Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 63, 2000, стор. 80–89

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 63, 2000, pp. 80–89

ІНТЕРВАЛЬНІ ОЦІНКИ КЛАСИЧНОЇ ЙМОВІРНОСТІ РОЗОРЕННЯ ДЛЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ РОЗПОДІЛІВ СТРАХОВИХ ВИПЛАТ

УДК 519.21

М. В. КАРТАШОВ

Резюме. Отримані нові двосторонні оцінки для ймовірності розорення з класичної теорії ризику. Використовуються попередні результати автора в теорії відновлення. Розглянуто чисельні приклади.

1. Вступ

Проблему чисельної ("практичної") оцінки ймовірності розорення досліджували різні автори, їх результати опубліковані в десятках статей. Запропоновані ними оцінки грунтуються на методах: граничних теорем для випадкових блукань [Teugels 1982, Grandell 1991], матричних зображень для марковських моделей [Asmussen et al 1991], мартингальних перетворень та ймовірнісних нерівностях [Kalashnikov 1996], дискретної оптимізації [Vylder et al 1997], аналітичних перетворень [Vylder et al 1995], апроксимації ланцюгами Маркова [Карташов 1996], теорії ймовірнісних розподілів [Lin 1996, Willmot 1994, Willmot and Lin 1997], та інших методах.

Дана стаття грунтується на спеціальних методах чисельної апроксимації розв'язків рівняння відновлення, які були розроблені в роботах [Карташов 1978, 1979, 1982] для оцінки швидкості збіжності в теоремі відновлення. Ці методи використовують специфічну інформацію про розподіл часу відновлення і зводяться до спеціальних перетворень рівняння відновлення.

Оцінки знизу в теоремі 1 раніше були отримані в роботі [Lin 1996] та посилені в статті [Willmot and Lin 1997]. Верхня оцінка в (10) в деяких випадках суттєво краща, ніж в роботі [Willmot and Lin 1997] — див. приклад 2. Результати теореми 3 є цілком новими.

2. Позначення та означення

Основні поняття класичної проблеми розорення в теорії ризику викладені в роботі [Grandell 1991].

Розглянемо процес ризику

$$X_t = ct - \sum_{s=1}^{N(t)} Z_s, \tag{1}$$

де $(Z_s, s \geq 1)$ — послідовність незалежних однаково розподілених невід'ємних випадкових величин (сум страхових виплат) зі спільною функцією розподілу $F(t) = \mathsf{P}(Z_1 < t)$ та з середнім $\mu = \mathbf{M}\, Z_1$. $N(t)$ — Пуасонів процес (кількість страхових випадків) з інтенсивністю λ, $\mathsf{P}(N(t) = n) = \exp(-\lambda)\lambda^n/n!$, $n = 0, 1, \ldots$. Стала c дорівнює інтенсивності страхових внесків застрахованих клієнтів (тобто сумі внесків за одиницю часу).

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60J05, 60J10; Secondary 60J45.

Середня відносна інтенсивність приросту страхового фонду дорівнює

$$\rho = \mathbf{M}\, X_1/(\mathbf{M}\, N(1)\, \mathbf{M}\, Z_1) = c/\lambda\mu - 1 > 0. \tag{2}$$

Одночасно з параметром ρ будемо використовувати також показник

$$\theta = \lambda\mu/c = 1/(1+\rho) < 1. \tag{3}$$

Ймовірність розорення визначається як

$$\psi(u) = \mathsf{P}(u + X_t < 0 \text{ для деякого } t > 0), \tag{4}$$

де $u \geq 0$ початковий капітал страхової фірми. Ця функція задовольняє невласне рівняння відновлення [Grandell 1991] вигляду

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty (1 - F(s))\, ds + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-s)(1-F(s))\, ds. \tag{5}$$

Всі наведені нижче результати випливають з (5).

Побудуємо за функцією розподілу F таку щільність та її "залишок":

$$g(t) = (1 - F(t))/\mu, \qquad G(t) = \int_t^\infty g(s)\, ds. \tag{6}$$

Для двох функцій f і g на $\mathbf{R}_+$ їх згорткою $f * g$ назвемо функцію

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-s) g(s)\, ds.$$

Для довільної щільності розподілу f на $[0,\infty]$ її *генератрисою моментів* назвемо функцію

$$\widehat{f}(u) = \int_0^\infty \exp(ut) f(t)\, dt. \tag{7}$$

Згідно з введеними позначеннями рівняння (5) можна переписати у вигляді

$$\psi = \theta G + \theta \psi * g. \tag{8}$$

Означення. Щільність g належить класу $M(\gamma)$, якщо величина

$$\gamma = \inf_{t>0} \left(g(t) \Big/ \int_t^\infty g(s)\, ds \right) > 0.$$

Зауваження 1. Клас $M = \bigcup_{\gamma>0} M(\gamma)$ містить усі щільності розподілу, які є (а) NBUE (New Better than Used in Expectation, [Барлоу, Прошан, 1969]) — нові кращі ніж експлуатовані, або (б) експоненційними сумішами, тобто експоненціальними щільностями з випадковими інтенсивностями.

