Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 63, 2000, стор. 90–99

Teor. Ímovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 63, 2000, pp. 90–99

ОБМЕЖЕНІСТЬ КРАТНИХ РЯДІВ

УДК 519.21

О. І. КЛЕСОВ

Резюме. Розглядається проблема обмеженості за ймовірністю та майже напевно кратних рядів незалежних випадкових величин. Знайдено необхідні та достатні умови обмеженості майже напевно. Доведено, що обмеженість майже напевно еквівалентна обмеженості за ймовірністю.

1. Вступ

Нехай $\mathbf{N}^d$ — це простір векторів, які мають d натуральних координат. У випадку $d = 1$ обмеженість послідовності часткових сум дійсних чисел є тривіальним наслідком збіжності нескінченого ряду. У випадку ж $d \geq 2$ це не так (див. приклад нижче). Мета цієї роботи знайти необхідні та достатні умови обмеженості кратних сум, а також зв'язок між збіжністю та обмеженістю.

Перший результат про обмеженість рядів незалежних випадкових величин отримав Дуб [1]. Більш детально обмеженість рядів незалежних доданків досліджена для $d = 1$ в книзі Скорохода [2]. Головним результатом про обмеженість рядів для $d = 1$ є такий: якщо ряд незалежних випадкових величин $\sum X_k$ є обмеженим майже напевно, то існує невипадкова послідовність $\{a_k, k \geq 1\}$, для якої ряд $\sum[X_k - a_k]$ збігається майже напевно, а суми $\sum a_k$ є обмеженими. Аналогічний розклад справджується й для кратних рядів (див. теорему нижче). У випадку $d > 1$ цей результат можна доповнити таким: якщо кратний ряд збігається майже напевно, то існують невипадкові константи, для яких часткові суми ряду, центровані цими константами, стають обмеженими. Для $d = 1$ цей результат є тривіальним, але при $d > 1$ потрбує доведення (див. теорему нижче). Зауважимо, що зазначені константи можуть бути й необмеженими при $d > 1$ (на відміну від випадку $d = 1$).

Збіжність рядів незалежних доданків для $d = 1$ випливає з теореми Колмогорова про три ряди (див., наприклад, [2]). Збіжність кратних рядів вивчалась у роботах [3], [4], [7]. Збіжність кратних рядів для $d > 1$ також має відмінності від випадку $d = 1$. Наприклад, кратний ряд незалежних випадкових величин може збігатися, але три числові ряди з теореми Колмогорова — розбігатися. Приклад демонструє також і цю особливість.

Перерахуємо основні результати роботи. В розділі наведені необхідні означення та допоміжні результати. В розділі ми розглядаємо зв'язок між обмеженістю за ймовірністю та збіжністю за ймовірністю кратних рядів незалежних випадкових величин. Ми доводимо також, що для симетричних доданків ці два поняття співпадають.

В розділі ми встановлюємо, що обмеженість майже напевно еквівалентна обмеженості за ймовірністю й отримуємо необхідні та достатні умови обмеженості майже напевно. В розділі ми знаходимо необхідні та достатні умови обмеженої збіжності кратних рядів.

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60F99.

2. Означення та допоміжні твердження

Введемо у просторі $\mathbf{N}^d$ покоординатну впорядкованість. Ми розглядаємо поле $\{X(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ незалежних випадкових величин та поле їхніх сум $\{S(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$: $S(\overline{n}) = \sum_{\overline{k} \leq \overline{n}} X(\overline{k})$. Покладемо $X^\varepsilon(\overline{n}) = X(\overline{n}) I(|X(\overline{n})| < \varepsilon)$ для $\varepsilon > 0$, де $I(A)$ — індикатор події A.

Симетризацією поля $\{X(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ називається поле випадкових величин $\{\widetilde{X}(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$, для якого $\widetilde{X}(\overline{n}) = X(\overline{n}) - X'(\overline{n})$, де випадкові величини $\{X'(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ незалежні між собою, не залежать від $\{X(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ та мають той же розподіл, що й $\{X(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$.

Означення 1. Поле випадкових величин $\{S(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ називається *обмеженим за ймовірністю*, якщо

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{\overline{n} \in \mathbf{N}^d} \mathsf{P}(|S(\overline{n})| \geq t) = 0.$$

Означення 2. Поле випадкових величин $\{S(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ називається *обмеженим майже напевно*, якщо

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{P}\left(\sup_{\overline{n} \in \mathbf{N}^d} |S(\overline{n})| \geq t \right) = 0.$$

Зрозуміло, що з обмеженості майже напевно випливає обмеженість за ймовірністю.

