Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 63, 2000, стор. 100–111

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 63, 2000, pp. 100–111

ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ З КЛАСІВ $V(\varphi, \psi)$

УДК 519.21

Ю. В. КОЗАЧЕНКО, О. І. ВАСИЛИК

Резюме. Для випадкових процесів з класів $V(\varphi, \psi)$ знайдено оцінки розподілів супремуму певним чином нормованих процесів, коли їх область означення не є компакт. Знайдено також умови, за яких випадкові процеси з цих класів з ймовірністю одиниця для досить великих t не перевищують певну функцію.

1. Вступ

Існує багато робіт, в яких досліджуються умови експоненціальної інтегрованості різних функціоналів від гауссових та інших випадкових процесів. У більшості з них знайдено оцінки для розподілів цих функціоналів. В книзі [1] міститься досить повний список цих робіт. Згадаємо лише роботу А. В. Скорохода, в якій вперше було отримано умови експоненціальної інтегрованості деяких функціоналів від гауссових елементів. Загальні умови існування експоненціальних моментів у передгауссових випадкових процесів містяться в роботі Дмитровського [3]. У цій роботі отримано оцінки розподілів супремумів випадкових процесів, що належать класам $V(\varphi, \psi)$. Але на відміну від багатьох попередніх робіт, де процеси розглядаються на компактних просторах, тут розглядається загальний випадок. Зауважимо, що робота є продовженням досліджень роботи [4]. У третьому розділі наведено загальні теореми, що дають оцінки розподілу супремуму нормованого випадкового процесу $c(t)x(t)$, де $c(t)$ — спеціально підібрана функція. У четвертому розділі вивчаються умови, за яких випадкові процеси з класів $V(\varphi, \psi)$ з ймовірністю одиниця для досить великих t не перевищують певну функцію. У п'ятому розділі отримані результати застосовуються до стаціонарних процесів.

Застосування цих результатів до інших випадкових процесів та полів буде наведено у наступних публікаціях.

2. Випадкові процеси з класів $V(\varphi, \psi)$

Функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbf{R}\}$ називається N-функцією Орлича [5], якщо φ — парна опукла функція така, що $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ при $x \neq 0$, $\varphi(x)/x \to 0$ при $x \to 0$ та $\varphi(x)/x \to \infty$ при $x \to \infty$. Будемо також вважати, що $\overline{\lim}_{x\to 0} \varphi(x)/x^2 \leq \frac{1}{2}$. N-функція Орлича φ підпорядкована N-функції ψ, якщо існують числа $x_0 > 0$ та $k > 0$, що $\varphi(x) < \psi(kx)$ при $x > x_0$.

Нехай $\{\Omega, \mathfrak{B}, \mathsf{P}\}$ — стандартний ймовірністний простір.

Означення 2.1 [1, 6]. Простір $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ — це простір центрованих випадкових величин ξ таких, що для всіх $\lambda \in \mathbf{R}$ існує константа $r_\xi \geq 0$, що має місце нерівність

$$\mathsf{E} \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda r_\xi)\}. \tag{2.1}$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60G07; Secondary 60G70.

Простір $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ — це простір Банаха відносно норми [1, 6]

$$\tau_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda>0} \frac{\varphi^{(-1)}(\ln \mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\})}{\lambda},$$

$\varphi^{(-1)}$ обернена функція до функції $\varphi(x)$. Зауважимо, що для всіх $\lambda \in \mathbf{R}$ має місце нерівність

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda\tau_\varphi(\xi))\} \tag{2.2}$$

та існує константа $c > 0$, що $(\mathsf{E}(\xi^2))^{1/2} \leq c\tau_\varphi(\xi)$. Якщо φ та ψ такі N-функції, що $\varphi \prec \psi$, то $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega) \subset \mathrm{Sub}_\psi(\Omega)$ та існує константа c, що $\tau_\psi(\xi) \leq c\tau_\varphi(\xi)$ [1].

Означення 2.2 [4]. Нехай (T,ρ) псевдометричний (метричний) простір. Випадковий процес $x = (x(t), t \in T)$ належить класу $V(\varphi,\psi)$, де $\varphi \prec \psi$, якщо $x(t) \in \mathrm{Sub}_\psi(\Omega)$ для всіх $t \in T$ та $x(t) - x(s) \in \mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ для всіх $s, t \in T$.