Зауваження 2. Нехай щільність g визначена з рівності (6), де F — функція розподілу випадкової величини страхової виплати Z. Включення $g \in M(\gamma)$ має місце тоді і тільки тоді, коли

$$\gamma^{-1} = \sup_{t \geq 0} \mathbf{M}(Z - t / Z > t) < \infty.$$

Зауваження 3. (а) Включення $g \in M(\gamma)$ має місце тоді і тільки тоді, коли функція $\exp(\gamma t) \int_t^\infty g(s)\, ds$ не зростає. (б) Якщо $g \in M(\gamma)$, то $\widehat{g}(\alpha) < \infty$ для всіх $\alpha < \gamma$.

Інші деталі про розглянуті класи розподілів можна знайти в роботах [Карташов 1978, 1979, 1982].

3. Основні результати

Теорема 1. *Нехай щільність $g = (1-F)/\mu \in M(\gamma)$ для деякого $\gamma > 0$. Припустимо, що $\theta\widehat{g}(\gamma) > 1$ (зокрема, можливо $\widehat{g}(\gamma) = \infty$). Тоді рівняння*

$$\theta \widehat{g}(R) = 1 \tag{9}$$

має єдиний позитивний корінь $R < \gamma$ (показник Лундберга) і для всіх $t \geq 0$ виконується така інтервальна оцінка

$$B_L \exp(-Rt) \leq \psi(t) \leq B_U \exp(-Rt), \tag{10}$$

де

$$\begin{gathered} B_L = (\theta - \beta)/(1 - \beta) = 1 - R/\gamma > 0, \\ B_U = \psi_R(\infty)\theta/(\theta - \beta(1 - \psi_R(\infty))) < 1, \\ \beta = 1 - (1 - \theta)\gamma/R \in (0, \theta) \end{gathered} \tag{11}$$

та граничне значення

$$\psi_R(\infty) = \lim_{t \to \infty} \psi(t) \exp(Rt) = (1 - \theta)/\theta R \widehat{g}'(R).$$

Розглянемо також для повноти протилежне до другого припущення в Теоремі 1.

Теорема 2. *Нехай щільність $g = (1 - F)/\mu \in M(\gamma)$ для деякого $\gamma > 0$, причому $\theta \widehat{g}(\gamma) \leq 1$. Тоді для всіх $t \geq 0$*

$$\psi(t) \leq \exp(-\gamma t)\theta/(\theta + 1 - \theta \widehat{g}(\gamma)). \tag{12}$$

Зауваження 4. Взагалі кажучи, з умов Теореми 2 не випливають ні існування показника Лундберга, ні справедливість класичної нерівності для ймовірності розорення. Наприклад, достатньо розглянути функцію $G(t) = \exp(-\gamma t)(1 + t)^{-\alpha}$.

Наведені вище нерівності мають зміст при всіх $t \geq 0$. Наступний, більш точний результат може бути застосований лише для достатньо великих t.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови Теореми 1. Позначимо R — позитивний розв'язок рівняння* (9), *$R < \gamma$ за умовою. Нехай параметр $\beta \in (0, \theta)$ визначається як $\beta = 1 - (1 - \theta)\gamma/R$. Розглянемо таку невід'ємну залишкову функцію*

$$r(t) = (1 + Rt)(g(t) - \gamma G(t)). \tag{13}$$

Для довільного фіксованого $\varepsilon \in (0, 1)$ оберемо $\alpha > 0$ таке, що

$$\widehat{r}(R + \alpha) - \widehat{r}(R) \leq (1 - \varepsilon)(1 - \beta/\theta)/\psi_R(\infty). \tag{14}$$

Цей вибір можливий, так як ліва частина (14) *скінченна та неперевна при $0 \leq \alpha < \gamma - R$ і дорівнює 0 при $\alpha = 0$, а права частина строго додатна.*

Тоді для всіх $t \geq 0$ справедлива така посилена інтервальна нерівність

$$-A_L \exp(-\alpha t) \leq \psi(t) \exp(Rt) - \psi_R(\infty) \leq A_U \exp(-\alpha t), \tag{15}$$

де

$$\begin{gathered} A_U = (1 - \psi_R(\infty))\frac{1}{\varepsilon}(\theta - \beta(1 - \psi_R(\infty)))/(\theta - \beta), \\ A_L = \psi_R^2(\infty)\frac{1}{\varepsilon}(1 - \beta)/(\theta - \beta). \end{gathered} \tag{16}$$

Зауваження 5. Фактично нерівність (15) стає ефективною, коли значення лівої та правої частин за порядком є близькими для граничного значення $\psi_R(\infty)$ нормованої ймовірності розорення, тобто при

$$t \geq T_{LU} = \frac{1}{\alpha} \log(\max(A_L, A_U)/\psi_R(\infty)). \tag{17}$$