Зауважимо також, що поле $\{S(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ залишиться обмеженим майже напевно після заміни скінченої кількості доданків.

Означення 3. Поле $\{S(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ називається збіжним майже напевно, якщо існує випадкова величина S, для якої

$$\lim_{\substack{n_1 \to \infty \\ \cdots \\ n_d \to \infty}} S(\overline{n}) = S$$

майже напевно, де $\overline{n} = (n_1, \ldots, n_d)$. Якщо поле $\{S(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ є збіжним майже напевно, то ми кажемо, що ряд $\sum_{\overline{n} \in \mathbf{N}^d} X(\overline{n})$ є збіжним майже напевно.

Як вже зазначалось, при $d \geq 2$, на відміну від випадку $d = 1$, зі збіжності не випливає обмеженість. В наступному прикладі розглядається випадок збіжного й необмеженого поля. Зазначимо, що це поле є невипадковим.

Приклад 1. Нехай $d = 2$ й

$$X(m, n) = \begin{cases} (-1)^{n-1} m, & \text{при } n \leq 2, \\ 0, & \text{при } n > 2. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $S(m, n) = 0$ при $n \geq 2$ і всіх $m \geq 1$. Тому границя сум $S(m, n)$ дорівнює 0. З іншого боку, для будь-якого $t > 0$

$$\sup_{m, n \geq 1} \mathsf{P}(|S(m, n)| \geq t) \geq \sup_{m \geq 1} \mathsf{P}(|S(m, 1)| \geq t) = 1.$$

Тому ряд не є обмеженим (навіть за ймовірністю).

Зазначимо, що аналогічний приклад можна навести для будь-якого $d > 1$. В прикладі 1 доданки $X(m, n)$ є невипадковими. Виявляється, що для "справді випадкових" рядів зазначена аномалія не спостерігається. Більше того, будь-який збіжний ряд можна "підправити" невипадковими константами таким чином, щоб той став обмеженим.

Перед тим як переходити до загальних результатів цього параграфу, розглянемо кілька допоміжних тверджень.

Лема 1. *Нехай $c > 0$ та $t > 0$ такі константи, що*

$$\mathsf{P}(|X(\overline{n})| < c) = 1, \qquad \mathsf{P}(|S(\overline{n})| \geq t) \leq \frac{1}{8e}$$

для всіх $\overline{n} \in \mathbf{N}^d$. Тоді існує така абсолютна константа $H > 0$, що для всіх $\overline{n} \in \mathbf{N}^d$ та $m \geq 1$

$$\mathsf{E}\,|S(\overline{n})|^m \leq 2^m m!\,(t+c)^m H.$$

Лема 1 доведена Скороходом [2] для $d = 1$. Випадок $d > 1$ очевидно випливає з випадку $d = 1$.

Лема 2. *Якщо поле $\{S(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ є обмеженим за ймовірністю, то й поле $\{X(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ є обмеженим за ймовірністю.*

Доведення. Оскільки кожна випадкова величина $X(\overline{n})$ є лінійною комбінацією не більше, ніж 2^d сум $S(\overline{m})$, то

$$\sup_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}(|X(\overline{n})| \geq t) \leq 2^d \sup_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}\left(|S(\overline{n})| \geq t2^{-d}\right).$$

Спрямувавши тепер t до ∞, доведемо твердження леми 2. □

Лема 3. *Нехай для деякого $c > 0$ збігається ряд $\sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}(|X(\overline{n})| \geq c)$. Тоді ряд $\sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} [X(\overline{n}) - X^c(\overline{n})]$ збігається майже напевно.*

Доведення. З леми Бореля–Кантеллі для незалежних подій випливає, що $\mathsf{P}(X(\overline{n}) \neq X^c(\overline{n})$ н. к. р.$) = 0$ (н. к. р. — скорочення для "нескінченну кількість разів"). Тому ряд $\sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} [X(\overline{n}) - X^c(\overline{n})]$ майже напевно має лише скінченну кількість ненульових доданків, що й доводить лему 3. □

Лема 4. *Нехай для деякого $c > 0$ й всіх $\overline{n} \in \mathbf{N}^d$*

$$\mathsf{P}(|X(\overline{n})| < c) = 1.$$

Припустимо, що поле $\{S(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ є обмеженим за ймовірністю. Тоді

(i) *поле $\{\mathsf{E}\,S(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ є обмеженим;*
(ii) *ряд $\sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{E}\,[X(\overline{n}) - \mathsf{E}\,X(\overline{n})]^2$ збігається;*
(iii) *якщо майже напевно збігається ряд $\sum X(\overline{n})$, то й ряд $\sum \mathsf{E}\,X(\overline{n})$ також збігається.*