Нехай (T,ρ) простір з псевдометрикою ρ. Нагадаємо, що псевдометрика відрізняється від метрики лише тим, що з рівності $\rho(t,s) = 0$ не випливає, що $t = s$. Нехай $x = (x(t), t \in T)$ — сепарабельний випадковий процес з класу $V(\varphi,\psi)$. Нехай існує монотонно зростаюча функція $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$, $\sigma(h) \to 0$, коли $h \to 0$ така, що має місце нерівність

$$\sup_{\rho(t,s)\leq h} \tau_\varphi(x(t) - x(s)) \leq \sigma(h).$$

Лема 2.1 [4]. *Нехай (B,ρ) — компактна множина, $B \subset T$, $w = w_B$ — довільна точка з B, $\varkappa_B = \sup_{t\in B} \sigma(\rho(t,w))$, $0 < p < 1$. Виконується умова*

$$\int_0^{p\varkappa_B} \alpha_\varphi\left(H_B\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du < \infty, \tag{2.3}$$

де $\alpha_\varphi(v) = v/\varphi^{(-1)}(v)$, $H_B(u)$ — метрична ентропія простору (B,ρ), тобто $H(u) = \ln N(u)$, де $N(u)$ — мінімальне число замкнених куль радіуса u, що покривають (B,ρ). Тоді для всіх $0 < p < 1$, $\lambda > 0$ мають місце такі нерівності

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\exp\left\{\lambda \sup_{t\in T} x(t)\right\} &\leq \exp\biggl\{\psi\left(\frac{\lambda\tau_\psi(x(w_B))}{1-p}\right)(1-p) + \varphi\left(\frac{\lambda\varkappa_B}{(1-p)p}\right)p \\ &\qquad + \frac{2\lambda}{p(1-p)}\int_0^{p\varkappa_B} \alpha_\varphi\left(H_B\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du\biggr\} \\ &= \Gamma_{w,B}(\lambda,p),\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\mathsf{E}\exp\left\{-\lambda \inf_{t\in T} x(t)\right\} \leq \Gamma_{w,B}(\lambda,p), \tag{2.5}$$

$$\mathsf{E}\exp\left\{\lambda \sup_{t\in T} |x(t)|\right\} \leq 2\Gamma_{w,B}(\lambda,p). \tag{2.6}$$

Зауваження 2.1. Порівняно з роботою [4] тут дещо змінені позначення. Крім того у роботі [4] у лемі 3.2 при означенні $\varkappa_B$, як і у деяких інших твердженнях помилково пропущена літера σ.

Лема 2.2 [4]. *Нехай $r(u) \geq 0$, $u \geq 1$, $r(1) = 0$, неспадна функція, така, що функція $s(t) = r(\exp\{t\})$ опукла. Нехай всі припущення леми 2.1 виконуються, а замість умови 2.3 виконується умова*

$$\int_0^{p\varkappa_B} \theta_{\varphi,r}\left(H_B\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du < \infty, \tag{2.7}$$

де

$$\theta_{\varphi,r}(x) = \frac{r(\exp\{x\})}{\varphi^{(-1)}(x)}.$$

Тоді для всіх $0 < p < 1$, $\lambda > 0$ мають місце нерівності

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\exp\left\{\lambda\sup_{t\in T}x(t)\right\} &\le \exp\left\{\psi\left(\frac{\lambda\tau_\psi(x(w_B))}{1-p}\right)(1-p)+\varphi\left(\frac{\lambda\varkappa_B}{(1-p)p}\right)p\right\}\\ &\quad\times\left(r^{(-1)}\left(\frac{\lambda}{(1-p)p}\int_0^{p\varkappa_B}\theta_{\varphi,r}\left(H_B\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)du\right)\right)^2\\ &= \Gamma_r(\lambda,p),\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\mathsf{E}\exp\left\{-\lambda\inf_{t\in T}x(t)\right\}\le\Gamma_r(\lambda,p), \tag{2.9}$$

$$\mathsf{E}\exp\left\{\lambda\sup_{t\in T}|x(t)|\right\}\le 2\Gamma_r(\lambda,p). \tag{2.10}$$

3. Оцінки розподілу супремумів

Нехай (T,ρ) — псевдометричний простір, $x=(x(t),t\in T)$ — сепарабельний процес з класу $V(\varphi,\psi)$, $\varphi\prec\psi$, $T=\bigcup_{l=1}^\infty B_l$, де B_l — компактні множини. Припустимо, що існують монотонно зростаючі функції $\sigma_l=\{\sigma_l(h),h>0\}$, $\sigma_l(h)\to 0$, коли $h\to 0$, такі, що має місце нерівність

$$\sup_{\substack{\rho(t,s)\le h\\ t,s\in B_l}}\tau_\varphi\big(x(t)-x(s)\big)\le\sigma_l(h). \tag{3.1}$$

Нехай $c=\{c(t),t\in T\}$ — неперервна функція така, що $|c(t)|<1$, $\delta_l=\sup_{t\in B_l}|c(t)|$, w_l — довільна точка з B_l, $z_l=\tau_\varphi(x(w_l))$, $\varkappa_l=\sigma_l\big(\sup_{t\in B_l}\rho(t,w_l)\big)$. Наступні леми узагальнюють та посилюють відповідні твердження роботи [4].

