+\delta}} \sum_{k\le n} \mathsf{E}\,|Y_k|^{2+\delta},$$

де const — *універсальна константа,* $\Phi(\cdot)$ — *стандартна гауссівська функція розподілу,*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{ -\frac{1}{2} s^2 \right\} ds.$$

Нехай

$$\zeta(\bar n) = \sum_{\bar k \le \bar n} w(\bar k)\big[Y(\bar k) - \mu(\bar k)\big], \qquad C(\bar n) = \chi\left(\widehat{W}^2(\bar n)\right).$$

Зрозуміло, що $\widehat{W}^2(\bar n) = \mathrm{Var}\,\zeta(\bar n)$.

Поклавши у нерівності Бікяліса

$$x = \sqrt{(d+\gamma) 2 \ln\ln \widehat{W}^2(\bar n)},$$

отримуємо оцінку

$$\left| \mathsf{P}\left(\zeta(\bar n) \ge x\widehat{W}(\bar n) \right) - \Phi(-x) \right| \le \mathrm{const}\, \frac{1}{\big(C(\bar n)\big)^{2+\delta}} \sum_{\bar k \le \bar n} |w(\bar k)|^{2+\delta} \int_{|x|<\varphi(\bar k)} |x|^{2+\delta}\, dF(x).$$

Нехай $\bar n(\bar k) = (n_{k_1}^{(1)}, \ldots, n_{k_d}^{(d)})$, $\bar k = (k_1, \ldots, k_d)$. Для

$$x = \sqrt{(d+\gamma) 2 \ln\ln \widehat{W}^2(\bar n)}$$

маємо

$$\begin{aligned} &\left| \mathsf{P}\left(\zeta\left(\bar n(\bar k)\right) \ge x\widehat{W}\left(\bar n(\bar k)\right) \right) - \Phi(-x) \right| \\ &\qquad \le \mathrm{const}\, \frac{1}{\left(C\left(\bar n(\bar k)\right)\right)^{2+\delta}} \sum_{\overline{m} \le \bar n(\bar k)} |w(\overline{m})|^{2+\delta} \int_{|x|<\varphi(\overline{m})} |x|^{2+\delta}\, dF(x). \end{aligned}$$

Доведемо, що

$$\sum_{\bar k \in \mathbf{N}^d} \frac{1}{\left(C\left(\bar n(\bar k)\right)\right)^{2+\delta}} \sum_{\overline{m} \le \bar n(\bar k)} |w(\overline{m})|^{2+\delta} \int_{|x|<\varphi(\overline{m})} |x|^{2+\delta}\, dF(x) < \infty.$$

Спочатку зауважимо, що

$$\widehat{W}(\bar n(\bar k)) \sim \theta_0^{k_1+\cdots+k_d}.$$

Позначимо

$$a(\overline{m}) = \sum_{\bar n(\overline{m}-\bar{\mathbf{1}}) < \bar\nu \le \bar n(\overline{m})} |w(\bar\nu)|^{2+\delta} \int_{|x|<\varphi(\bar\nu)} |x|^{2+\delta}\, dF(x).$$

Тоді

$$\begin{aligned}
&\sum_{\bar{k}\in\mathbf{N}^d} \frac{1}{\left(C(\bar{n}(\bar{k}))\right)^{2+\delta}} \sum_{\overline{m}\le\bar{n}(\bar{k})} |w(\overline{m})|^{2+\delta} \int_{|x|<\varphi(\overline{m})} |x|^{2+\delta}\, dF(x)\\
&\quad\le \text{const}\cdot \sum_{\bar{k}\in\mathbf{N}^d} \frac{1}{\chi^{2+\delta}(\theta^{k_1+\cdots+k_d})} \sum_{\overline{m}\le\bar{k}} a(\overline{m})\\
&\quad= \text{const}\cdot \sum_{\overline{m}\in\mathbf{N}^d} a(\overline{m}) \sum_{\bar{k}\ge\overline{m}} \frac{1}{\chi^{2+\delta}(\theta^{k_1+\cdots+k_d})}\\
&\quad\le \text{const}\cdot \sum_{\overline{m}\in\mathbf{N}^d} a(\overline{m}) \frac{1}{\chi^{2+\delta}(\theta^{m_1+\cdots+m_d})}\\
&\quad\le \text{const} + \text{const}\cdot \sum_{\bar{n}\in\mathbf{N}^d} \left(\frac{w^2(\bar{n})}{\chi^2(W(\bar{n}))}\right)^{1+\delta/2} \int_{|x|<\varphi(\bar{n})} |x|^{2+\delta}\, dF(x) < \infty.
\end{aligned}$$

Оскільки для будь-якого $\gamma > 0$

$$\sum_{\bar{k}\in\mathbf{N}^d} \Phi\left(-\sqrt{(d+\gamma)2\ln\ln \widehat{W}^2\left(\bar{n}(\bar{k})\right)}\right) < \infty,$$

то

$$\sum_{\bar{k}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}\left(\zeta\left(\bar{n}(\bar{k})\right) \ge \sqrt{d+\gamma}\, C\left(\bar{n}(\bar{k})\right)\right) < \infty.$$