Доведення. Оскільки поле $\{S(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ є обмеженим, ми можемо знайти таке $t > 0$, для якого $\mathsf{P}(|S(\overline{n})| \geq t) \leq 1/(8e)$ для всіх $\overline{n} \in \mathbf{N}^d$. Використовуючи лему 1 при $m = 1$, отримуємо, що існує таке $q_1 > 0$, яке не залежить ні від t, ні від c, що

$$\mathsf{E}\,|S(\overline{n})| \leq q_1 \qquad \text{для всіх} \quad \overline{n} \in \mathbf{N}^d.$$

Таким чином твердження (i) доведено.

Ще раз скористаємось лемою 1 при $m = 2$ і знайдемо таке $q_2 > 0$, яке не залежит ні від t, ні від c, що

$$\mathsf{E}\,[S(\overline{n})]^2 \leq q_2 \qquad \text{для всіх} \quad \overline{n} \in \mathbf{N}^d$$

і, таким чином, $\mathsf{E}\,[S(\overline{n}) - \mathsf{E}\,S(\overline{n})]^2 \leq q_2$. Твердження (ii) доведено.

Використовуючи тепер теорему про два ряди для кратних сум [7], доводимо, що ряд $\sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} [X(\overline{n}) - \mathsf{E}\,X(\overline{n})]$ збігається майже напевно, тобто твердження (iii) також доведено. □

Леми 2–4 при $d = 1$ доведені Скороходом [2].

Лема 5. *Нехай* $\{X(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ *— поле незалежних випадкових величин. Якщо*

$$\sum_{\overline{n} \in \mathbf{N}^d} \mathsf{P}(|X(\overline{n})| \geq c) < \infty \tag{1}$$

для деякого $c = c_0 > 0$, *то*

$$\inf_{c>0} \left[\sum_{\overline{n} \in \mathbf{N}^d} \mathsf{P}(|X(\overline{n})| \geq c) \right] = 0.$$

Доведення випливає з рівномірної збіжності ряду (1) при $c \geq c_0$. □

Лема 6. *Нехай* $c > 0$ *та* $t > 0$. *Якщо випадкові величини* $\{X(\overline{k}), \overline{k} \leq \overline{n}\}$ *незалежні та симетричні, то*

$$\mathsf{P}(|S(\overline{n}) - S'(\overline{n})| \geq t) \leq 2\mathsf{P}(|S(\overline{n})| \geq t),$$

де $S'(\overline{n}) = \sum_{\overline{k} \leq \overline{n}} X^c(\overline{k})$.

Доведення. Зрозуміло, що

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(S(\overline{n}) - S'(\overline{n}) \geq t) \leq \mathsf{P}(S(\overline{n}) - S'(\overline{n}) \geq t, S'(\overline{n}) \geq 0) \\ + \mathsf{P}(S(\overline{n}) - S'(\overline{n}) \geq t, S'(\overline{n}) \leq 0).\end{aligned}$$

Доведемо, що обидва доданки в правій частині рівні. Для цього ми представляємо $\mathsf{P}(S(\overline{n}) - S'(\overline{n}) \geq t, S'(\overline{n}) \leq 0)$ сумою ймовірностей вигляду

$$\mathsf{P}\big(\{S(\overline{n}) - S'(\overline{n}) \geq t\} \cap \{S'(\overline{n}) \leq 0\} \cap A \cap B\big),$$

де $A = \{\omega : |X(\overline{k})| \geq c \text{ для } \overline{k} \in \mathcal{J}\}$, $B = \{\omega : |X(\overline{k})| < c \text{ для } \overline{k} \notin \mathcal{J}\}$, а підсумовування ведеться за всьома можливими підмножинами $\mathcal{J} \subseteq \{\overline{k} : \overline{k} \leq \overline{n}\}$. Оскільки для $\omega \in A \cap B$

$$S(\overline{n}) - S'(\overline{n}) = \sum_{\overline{k} \in \mathcal{J}} X(\overline{k}), \qquad S'(\overline{n}) = \sum_{\overline{k} \notin \mathcal{J}} X(\overline{k}),$$