4. Приклади

Приклад 1. Нехай $F(t) = 1 - \exp(-t/\mu)$. Тоді $\gamma = 1/\mu$, $R = (1 - \theta)/\mu$, та $B_L = B_U = \theta$. Отже, згідно (10) $\psi(t) = \theta \exp(-t(1 - \theta)/\mu)$. Тому для експоненційно розподілених величин страхових виплат Теорема 1 дає точне значення ймовірності розорення.

u	$\psi(u)$	ε_L	ε_U	ε_{LR}	ε_{UR}	ε_D	ε_{DV}
300	0.52114	6.4	6.8	2.2	2.4	5.9	0.3
600	0.30867	6.3	6.9	1.3	1.5	−1.3	0.2
900	0.18287	6.3	6.8	0.8	0.9	−8.0	0.1
1200	0.10834	6.3	6.8	0.5	0.8	−14.3	−0.0
1500	0.06418	6.3	6.9	0.3	0.5	−20.1	−0.1
1800	0.03803	6.3	6.9	0.2	0.4	−25.5	−0.2
2100	0.02253	6.3	6.9	0.1	0.3	−30.6	−0.3
2400	0.01335	6.3	6.9	0.1	0.2	−35.4	−0.4
2700	0.00791	6.3	6.9	0.0	0.1	−39.8	−0.5
3000	0.00468	6.2	6.9	0.0	0.1	−43.3	−0.5

Таблиця 1

Приклад 2. Нехай $g(t) = (1-F(t))/\mu = \exp(-t)(1+t)^{-\alpha}(1+\alpha/(1+t))$ з параметром $\alpha > 0$. Тоді показник $\gamma = 1$ і припущення $\theta\widehat{g}(\gamma) > 1$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\theta > (\alpha-1)/\alpha$. Нехай за цього припущення $R \in (0,1)$ єдиний розв'язок (9). Тоді константа нижньої оцінки $B_L = 1 - R$ в (10) така сама, як і в Теоремі 2.1 [Lin 1996]. Теорема 2 в [Willmot and Lin 1997] містить певне посилення цієї оцінки, але в даному разі відповідний вираз асимптотично еквівалентний B_L. Посилена верхня оцінка в Теоремі 1 [Willmot and Lin 1997] містить сталу $1/\widehat{g}(R) = \theta$. Прямі обчислення в (9) приводять до значення

$$\psi_R(\infty) = (1-\theta)(1-R)/(1-(\theta+R)(1-R) - \alpha R(1-\theta)).$$

Звідси верхня оцінка в (10) обчислюється як

$$B_U = \theta(1-\theta)(1-R)/(1-R+\alpha(1-\theta)(\theta+R-1)) < \theta$$

для всіх значень параметра θ. Отже, права нерівність в (10) для даного прикладу рівномірна краща, ніж відповідна нерівність в [Willmot and Lin 1997].

Приклад 3. Нехай F — функція гама-розподілу з параметрами масштабу λ та форми α. Тоді $\gamma = \lambda \min(1, 1/\alpha)$. Оцінки в (10) можна знайти чисельно з рівняння (9), яке має такий вигляд: $(1-x)^{-1/\alpha} = 1 + cx$.

Для порівняння з попередніми результатами розглянемо приклад 19 [Grandell 1991, с. 20], де $\lambda = \alpha = 1/101$, $\gamma = \lambda$ і $\theta = 1/1.1$. Значення показника Лундберга наведено в [Grandell 1991]: $R = 0.0017450$.

З даних таблиці 1, що містить такі дані:

u — моменти часу, для яких обчислювалась апроксимація,
$\psi(u)$ — істинне значення ймовірності розорення, яке взяте з [Grandell 1991],
ε_L — відносна похибка в процентах для лівої частини в (10), помноженої на $\exp(Ru)$,
ε_U — відносна похибка в процентах для правої частини в (10), помноженої на $\exp(Ru)$,
ε_{LR} — відносна похибка в процентах для лівої частини в (10),
ε_{UR} — відносна похибка в процентах для правої частини в (10),

ρ	R	$\psi_R(\infty)$	B_L	B_U	ΔL	ΔU	α	TL	TU
5	0.0020	.90155	.8633	.9633	3.3	8.0	.1460	5.0	–2.3
10	0.0036	.82860	.7539	.9184	2.8	18.5	.1350	5.3	3.5
15	0.0049	.76057	.6651	.8757	1.8	29.5	.1295	5.5	7.0
20	0.0059	.70128	.5967	.8419	2.5	37.5	.1265	5.7	9.0
25	0.0067	.64938	.5421	.8121	3.4	44.7	.1248	5.8	10.4
30	0.0074	.60409	.4942	.7808	3.3	52.9	.1238	5.9	11.7
100	0.0117	.29521	.2208	.5104	3.2	124.	.1277	5.7	18.5

Таблиця 2

ε_D — відносна похибка в процентах для точкових оцінок дифузійної апроксимації,

ε_{DV} — відносна похибка в процентах для точкових оцінок апроксимації De Vylder [Grandell 1991],

можемо зробити висновок, що точкова оцінка DV принаймні при невеликих u виглядає краще. Але треба зауважити, що двостороння оцінка (10) набагато надійніша, оскільки одночасно дає значення максимальної відносної похибки. Найбільше значення похибки в даному прикладі становить $2.2 + 2.4 = 4.6$ процента.