Лема 3.1. *Нехай виконуються умови*

$$\int_0^{p\varkappa_l}\alpha_\varphi\left(H_{B_l}\left(\sigma_l^{(-1)}(u)\right)\right)du<\infty,\qquad l=1,2,\dots, \tag{3.2}$$

де $\alpha_\varphi(v)=v/\varphi^{(-1)}(v)$, $0<p<1$,

$$\sum_{l=1}^\infty\delta_l\left(\int_0^{p\varkappa_l}\alpha_\varphi\left(H_{B_l}\left(\sigma_l^{(-1)}(u)\right)\right)du\right)<\infty. \tag{3.3}$$

Тоді, якщо

$$d=\sum_{l=1}^\infty\delta_l z_l<\infty \tag{3.4}$$

та $\sup_l\varkappa_l/z_l=\beta<\infty$, *то для всіх* $\lambda>0$, $0<p<1$, *має місце нерівність*

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\exp\left\{\lambda\sup_{t\in T}|c(t)x(t)|\right\}\\ &\le 2\exp\left\{\psi\left(\frac{\lambda d}{1-p}\right)(1-p)+\sum_{l=1}^\infty\frac{\delta_l z_l}{d}\varphi\left(\frac{\lambda d\varkappa_l}{z_l(1-p)p}\right)p\right.\\ &\qquad\left.+\frac{2\lambda}{(1-p)p}\sum_{l=1}^\infty\delta_l\int_0^{p\varkappa_l}\alpha_\varphi\left(H_{B_l}\left(\sigma_l^{(-1)}(u)\right)\right)du\right\}\\ &=\Gamma_1(\lambda,p).\end{aligned} \tag{3.5}$$

Якщо ж

$$a=\sum_{l=1}^\infty\delta_l\varkappa_l<\infty \tag{3.6}$$

та $\sup_l z_l/\varkappa_l = \gamma < \infty$, *то для всіх* $\lambda > 0$, $0 < p < 1$, *має місце нерівність*

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\exp\left\{\lambda\sup_{t\in T}|c(t)x(t)|\right\} &\le 2\exp\left\{\frac{1-p}{a}\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\varkappa_l\psi\left(\frac{\lambda a z_l}{(1-p)\varkappa_l}\right)+\varphi\left(\frac{\lambda a}{(1-p)p}\right)p\right.\\ &\quad\left.+\frac{2\lambda\delta_l}{(1-p)p}\sum_{l=1}^{\infty}\int_0^{p\varkappa_l}\alpha_\varphi\left(H_{B_l}\left(\sigma_l^{(-1)}(u)\right)\right)du\right\}\\ &= \Gamma_2(\lambda,p),\end{aligned} \tag{3.7}$$

Доведення. Легко бачити, що має місце нерівність

$$\sup_{t\in T}|c(t)x(t)| \le \sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\sup_{t\in B_l}|x(t)|. \tag{3.8}$$

Нехай $\lambda > 0$, $r_l > 1$, $l = 1,\ldots,\infty$, такі, що $\sum_{l=1}^{\infty} r_l^{-1} \le 1$. Тоді з (3.8) та нерівності Гельдера випливає нерівність

$$\mathsf{E}\exp\left\{\lambda\sup_{t\in T}|c(t)x(t)|\right\} \le \prod_{l=1}^{\infty}\left(\mathsf{E}\exp\left\{\lambda r_l\delta_l\sup_{t\in B_l}|x(t)|\right\}\right)^{1/r_l}.$$

З останньої нерівності та леми 2.1 (нерівність 2.6) випливає, що

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\exp\left\{\lambda\sup_{t\in T}|c(t)x(t)|\right\} &\le 2\exp\left\{\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1-p}{r_l}\psi\left(\frac{\lambda r_l\delta_l z_l}{(1-p)}\right)+\frac{p}{r_l}\varphi\left(\frac{\lambda r_l\delta_l\varkappa_l}{(1-p)p}\right)\right.\\ &\quad\left.+\frac{2\lambda\delta_l}{(1-p)p}\int_0^{p\varkappa_l}\alpha_\varphi\left(H_{B_l}\left(\sigma_l^{(-1)}(u)\right)\right)du\right\}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Якщо в (3.9) покласти $r_l = d/(\delta_l z_L)$, то отримаємо нерівність (3.5). Зауважимо, що ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l z_l\varphi\left(\frac{\lambda d\varkappa_l}{z_l(1-p)p}\right)$$

збігається, бо

$$\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l z_l\varphi\left(\frac{\lambda d\varkappa_l}{z_l(1-p)p}\right) \le \varphi\left(\frac{\lambda d\beta}{(1-p)p}\right)\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l z_l = \varphi\left(\frac{\lambda d\beta}{(1-p)p}\right)d. \tag{3.10}$$