ми маємо

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\big(\{S(\overline{n}) - S'(\overline{n}) \geq t\} \cap \{S'(\overline{n}) \leq 0\} \cap A \cap B\big) \\ &\quad = \mathsf{P}\big(\{S(\overline{n}) - S'(\overline{n}) \geq t\} \cap A\big)\mathsf{P}\big(\{S'(\overline{n}) \leq 0\} \cap B\big) \\ &\quad = \mathsf{P}\big(\{S(\overline{n}) - S'(\overline{n}) \geq t\} \cap A\big)\mathsf{P}\big(\{S'(\overline{n}) \geq 0\} \cap B\big) \\ &\quad = \mathsf{P}\big(\{S(\overline{n}) - S'(\overline{n}) \geq t\} \cap \{S'(\overline{n}) \geq 0\} \cap A \cap B\big).\end{aligned}$$

Оскільки ця властивість виконується для всіх $\mathcal{J}$, то

$$\mathsf{P}(S(\overline{n}) - S'(\overline{n}) \geq t) \leq 2\mathsf{P}(S(\overline{n}) \geq t).$$

Щоб завершити доведення, досить згадати про симетричність випадкових величин. □

Лема 7. *Нехай* $\{X(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ *— поле незалежних випадкових величин. Припустимо, що для будь-якого* $\varepsilon > 0$

(i) *ряди* $\sum \mathsf{P}(|X(\overline{n})| \geq \varepsilon)$ *та* $\sum \mathbf{D}\, X^\varepsilon(\overline{n})$ *збігаються,*
(ii) *ряд* $\sum \mathsf{E}\, X^\varepsilon(\overline{n})$ *є обмеженим.*

Тоді ряд $\sum X(\overline{n})$ є обмеженим за ймовірністю.

Доведення. Покладемо $E_0 = \sup_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d}\left|\sum_{\overline{k}\le\overline{n}} \mathsf{E}\, X^c(\overline{k})\right|$. На підставі нерівності Чебишева маємо для будь-яких $t > E_0$ та $\overline{n}\in\mathbf{N}^d$

$$\mathsf{P}(|S(\overline{n})|\ge t) \le \sum_{\overline{m}\le\overline{n}} \mathsf{P}(|X(\overline{m})|\ge\varepsilon) + \mathsf{P}\left\{\left|\sum_{\overline{m}\le\overline{n}} X^{\varepsilon}(\overline{m})\right|\ge t\right\}$$
$$\le \sum_{\overline{m}\le\overline{n}} \mathsf{P}(|X(\overline{m})|\ge\varepsilon) + \frac{1}{(t-E_0)^2}\sum_{\overline{m}\le\overline{n}} \mathbf{D}\left[X^{\varepsilon}(\overline{m})\right].$$

Взявши sup за $\overline{n}\in\mathbf{N}^d$ та перейшовши до границі при $t\to\infty$, отримуємо

$$\limsup_{t\to\infty}\sup_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}(|S(\overline{n})|\ge t) \le \sum_{\overline{m}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}(|X(\overline{m})|\ge\varepsilon).$$

Взявши тепер inf за $\varepsilon > 0$, виводимо лему 7 з леми 5. □

Лема 8. *Нехай поле $\{S(\overline{n}), \overline{n}\in\mathbf{N}^d\}$ є обмеженим за ймовірністю й*

$$\sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}\left(|\widetilde{X}(\overline{n})|\ge c\right) < \infty$$

для будь-якого $c > 0$. Тоді для досить великих $c > 0$

(i) *ряди $\sum \mathsf{P}(|X(\overline{n})|\ge c)$ та $\sum \mathbf{D}\left[X^c(\overline{n})\right]$ збігаються,*
(ii) *ряд $\sum \mathsf{E}\, X^c(\overline{n})$ є обмеженим.*

Доведення. Для будь-якого $c > 0$

$$\infty > \sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}\left(|\widetilde{X}(\overline{n})|\ge c/2\right) \ge \sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}(|X(\overline{n})|\ge c)\mathsf{P}(|X(\overline{n})| < c/2)$$
$$\ge \left[\inf_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}(|X(\overline{n})| < c/2)\right]\sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}(|X(\overline{n})|\ge c).$$

Згідно до леми 2 поле $\{X(\overline{n}), \overline{n}\in\mathbf{N}^d\}$ є обмеженим за ймовірністю, тобто

$$\inf_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}(|X(\overline{n})| < c/2) > 0$$

для істотньо великих c. Таким чином, для істотньо великих c

$$\sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}(|X(\overline{n})|\ge c) < \infty. \tag{2}$$

Візьмемо таке c. Лема 3 тепер доводить, що ряд

$$\sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \left[X(\overline{n}) - X^c(\overline{n})\right]$$