Приклад 4. Дані даного прикладу взяті з прикладу 20 роботи [Grandell 1991, c. 21], що пов'язаний зі страхуванням пожарів в Швеції в неіндустріальному секторі.

Нехай

$$\begin{aligned} 1 - F(t) &= g(t) \\ &= 0.0039793 * \exp(-0,014631t) + 0.1078392 * \exp(-0.190206t) \\ &\quad + 0.8881815 * \exp(-5.514588t). \end{aligned}$$

Середнє значення відповідної страхової виплати дорівнює 1. Критичне значення показника γ в даному прикладі дорівнює показнику найменшої еспоненти в суміші $\gamma = 0.014631$. В таблиці 2 використовуються такі змінні

ρ — середня інтенсивність страхових внесків в процентах, $\rho = 100*(1/\theta - 1)$,

R — показник Лундберга (9),

$\psi_R(\infty)$ — граничне значення нормованої ймовірності розорення $\psi(t)\exp(Rt)$ з (12),

B_L, B_U — нижня та верхня границі з (11),

$\Delta L, \Delta U$ — відносні похибки нижньої та верхньої оцінок B_L, B_U для граничного значення $\psi_R(\infty)$,

α — розв'язок нерівності (14) для $\varepsilon = 0.5$,

TL, TU — значення моментів часу з зауваження 5, починаючи з яких оцінки теореми 3 стають ефективними, окремо для нижньої та верхньої оцінки

В даному випадку нижня границя виглядає більш ефективною. Ефективні моменти з зауваження 5 за порядком співвідносяться з натуральним часом 1/0.1902 в даному прикладі.

5. Доведення

Для довільної інтегровної на $[0,\infty)$ функції $h(t)$ позначимо

$$\begin{gathered} I(h) = \int_0^\infty h(t)\,dt, \qquad \overline{h}(t) = \int_t^\infty h(s)\,ds \\ h_R(t) = \exp(Rt)h(t), \qquad \overline{h_R}(t) = \overline{(h_R)}(t) = \int_t^\infty \exp(Rs)h(s)\,ds. \end{gathered} \tag{18}$$

Надалі будемо використовувати також позначення

$$e_\alpha(t) = \alpha\exp(-\alpha t), \qquad E_\alpha(t) = \exp(-\alpha t)$$

Лема 1 [Карташов 1978, 1979]. *Нехай $f \geq 0$ та $I(f) \leq 1$, а функція $x(t)$ є локально обмеженим вимірним розв'язком рівняння відновлення*

$$x = y + x * f$$

(а) *Якщо $y(t) \leq C - C * f(t) = C * (1 - I(f) + \overline{f}(t))$ для всіх $t \geq 0$, то $x(t) \leq C$ для всіх $t \geq 0$.*

(б) *Якщо $I(f) < 1$, то $\sup x(t) \leq \sup y(t)/(1 - I(f))$.*

Лема 2 [Карташов 1978, 1979]. *Щільність g належить класу $M(\gamma)$ тоді і тільки тоді, коли існує невід'ємна функція δ така, що*

$$g = \delta + e_\gamma - e_\gamma * \delta$$

В цьому випадку $\overline{g} = G = E_\gamma - E_\gamma * \delta$, причому функція $G_\gamma(t) = \exp(\gamma t)G(t)$ не зростає, $\widehat{g}(\gamma) \leq 1$, і $\widehat{g}(\alpha) < \infty$ для всіх $\alpha < \gamma$. Крім того,

$$\alpha\widehat{\delta}(\alpha) = \gamma - (\gamma - \alpha)\widehat{g}(\alpha).$$

5.1. Доведення Теореми 1.

З леми 2 та означення (7) виводимо, що $\widehat{g}(u)$ є скінченною, неперервною, нормованою ($\widehat{g}(0) = 1$) та монотонно неспадною функцією від $u \in [0,\gamma)$. Тому з другої умови Теореми випливає існування єдиного розв'язка $R \in [0,\gamma)$ рівняння (9).

Помножимо рівняння (7) на експоненційну функцію $\exp(Rt)$. Використавши мультиплікатівність експоненти $\exp(Rt) = \exp(R(t-s))\exp(Rs)$, отримаємо рівняння

$$\psi_R = \theta G_R + \theta\psi_R * g_R. \tag{19}$$

Тут та надалі будемо вживати позначення (18). З рівняння (9) випливає, що функція $\theta g_R(t) = \theta\exp(Rt)g(t)$ є ймовірнісною щільністю, так як вона невід'ємна та нормована. Застосувавши до рівняння відновлення (19) вузлову теорему відновлення [Feller 1966], обчислимо

$$\begin{aligned} \psi_R(\infty) &= \lim_{t\to\infty}\psi_R(t) = \theta I(G_R)/\theta\int_0^\infty t\exp(Rt)g(t)\,dt \\ &= \theta I(G_R)/\theta\widehat{g}'(R) = \theta(\widehat{g}(R) - 1)/R\theta\widehat{g}'(R) \\ &= (1-\theta)/R\theta\widehat{g}'(R) \leq 1. \end{aligned} \tag{20}$$

Звідси випливає (12). Остання нерівність є наслідком елементарної оцінки $\exp(Rt) - 1 \leq Rt\exp(Rt)$, звідки інтегруванням виводиться $\widehat{g}(R) - 1 \leq R\widehat{g}'(R)$.