На підставі нерівності Колмогорова для кратних сум [3] для будь-якого $x > 0$

$$\mathsf{P}\left(\max_{n\le\bar{n}(\bar{k})} \zeta(\bar{n}) \ge x\right) \le 2^d \mathsf{P}\left(\zeta\left(\bar{n}(\bar{k})\right) \ge x - d\sqrt{2\operatorname{Var}\zeta\left(\bar{n}(\bar{k})\right)}\right)$$

й тому для будь-якого $\gamma > 0$

$$\sum_{\bar{k}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}\left(\max_{n\le\bar{n}(\bar{k})} \zeta(\bar{n}) \ge \sqrt{d+\gamma}\, C\left(\bar{n}(\bar{k})\right)\right) < \infty.$$

Звідси і леми Бореля–Кантеллі випливає, що

$$\limsup \frac{\zeta(\bar{n})}{\chi\left(\widehat{W}^2(\bar{n})\right)} \le \sqrt{d+\gamma} \quad \text{м.н.}$$

Оскільки $\gamma > 0$ довільне, то це співвідношення виконується і для $\gamma = 0$.

Для доведення протилежної нерівності покладемо

$$\mathcal{S}(\bar{k}) = \sum_{\bar{n}(\bar{k})<\overline{m}\le\bar{n}(\bar{k}+\bar{\mathbf{1}})} w(\overline{m})(Y(\overline{m}) - \mu(\overline{m})),$$

$$\mathcal{W}^2(\bar{k}) = \sum_{\bar{n}(\bar{k})<\overline{m}\le\bar{n}(\bar{k}+\bar{\mathbf{1}})} w^2(\overline{m}) \operatorname{Var} Y(\overline{m}), \qquad \mathcal{C}(\bar{k}) = \chi\left(\mathcal{W}^2(\bar{k})\right).$$

Таким чином $\mathcal{W}^2(\bar{k}) = \operatorname{Var}\mathcal{S}^2(\bar{k})$. Ще раз застосуємо нерівність Бікяліса:

$$\begin{aligned}
&\left|\mathsf{P}\left(\mathcal{S}(\bar{k}) \ge \sqrt{d-\gamma}\,\mathcal{C}(\bar{k})\right) - \Phi\left(-\sqrt{(d-\gamma)2\ln\ln\mathcal{W}^2(\bar{k})}\right)\right|\\
&\quad\le \text{const}\, \frac{1}{\left(\mathcal{C}(\bar{k})\right)^{2+\delta}} \sum_{\bar{n}(\bar{k})<\overline{m}\le\bar{n}(\bar{k}+\bar{\mathbf{1}})} \mathsf{E}\left|w(\overline{m})\big(Y(\overline{m}) - \mu(\overline{m})\big)\right|^{2+\delta}.
\end{aligned}$$

Як і вище

$$\sum_{\bar{k}\in\mathbf{N}^d} \frac{1}{\left(\mathcal{C}(\bar{k})\right)^{2+\delta}} \sum_{\bar{n}(\bar{k})<\overline{m}\leq\bar{n}(\bar{k}+\bar{1})} \mathsf{E}\left|w(\overline{m})\big(Y(\overline{m})-\mu(\overline{m})\big)\right|^{2+\delta} < \infty.$$

З іншого боку, для $\gamma > 0$

$$\sum_{\bar{k}\in\mathbf{N}^d} \Phi\left(-\sqrt{(d-\gamma)2\ln\ln\widehat{W}^2\left(\bar{n}(\bar{k})\right)}\right) = \infty$$

й тому

$$\sum_{\bar{k}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}\left(\mathcal{S}(\bar{k}) \geq \sqrt{d-\gamma}\,\mathcal{C}(\bar{k})\right) = \infty.$$

Застосовуючи лему Бореля–Кантеллі для незалежних подій, доводимо

$$\limsup \frac{\zeta(\bar{n})}{\chi\left(\widehat{W}^2(\bar{n})\right)} \geq \sqrt{d-\gamma} \quad \text{м.н.}$$

Оскільки $\gamma > 0$ довільне, то це співвідношення виконується і для $\gamma = 0$.

Таким чином, теорема 1 повністю доведена. □

Література

1. А. Бикялис, *Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме*, Литовский матем. сб. **6** (1966), № 3, 323–346.
2. A. Hartman and A. Wintner, *On the law of the iterated logarithm*, Amer. J. Math **64** (1941), № 2, 273–298.
3. О. И. Клесов, *Закон повторного логарифма для кратных сумм*, Теория вероятн. матем. статист. **27** (1982), 60–67.
4. V. Strassen, *A converse to the law of the iterated logarithm*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **4** (1966), № 4, 265–268.
5. M. Wichura, *Some Strassen-type laws of the iterated logarithm for multiparameter stochastic processes with independent increments*, Ann. Probab. **1** (1973), № 2, 272–296.

Національний технічний університет України, кафедра вищої математики #1, пр. Перемоги, 37, 02056 Київ

Електронна адреса: oleg@tbimc.freenet.kiev.ua

Надійшла 01/02/2000