збігається майже напевно. Покажемо, що ряд $\sum X^c(\overline{n})$ є обмеженим за ймовірністю. Дійсно, для всіх $t > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\left|\sum_{\overline{m}\le\overline{n}} X^c(\overline{m})\right|\ge t\right\} \le \sum_{\overline{m}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}(|X(\overline{m})|\ge c) + \mathsf{P}(|S(\overline{n})|\ge t)$$

й тому з обмеженості поля $\{S(\overline{n}), \overline{n}\in\mathbf{N}^d\}$ випливає

$$\limsup_{t\to\infty}\sup_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}\left\{\left|\sum_{\overline{m}\le\overline{n}} X^c(\overline{m})\right|\ge t\right\} \le \sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}(|X(\overline{n})|\ge c).$$

За лемою 5

$$\inf_{c>0} \sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}(|X(\overline{n})| \geq c) = 0,$$

тобто з останньої нерівності випливає обмеженість за ймовірністю поля

$$\left\{ \sum_{\overline{m}\leq\overline{n}} X^c(\overline{m}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d \right\}.$$

Застосувавши лему 4 до цього поля, доведемо, що

$$\text{ряд } \sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{E}\left[X^c(\overline{n}) - \mathsf{E}\, X^c(\overline{n})\right]^2 \text{ збігається,} \tag{3}$$

а поле

$$\left\{ \sum_{\overline{m}\leq\overline{n}} \mathsf{E}\, X^c(\overline{m}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d \right\} \quad \text{є обмеженим.} \qquad \square \tag{4}$$

3. Зв'язок між збіжністю та обмеженістю за ймовірністю

Теорема 1. *Нехай $\{X(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ — поле незалежних симетричних випадкових величин. Збіжність за ймовірністю поля $\{S(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ еквівалентна його обмеженості за ймовірністю.*

Доведення. Якщо ряд $\{S(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ збігається за ймовірністю, то він збігається майже напевно (див. [4]). Для *симетричних* доданків $X(\overline{n})$ це означає (див. [7]), що для будь-якого $\varepsilon > 0$ збігаються два ряди

$$\sum \mathsf{P}(|X(\overline{n})| \geq \varepsilon), \qquad \sum \mathbf{D}\left[X^\varepsilon(\overline{n})\right].$$

Зауважимо також, що $\mathsf{E}\, X^\varepsilon(\overline{n}) = 0$. Тому з леми 7 випливає, що поле $\{S(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ є обмеженим за ймовірністю.

Доведемо обернене твердження. З нерівності Леві для кратних сум (див. [4]) випливає, що для будь-яких $t > 0$

$$\mathsf{P}\left(\sup_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} |S(\overline{n})| \geq t \right) \leq 2^d \sup_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}\left(|S(\overline{n})| \geq t\right).$$

Зрозуміло, що

$$\mathsf{P}\left(\sup_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} |X(\overline{n})| \geq t2^d \right) \leq \mathsf{P}\left(\sup_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} |S(\overline{n})| \geq t \right) \leq 2^d \sup_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}\left(|S(\overline{n})| \geq t\right).$$

На підставі обмеженості поля $\{S(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ можна обрати $t = t_0$ настільки великим, щоб

$$\sup_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}\left(|S(\overline{n})| \geq t_0\right) \leq \frac{1}{2^{d+1}}.$$

Тоді для $c = t_0 2^d$

$$\mathsf{P}\left(\sup_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} |X(\overline{n})| \geq c \right) \leq \frac{1}{2}.$$

З іншого боку, $1 - x \leq \exp\{-x\}$ й тому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \leq \mathsf{P}\left(\sup_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} |X(\overline{n})| < c \right) &= \prod_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \left(1 - \mathsf{P}(|X(\overline{n})| \geq c)\right) \\ &\leq \exp\left\{ - \sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}(|X(\overline{n})| \geq c) \right\}. \end{aligned}$$

Це означає, що ряд $\sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}(|X(\overline{n})| \geq c)$ збігається.

Далі, випадкові величини $X^c(\overline{n})$ незалежні, симетричні та рівномірно обмежені. З леми 6 випливає, що

$$\mathsf{P}\big(|S(\overline{n}) - S'(\overline{n})| \geq t\big) \leq 2\mathsf{P}(|S(\overline{n})| \geq t),$$

тобто поле $S(\overline{n})-S'(\overline{n})$, а разом з ним і поле $S'(\overline{n})$ є обмеженим за ймовірністю. Тепер лема 4 забезпечує, що збігається ряд $\sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathbf{D}\,[X^c(\overline{n})]$. Нарешті, наслідок 4 в [7] гарантує, що ряд $\sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} X(\overline{n})$ збігається майже напевно, а отже й за ймовірністю. Теорема повністю доведена. □