Обчислимо згортку рівняння (19) з постійною функцією $h(t) = \gamma - R$ та додамо результат до (19). Використавши рівняння (9) у вигляді $\theta I(g_R) = 1$, прийдемо до тотожності

$$\psi_R = \theta G_R + \theta(\gamma - R) * G_R + \theta\psi_R * \sigma, \tag{21}$$

де функція $\sigma(t)$ дорівнює

$$\begin{aligned}\sigma &= g_R + (\gamma - R) * g_R - (\gamma - R)/\theta \\ &= g_R + (\gamma - R)I(g_R) - (\gamma - R)\overline{g_R} - (\gamma - R)/\theta \\ &= g_R - (\gamma - R)\overline{g_R} = \delta_R + \gamma E_{\gamma - R} - \gamma E_{\gamma - R} * \delta_R \\ &\quad - (\gamma - R)(\overline{\delta_R} + \gamma(E_{\gamma-R} - E_{\gamma-R} * \delta_R + \overline{\delta_R}))/(\gamma - R) \\ &= \delta_R + R\overline{\overline{\delta_R}}.\end{aligned} \tag{22}$$

Тут використані зображення леми 2 для щільності g та позначення (18). З (22) випливає, зокрема, що функція σ невід'ємна.

Підрахуємо також вільний член в рівнянні (21)

$$\begin{aligned}\theta G_R + \theta(\gamma - R) * G_R &= \theta G_R + \theta(\gamma - R)(1 - I(\delta_R))/(\gamma - R) - \theta(\gamma - R)\overline{G_R} \\ &= \theta(1 - I(\delta_R)) + \theta(E_{\gamma-R} - E_{\gamma-R} * \delta_R) \\ &\quad - \theta(\gamma - R)(E_{\gamma-R} - E_{\gamma-R} * \delta_R - \overline{\delta_R})/(\gamma - R) \\ &= \theta(1 - I(\delta_R)) + \theta\overline{\delta_R}.\end{aligned} \tag{23}$$

З рівнянь (21)–(23) робимо висновок, що нормована функція розорення ψ_R є розв'язком такого невласного рівняння відновлення

$$\psi_R = \theta(1 - I(\delta_R)) + \theta\overline{\delta_R} + \theta\psi_R * \sigma \tag{24}$$

З (22), (9) та леми 2 випливає також, що

$$\theta I(\sigma) = \theta I(g_R - (\gamma - R)\overline{g_R}) < \theta I(g_R) = 1. \tag{25}$$

Тому за лемою 1(б)

$$\psi_R(\infty) = \theta(1 - I(\delta_R))/(1 - \theta I(\sigma)). \tag{26}$$

З (9) та леми 2 обчислимо

$$\begin{aligned}1 &= \theta\widehat{g}(R) = \theta I(g_R) = \theta I(\delta_R + \gamma E_{\gamma-R} - \gamma E_{\gamma-R} * \delta_R) \\ &= \theta(I(\delta_R) + \gamma/(\gamma - R) - I(\delta_R) * \gamma/(\gamma - R)) = \theta(\gamma - RI(\delta_R))/(\gamma - R).\end{aligned}$$

Звідси

$$\theta I(\delta_R) = (\gamma\theta - (\gamma - R))/R = 1 - (1 - \theta)\gamma/R = \beta \in (0, \theta). \tag{27}$$

Останнє включення випливає з $R < \gamma$.

З (26) можна також підрахувати загальну "масу" ядра $\theta\sigma$

$$\theta I(\sigma) = 1 - \theta(1 - I(\delta_R))/\psi_R(\infty) = 1 - (\theta - \beta)/\psi_R(\infty). \tag{28}$$

Отже, з (22) випливає тотожність

$$\theta RI(\overline{\delta_R}) = \theta I(\sigma) - \theta I(\delta_R) = 1 - \beta - (\theta - \beta)/\psi_R(\infty). \tag{29}$$