Теорема 2. *Якщо поле $\{S(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ є обмеженим за ймовірністю, то існує таке обмежене поле невипадкових чисел $\{a(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$, що ряд $\sum[X(\overline{n}) - a(\overline{n})]$ збігається майже напевно. При цьому можна покласти $a(\overline{n}) = \mathsf{E}\, X^c(\overline{n})$ для $c > 0$.*

Теорема 3. *Якщо ряд $\sum X(\overline{n})$ збігається майже напевно, то існує таке невипадкове поле $\{b(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$, що $\{S(\overline{n}) - b(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ є обмеженим за ймовірністю. При цьому можна покласти $b(\overline{n}) = \mu(S(\overline{n}))$.*

Доведення теореми 2. Неважко бачити, що поле

$$\left\{\sum_{\overline{m}\leq\overline{n}} \widetilde{X}(\overline{m}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\right\} \tag{5}$$

є обмеженим за ймовірністю й тому воно є збіжним за ймовірністю (див. теорему 1). З теореми 1 [4] випливає, що воно є збіжним майже напевно, а з наслідку 4 [7] — що ряд $\sum \mathsf{P}(|\widetilde{X}(\overline{n})| \geq c)$ збігається для будь-якого $c > 0$. З леми 8 отримуємо $\sum \mathbf{D}[X^c(\overline{n})] < \infty$ для будь-якого $c > 0$. Тому за теоремою про два ряди (наслідок 2 в [7]) ряд $\sum [X^c(\overline{n}) - \mathsf{E}\, X^c(\overline{n})]$ збігається майже напевно й твердження теореми 2 виконується з $a(\overline{n}) = \mathsf{E}\, X^c(\overline{n})$ при $c > 0$. □

Доведення теореми 3. За умов теореми ряд $\sum \widetilde{X}(\overline{n})$ збігається майже напевно. З теореми 1 тепер випливає, що поле

$$\left\{\sum_{\overline{m}\leq\overline{n}} \widetilde{X}(\overline{m}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\right\}$$

є обмеженим за ймовірністю. Оскільки $\mathsf{P}(|X-\mu(X)| \geq t) \leq 2\mathsf{P}(|\widetilde{X}| \geq t)$ для будь-якої випадкової величини X та її симетризації $\widetilde{X}$, то отримуємо

$$\mathsf{P}\big(|S(\overline{n}) - \mu(S(\overline{n}))| \geq t\big) \leq 2\mathsf{P}\left(|\widetilde{S}(\overline{n})| \geq t\right),$$

а це й доводить теорему з $b(\overline{n}) = \mu(S(\overline{n}))$. □

4. Обмеженість майже напевно кратних рядів

Теорема 4. *Якщо $\{X(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ — незалежні випадкові величини, то обмеженість за ймовірністю поля $\{S(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ рівносильна обмеженості майже напевно.*

Теорема 5. *Для того, щоб поле $\{S(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ було обмеженим майже напевно необхідно і достатньо, щоб ряди*

$$\sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}(|X(\overline{n})| \geq c), \qquad \sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{E}\,[X^c(\overline{n})], \qquad \sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathbf{D}\,[X^c(\overline{n})]$$

були обмеженими для деякого $c > 0$.

Доведення теореми 4. Одна частина теореми очевидна: з обмеженості майже напевно дійсно випливає обмеженість за ймовірністю. Доведемо, що справедливе й обернене твердження.

В цьому випадку поле (5) також є обмеженим за ймовірністю, тому воно є збіжним за ймовірністю (див. теорему 1), тобто воно є збіжним майже напевно (теорема 2 в [4]). З наслідка 4 в [7] випливає, що ряд $\sum \mathsf{P}(|\widetilde{X}(\overline{n})| \geq c)$ збігається для будь-якого $c > 0$. Нехай

$$E_c = \sup_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \left| \sum_{\overline{m}\leq\overline{n}} \mathsf{E}\, X^c(\overline{m}) \right|.$$

На підставі леми 8 маємо $E_c < \infty$ для істотньо великих $c > 0$. При таких c та $t > E_c$ маємо

$$\mathsf{P}\left\{ \sup_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} |S(\overline{n})| \geq t \right\} \leq \sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}(|X(\overline{n})| \geq c)$$
$$+ \mathsf{P}\left\{ \sup_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \left| \sum_{\overline{m}\leq\overline{n}} [X^c(\overline{m}) - \mathsf{E}\, X^c(\overline{m})] \right| \geq t - E_c \right\}.$$

Застосовуючи до другого доданку нерівність Колмогорова для кратних рядів ([6]), отримуємо

$$\mathsf{P}\left\{ \sup_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} |S(\overline{n})| \geq t \right\} \leq \sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}(|X(\overline{n})| \geq c) + \frac{2^{d+2}}{(t-E_c)^2} \sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{E}\left[X^c(\overline{n}) - \mathsf{E}\, X^c(\overline{n})\right]^2.$$

Зауважимо, що лема 8 гарантує, що ряди в правій частині збігаються. Переходячи в цій нерівності до границі, спочатку при $t \to \infty$, а потім при $c \to \infty$, ми доводимо обмеженість майже напевно на підставі леми 5. □

Доведення теореми 5. Для $c > 0$ покладемо

$$P(\overline{n}; c) = \sum_{\overline{k}\leq\overline{n}} \mathsf{P}(|X(\overline{k})| \geq c),$$
$$E(\overline{n}; c) = \sum_{\overline{k}\leq\overline{n}} \mathsf{E}\left[X^c(\overline{k})\right], \qquad V(\overline{n}; c) = \sum_{\overline{k}\leq\overline{n}} \mathbf{D}\left[X^c(\overline{k})\right].$$

Зрозуміло, що поля $\{P(\overline{n}; c), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ та $\{V(\overline{n}; c), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ є обмеженими тоді і тільки тоді, коли ряди $\sum \mathsf{P}(|X(\overline{n})| \geq c)$ та $\sum \mathbf{D}[X^c(\overline{n})]$ є збіжними. Нехай поле $\{S(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ є обмеженим майже напевно. Доведемо, що поля $\{P(\overline{n}; c), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$, $\{E(\overline{n}; c), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ та $\{V(\overline{n}; c), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ є обмеженими. Зрозуміло, що поле $\{\widetilde{S}(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ є обмеженим за ймовірністю. З теореми 1 випливає, що поле $\{\widetilde{S}(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ є збіжним за ймовірністю. Звідси ми отримуємо, що поле $\{\widetilde{S}(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ є збіжним майже напевно (див. теорему 1 в [4]). Тепер виводимо з наслідка 4 в [7], що ряд $\sum \mathsf{P}(|\widetilde{X}(\overline{n})| \geq c)$ збігається для будь-якого $c > 0$. Таким чином

$$\infty > \sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}\left(|\widetilde{X}(\overline{n})| \geq c/2\right) \geq \sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}\left(|X(\overline{n})| > c, |X'(\overline{n})| \leq c/2\right)$$
$$\geq \inf_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}(|X(\overline{n})| \leq c/2) \sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}(|X(\overline{n})| \geq c),$$

де незалежні випадкові величини $\{X'(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ не залежать від поля $\{X(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ та мають такий же розподіл, як і випадкові величини $X(\overline{n})$. З леми 2 випливає, що поле $\{X(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ є обмеженим за ймовірністю. Таким чином існує $c > 0$, для якого $\mathsf{P}(|X(\overline{n})| \le c) > \frac{1}{2}$ для всіх $\overline{n} \in \mathbf{N}^d$. Це означає, що $\sup_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} P(\overline{n}; c) < \infty$ для такого c. Більше того, звідси випливає, що $\mathsf{P}(X(\overline{k}) \ne X^c(\overline{k})$ н. к. р.$) = 0$ й тому поле $\sum_{\overline{k}\le\overline{n}} X^c(\overline{k})$ є обмеженим майже напевно, а значить й за ймовірністю. За лемою 4 це означає, що $\sup_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} |E(\overline{n}; c)| < \infty$ та $\sup_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} V(\overline{n}; c) < \infty$.

Доведемо обернене твердження. Нехай поля $\{P(\overline{n}; c), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$, $\{E(\overline{n}; c), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ та $\{V(\overline{n}; c), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ є обмеженими. Доведемо, що поле $\{S(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ є обмеженим майже напевно. З обмеженості поля $\{V(\overline{n}; c), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ та теореми про два ряди (див. наслідок 2 в [7]) випливає, що ряд $\sum \left[X^c(\overline{k}) - \mathsf{E}\, X^c(\overline{k})\right]$ збігається майже напевно, а значить він збігається й за ймовірністю.