Позначимо $\widetilde{\psi}(t) = \psi_R(t) - \psi_R(\infty)$ та підставимо $\psi_R(t) = \widetilde{\psi}(t) + \psi_R(\infty)$ в рівняння (24). Отримуємо рівняння відновлення

$$\widetilde{\psi} = h + \theta\widetilde{\psi} * \sigma, \tag{30}$$

де згідно з (22) та (27)

$$\begin{aligned}h &= \theta(1 - I(\delta_R) + \overline{\delta_R}) - \psi_R(\infty)(1 - \theta 1 * \sigma) \\ &= \theta(1 - I(\delta_R)) + \theta\overline{\delta_R} - \psi_R(\infty)(1 - \theta I(\delta_R) - \theta RI(\overline{\delta_R})) \\ &\quad - \psi_R(\infty)(\theta\overline{\delta_R} + \theta R\overline{\overline{\delta_R}}) \\ &= (1 - \psi_R(\infty))\theta\overline{\delta_R} - \psi_R(\infty)\theta R\overline{\overline{\delta_R}}.\end{aligned} \tag{31}$$

Застосуємо Лему 1(а) до рівняння відновлення (30). Згідно з цією лемою, нерівність $\widetilde{\psi} \le C$ для всіх $t \ge 0$ та деякої сталої $C > 0$ випливатиме з оцінки $h \le C(1 - \theta 1 * \sigma)$.

Використавши представлення (31) для h, тотожність (22) та очевидну ріність $1*\sigma = I(\sigma) - \overline{\sigma}$, перетворимо шукану оцінку для h до форми

$$(1 - \psi_R(\infty))\theta\overline{\delta_R} - \psi_R(\infty)\theta R\overline{\overline{\delta_R}} \leq \mathrm{C}(1 - \theta I(\sigma) + \theta\overline{\delta_R} + \theta R\overline{\overline{\delta_R}}).$$

Остання нерівність є очевидним наслідком оцінки

$$(1 - \psi_R(\infty))\theta\overline{\delta_R} \leq \mathrm{C}(1 - \theta I(\sigma) + \theta\overline{\delta_R}). \tag{32}$$

Обидві частини (32) містять константи, а також монотонну функцію $\overline{\delta_R}$. Тому достатньо перевірити справедливість (32) тільки у двох точках: при $t = 0$ та при $t \to \infty$ (з монотонності тоді випливатиме справедливість (32) при всіх $t \geq 0$). Оскільки $\overline{\delta_R} \to 0$ при $t \to \infty$, стала $C > 0$ і $\theta I(\sigma) < 1$ згідно з (25), то (32) виконується при $t \to \infty$. Отже, для справедливості нерівності $\widetilde{\psi} \leq C$ достатньо обрати $C > 0$ так, щоб (32) виконувалась при $t = 0$, тобто

$$\begin{aligned} C &\geq (1 - \psi_R(\infty))\theta\overline{\delta_R}(0)/(1 - \theta I(\sigma) + \theta\overline{\delta_R}(0)) = (1 - \psi_R(\infty))\theta I(\delta_R)/(1 - \theta RI(\overline{\delta_R})) \\ &= (1 - \psi_R(\infty))\beta/(\beta + (\theta - \beta)/\psi_R(\infty)) = B_U - \psi_R(\infty). \end{aligned}$$

Тому $\psi_R(t) = \widetilde{\psi}(t) + \psi_R(\infty) \leq \mathrm{C} + \psi_R(\infty) = B_U$ при виборі найменшої C. Права нерівність в (10) доведена.

Змінюючи в лемі 1(а) знак на протилежний, переконуємось, що нерівність $\widetilde{\psi} \geq -C$ для всіх $t \geq 0$ та деякої сталої $C > 0$ випливає з оцінки $-h \leq C(1 - \theta 1 * \sigma)$. Як і при виводі (32), відкидаючи невід'ємні доданки з функцією $\overline{\delta_R}$, переконуємось, що остання оцінка є наслідком нерівності

$$\psi_R(\infty)\theta R\overline{\overline{\delta_R}} \leq \mathrm{C}(1 - \theta I(\sigma) + \theta R\overline{\overline{\delta_R}}). \tag{33}$$

Оскільки $C > 0$ та $\overline{\overline{\delta_R}} \downarrow 0$ при $t \to \infty$, для справедливості (33) достатньо обрати

$$\begin{aligned} C &\geq \psi_R(\infty)\theta R\overline{\overline{\delta_R}}(0)/(1 - \theta I(\sigma) + \theta R\overline{\overline{\delta_R}}(0)) \\ &= \psi_R(\infty)\theta RI(\overline{\delta_R})/(1 - \theta I(\delta_R)) \\ &= \psi_R(\infty)(1 - \beta - (\theta - \beta)/\psi_R(\infty))/(1 - \beta) = -B_L + \psi_R(\infty). \end{aligned}$$

Тому $\psi_R(t) = \widetilde{\psi}(t) + \psi_R(\infty) \geq -\mathrm{C} + \psi_R(\infty) = B_L$ при виборі найменшого C. Теорема 1 доведена. □

5.2. Доведення Теореми 2.

Запишемо рівняння (19) при значенні $R = \gamma$:

$$\psi_\gamma = \theta G_\gamma + \theta\psi_\gamma * g_\gamma.$$

Тут $\theta I(g_\gamma) = \theta\widehat{g}(\gamma) \leq 1$ за умовою. Тому для доведення нерівності $\psi_\gamma \leq \mathrm{C}$ за лемою 1(а) достатньо довести оцінку

$$\theta G_\gamma \leq C(1 - \theta 1 * g_\gamma) = C - C\theta I(g_\gamma) + C\theta\overline{g_\gamma}.$$

Ця оцінка виконується при вказанному в формулюванні теореми значенні

$$C = \theta/(\theta + 1 - \theta\widehat{g}(\gamma))$$

оскільки за означенням функціїї $G = \overline{g}$ та з монотонності експоненти

$$G_\gamma(t) = \exp(\gamma t)G(t) \leq \int_t^\infty \exp(\gamma s)g(s)\,ds = \overline{g_\gamma}(t).$$

Теорема 2 доведена. □

5.3. Доведення Теореми 3.

Помноживши (30) на експоненційну функцію $\exp(\alpha t)$, як і при виводі (19), отримаємо рівняння відновлення

$$\widetilde{\psi}_\alpha = h_\alpha + \theta\widetilde{\psi}_\alpha * \sigma_\alpha. \tag{34}$$

Обчислимо повну масу ядра відновлення в (34), використавши (22) та лему 2

$$\begin{aligned}\theta I(\sigma_\alpha) &= \theta I\left(\delta_{R+\alpha} + R(\overline{\delta_R})_\alpha\right)\\ &= \theta I(\delta_{R+\alpha}) + \theta R\int_0^\infty \exp(\alpha t)\int_t^\infty \exp(Rs)\delta(s)\,ds\,dt\\ &= \theta\widehat{\delta}(R+\alpha) + \theta R\left(\widehat{\delta}(R+\alpha)-\widehat{\delta}(R)\right)/\alpha\\ &= \theta\left((R+\alpha)\widehat{\delta}(R+\alpha) - R\widehat{\delta}(R)\right)/\alpha.\end{aligned} \tag{35}$$

Спрямувавши $\alpha\to 0$, з (35) отримуємо

$$\theta\left(\widehat{\delta}(R) + R\widehat{\delta}'(R)\right) = \theta I(\sigma_0) = 1-(\theta-\beta)/\psi_R(\infty),$$

де остання рівність випливає з (28).

Використовуючи елементарну нерівність $\exp(u)-1-u\le u(\exp(u)-1)$, з (35) та останньої тотожності виводимо нерівність

$$\begin{aligned}&\theta I(\sigma_\alpha) - 1 + (\theta-\beta)/\psi_R(\infty)\\ &\quad= \theta\left(\widehat{\delta}(R+\alpha)-\widehat{\delta}(R) + R\left(\widehat{\delta}(R+\alpha)-\widehat{\delta}(R)-\alpha\widehat{\delta}'(R)\right)/\alpha\right)\\ &\quad\le \theta\Big(\widehat{\delta}(R+\alpha)-\widehat{\delta}(R)+R\left(\widehat{\delta}'(R+\alpha)-\widehat{\delta}'(R)\right)\Big).\end{aligned} \tag{36}$$

Зауважимо, що за означенням (13)

$$\widehat{\delta}(u) + u\widehat{\delta}'(u) = \int_0^\infty \exp(ut)(1+ut)\delta(t)\,dt = \widehat{r}(u).$$

Підставимо цю тотожність в (36) та порівняємо (36) з (14). Очевидно, що для вибраних згідно (14) сталих α з (36) випливає оцінка

$$\begin{aligned}\theta I(\sigma_\alpha) &\le 1-(\theta-\beta)/\psi_R(\infty) + \theta(\widehat{r}(R+\alpha)-\widehat{r}(R))\\ &\le 1-\varepsilon(\theta-\beta)/\psi_R(\infty) < 1.\end{aligned} \tag{37}$$

Доданок h_α в невласному рівнянні відновлення (34) згідно з (31) та означенням (18) задовольняє нерівності

$$-\psi_R(\infty)\theta R(\overline{\overline{\delta_R}})_\alpha \le h_\alpha \le (1-\psi_R(\infty))\theta(\overline{\delta_R})_\alpha. \tag{38}$$

Оскільки за лемою 1(б)

$$\inf h_\alpha/(1-\theta I(\sigma_\alpha)) \le \widetilde{\psi}_\alpha \le \sup h_\alpha/(1-\theta I(\sigma_\alpha)), \tag{39}$$

то для доведення (15) достатньо оцінити праву та ліву частини (38).