Нехай $M(\overline{n}; c)$ це медіана випадкової величини $\sum_{\overline{k}\le\overline{n}} \left[X^c(\overline{k}) - \mathsf{E}\, X^c(\overline{k})\right]$. Тоді з теореми 3 випливає, що поле $\sum_{\overline{k}\le\overline{n}} \left[X^c(\overline{k}) - \mathsf{E}\, X^c(\overline{k})\right] - M(\overline{n}; c)$ є обмеженим за ймовірністю. Оскільки поле $\{E(\overline{n}; c), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ є обмеженим, то це означає, що поле $\sum_{\overline{k}\le\overline{n}} X^c(\overline{k}) - M(\overline{n}; c)$ є обмеженим за ймовірністю. Зрозуміло, що

$$|M(\overline{n}; c)| \le \sqrt{V(\overline{n}; c)},$$

тобто поле $\{M(\overline{n}; c), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ є обмеженим, а поле $\sum_{\overline{k}\le\overline{n}} X^c(\overline{k})$ є обмеженим за ймовірністю. З теореми 4 випливає, що поле $\sum_{\overline{k}\le\overline{n}} X^c(\overline{k})$ є обмеженим майже напевно. Тепер використаємо обмеженість поля $\{P(\overline{n}; c), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$, щоб довести на підставі леми Бореля–Кантеллі, що поле $\sum_{\overline{k}\le\overline{n}} X(\overline{k})$ є обмеженим майже напевно. □

5. Обмежена збіжність кратних рядів

В теорії кратних рядів розглядаються різні види збіжності, які знижують в тому чи іншому розумінні ефект, представлений в прикладі 1. Одним з таких видів є *обмежена збіжність* (див., наприклад, [8]).

Означення 4. Кратний ряд $\sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} X(\overline{n})$ називається *обмежено збіжним*, якщо він збігається майже напевно, а поле $\{S(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ є обмеженим.

Зрозуміло, що у випадку $d = 1$ це означення є еквівалентним означенню звичайної збіжності. При $d > 1$ це вже не так, а клас обмежено збіжних рядів є більш вузьким у порівнянням з класом просто збіжних рядів. Умови обмеженості, які вивчались у попередніх параграфах, дозволяють легко сформульовати критерій обмеженої збіжності незалежних випадкових величин.

Теорема 6. *Якщо $\{X(\overline{n}), \overline{n} \in \mathbf{N}^d\}$ — незалежні випадкові величини, то обмежена збіжність майже напевно ряду $\sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} X(\overline{n})$ еквівалентна обмеженій збіжності при деякому $c > 0$ наступних рядів*

$$\sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{P}(|X(\overline{n})| \ge c), \tag{6}$$

$$\sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathsf{E}\, X^c(\overline{n}), \tag{7}$$

$$\sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} \mathbf{D}\, X^c(\overline{n}). \tag{8}$$

Доведення. Нехай ряд $\sum X(\overline{n})$ збігається обмежено. З теореми 5 випливає, що ряди (6)–(8) є обмеженими. Оскільки доданки рядів (6) та (8) додатні, то їх обмеженість еквівалентна збіжності навіть у випадку $d > 1$. Зі збіжності ряду (6) та леми Бореля–Кантеллі випливає, що ряд $\sum X^c(\overline{k})$ збігається майже напевно. На підставі теореми про два ряди (див. наслідок 2 в [7]) зі збіжності ряду (8) випливає збіжність ряду (7).

Обернене твердження є наслідком леми 7 та теореми про три ряди (теорема 2 в [4]).

Теорема повністю доведена. □

Література

1. Дж. Дуб, *Вероятностные процессы*, "Иностранная литература", Москва, 1956.
2. А. В. Скороход, *Случайные процессы с независимимы приращениями*, "Наука", Москва, 1986.
3. G. P. Gabriel, *An inequality for sums of independent random variables indexed by finite dimensional filtering sets and its application to convergence of series*, Ann. Probab. **5** (1977), № 5, 779–786.
4. О. И. Клесов, *Теорема о трех рядах для случайных полей с независимыми значениями*, Вестник Киевского ун–та, серия математики и механика **22** (1980), 35–40.
5. ———, *Усиленный закон больших чисел для случайных полей с независимыми значениями*, Теор. вероятност. матем. статист. **21** (1979), 65–68.
6. ———, *Неравенство Гаека–Реньи для случайных полей и усиленный закон больших чисел*, Теор. вероятност. матем. статист. **22** (1980), 58–66.
7. ———, *Сходимость кратных рядов случайных величин*, Теор. вероятност. применен. **40** (1995), № 1, 68–83.
8. А. И. Янушаускас, *Двойные ряды* (1980), "Наука", Новосибирск.

Кафедра теорії ймовірностей та математичного аналізу, Національний технічний університет України, пр. Перемоги, 37, Київ 02056

Електронна адреса: oleg@tbimc.freenet.kiev.ua

Надійшла 18/05/2000