Спочатку розглянемо верхню оцінку:

$$\begin{aligned}\sup\theta(\overline{\delta_R})_\alpha &= \theta\sup_{t\ge 0}\exp(\alpha t)\int_t^\infty \exp(Rs)\delta(s)\,ds \le \theta I(\delta_{R+\alpha})\\ &= \theta\widehat{\delta}(R+\alpha) = \theta I(\delta_R) + \theta(I(\delta_{R+\alpha}) - I(\delta_R))\\ &\le \beta + \theta(\widehat{r}(R+\alpha)-\widehat{r}(R)) \le \beta + (1-\varepsilon)(\theta-\beta)/\psi_R(\infty),\end{aligned} \tag{40}$$

де використані тотожність (27), нерівність $\delta(t)\le r(t)$ та умова (14) теореми. Підставляючи (40) в (38), потім (38) в (39) та використовуючи (37), остаточно отримуємо

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}_\alpha &\le (1-\psi_R(\infty))(\beta+(1-\varepsilon)(\theta-\beta)/\psi_R(\infty))/(1-\theta I(\sigma_\alpha))\\ &\le (1-\psi_R(\infty))(\beta+(1-\varepsilon)(\theta-\beta)/\psi_R(\infty))/(\varepsilon(\theta-\beta)/\psi_R(\infty))\\ &\le A_U.\end{aligned}$$

Отже, верхня оцінка в (15) доведена.

Нижня доводиться аналогічно:

$$\begin{aligned}
\sup \theta R(\overline{\overline{\delta_R}})_\alpha &= \theta R \sup_{t\geq 0} \exp(\alpha t) \int_t^\infty \int_s^\infty \exp(Ru)\delta(u)\,du\,ds \\
&\leq \theta R \int_0^\infty \exp(\alpha s) \int_s^\infty \exp(Ru)\delta(u)\,du\,ds \\
&= \theta R(\widehat{\delta}(R+\alpha) - \widehat{\delta}(R))/\alpha) \qquad (41)\\
&\leq \theta R \widehat{\delta}'(R+\alpha) = \theta R I(\overline{\delta_R}) + \theta R \left(\widehat{\delta}'(R+\alpha) - \widehat{\delta}'(R)\right) \\
&\leq 1-\beta-(\theta-\beta)/\psi_R(\infty) + \theta\,(\widehat{r}(R+\alpha) - \widehat{r}(R)) \\
&\leq 1-\beta-(\theta-\beta)/\psi_R(\infty) + (1-\varepsilon)(\theta-\beta)/\psi_R(\infty) \leq 1-\beta.
\end{aligned}$$

Підставляючи (41) в (38), а тоді (38) в (39), та використовуючи (37), остаточно отримаємо

$$\widetilde{\psi}_\alpha \geq -\psi_R(\infty)(1-\beta)/(\varepsilon(\theta-\beta)/\psi_R(\infty)) = -A_L$$

Теорема 3 доведена. □

Література

1. S. Asmussen and T. Rolski, *Computational methods in risk theory: A matrix-algorithmic approach*, Insurance: Mathematics and Economics **10** (1991), 259–274.
2. Р. Барлоу, Ф. Прошан, *Математическая теория надежности*, "Советское радио", Москва, 1969.
3. P. Boogaert and V. Crijns, *Upper bounds on ruin probabilities in case of negative loadings and positive interest rate*, Insurance: Mathematics and Economics **6** (1987), 221–232.
4. Cun Cai Wu Yanhong, *Some improvements on the Lundberg bound for the ruin problem*, Insurance: Mathematics and Economics **33** (1997), 395–403.
5. J. Grandell, *Aspects of risk theory*, Springer, New York, 1991.
6. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Application*, т. II, John Wiley & Sons, New York, 1966.
7. V. V. Kalashnikov, *Two-sided bounds of ruin probability*, Scand. Actuarial J. **1** (1996), 1–18.
8. Н. В. Карташов, *О явных оценках скорости сходимости в теореме восстановления*, Теория вероятностей и математическая статистика **18** (1978), 74–79.
9. ______, *Степенные оценки скорости сходимости в теореме восстановления*, Теория вероятностей и ее применения **24** (1979), № 3, 600–607.
10. ______, *Одно обобщение представления Стоуна и необходимые условия равномерной сходимости в теореме восстановления*, Теория вероятностей и математическая статистика **26** (1982), 49–62.
11. N. V. Kartashov, *Strong Stable Markov Chains*, VSP/TBiMC, Utrecht, 1996.
12. X. Lin, *Tail of compound distributions and excess time*, J. Appl. Probab. **33** (1996), 184–195.
13. H. Schmidli, *An extension of the renewal theorem and an approximation to risk problem*, Ann. Appl. Probab. **7** (1997), № 1, 121–133.
14. J. L. Teugels, *Estimation of ruin probability*, Insurance: Mathematics and Economics **1** (1982), 169–175.
15. F. de Vylder and E. Mrcean, *Explicit analytic ruin probabilities for bounded claims*, Insurance: Mathematics and Economics **16** (1995), 79–105.
16. F. de Vylder, M. Goovaerts, and E. Mrcean, *The bi-atomic minimal solution of Schmitter's problem*, Insurance: Mathematics and Economics **20** (1997), 59–78.
17. G. E. Willmot, *Refinements and distributional generalizations of Lundberg's inequality*, Insurance: Mathematics and Economics **15** (1994), 49–63.
18. G. E. Willmot and X. Lin, *Simplified bounds on the tails of compound distributions*, J. Appl. Probab. **34** (1997), 127–133.

252127 Київ проспект Академіка Глушкова 6, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей і математичної статистики,

Надійшла 12/06/2000