Щоб довести (3.7), треба у (3.9) покласти $r_l = a/(\delta_l\varkappa_l)$. Також має місце нерівність

$$\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\varkappa_l\psi\left(\frac{\lambda d z_l}{(1-p)\varkappa_l}\right) \le a\psi\left(\frac{\lambda a\gamma}{(1-p)}\right). \qquad \square \tag{3.11}$$

Лема 3.2. *Нехай виконуються умови*

$$\int_0^{p\varkappa_l}\theta_{\varphi,r}\left(H_{B_l}\left(\sigma_l^{(-1)}(u)\right)\right)du < \infty, \tag{3.12}$$

де $\theta_{\varphi,r}(x) = r(\exp\{x\})/\varphi^{(-1)}(x)$, *функція* $r(t)$ *задовольняє умовам леми* 2.2, $0 < p < 1$,

$$\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\int_0^{p\varkappa_l}\theta_{\varphi,r}\left(H_{B_l}\left(\sigma_l^{(-1)}(u)\right)\right)du < \infty. \tag{3.13}$$

Тоді, якщо

$$d = \sum_{l=1}^{\infty}\delta_l z_l < \infty$$

та $\sup_l \varkappa_l/z_l = \beta < \infty$, *то для всіх* $\lambda > 0$, $0 < p < 1$, *має місце нерівність*

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\exp\left\{\lambda \sup_{t\in T}|c(t)x(t)|\right\} \\
&\le 2\exp\left\{\psi\left(\frac{\lambda d}{1-p}\right)(1-p) + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\delta_l z_l}{d}\varphi\left(\frac{\lambda d \varkappa_l}{z_l(1-p)p}\right)p\right\} \\
&\quad\times\left(r^{(-1)}\left(\lambda\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\int_0^{p\varkappa_l}\theta_{\varphi,r}\left(H_{B_l}\left(\sigma_l^{(-1)}(u)\right)\right)du\right)\right)^2 \\
&= \Gamma_3(\lambda,p).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Якщо ж

$$a = \sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\varkappa_l < \infty$$

та $\sup_l z_l/\varkappa_l = \gamma < \infty$, *то для всіх* $\lambda > 0$, $0 < p < 1$, *має місце нерівність*

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\exp\left\{\lambda \sup_{t\in T}|c(t)x(t)|\right\} \\
&\le 2\exp\left\{\frac{1-p}{a}\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\varkappa_l\psi\left(\frac{\lambda a z_l}{(1-p)\varkappa_l}\right) + \varphi\left(\frac{\lambda a}{(1-p)p}\right)p\right\} \\
&\quad\times\left(r^{(-1)}\left(\lambda\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\int_0^{p\varkappa_l}\theta_{\varphi,r}\left(H_{B_l}\left(\sigma_l^{(-1)}(u)\right)\right)du\right)\right)^2 \\
&= \Gamma_4(\lambda,p),
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Доведення. Як і при доведенні леми 3.1 з урахуванням леми 2.2 (нерівність 2.8) для будь-яких $r_l > 1$, таких, що $\sum_{l=1}^{\infty} r_l^{-1} \le 1$ та для всіх $\lambda > 0$ отримуємо нерівність

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\exp\left\{\lambda \sup_{t\in T}|c(t)x(t)|\right\} \\
&\le 2\exp\left\{\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{r_l}\left(\psi(\lambda r_l\delta_l z_l)(1-p) + \varphi\left(\frac{\lambda r_l\delta_l\varkappa_l}{(1-p)p}\right)p\right)\right\} \\
&\times\left(\prod_{l=1}^{\infty}\left(r^{(-1)}\left(\frac{\lambda r_l\delta_l}{(1-p)p}\int_0^{p\varkappa_l}\theta_{\varphi,r}\left(H_{B_l}\left(\sigma_l^{(-1)}(u)\right)\right)du\right)\right)^{2/r_l}\right).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Оскільки за умовами теореми функція $s(t) = r(\exp\{t\})$ є C-функцією [1], то для будь-яких $\varkappa_l > 0$ має місце нерівність [1]

$$\sum_{l=1}^{\infty}s^{(-1)}(\varkappa_i)\frac{1}{r_i} \le s^{(-1)}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\varkappa_i}{r_i}\right). \tag{3.17}$$

Оскільки $s^{(-1)}(t) = \ln(r^{(-1)}(t))$, то з (3.17) випливає нерівність

$$\begin{aligned}
&\prod_{l=1}^{\infty}\left(r^{(-1)}\left(\frac{\lambda r_l\delta_l}{(1-p)p}\int_0^{p\varkappa_l}\theta_{\varphi,r}\left(H_{B_l}\left(\sigma_l^{(-1)}(u)\right)\right)du\right)\right)^{1/r_l} \\
&\quad= \exp\left\{\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{r_l}\ln\left(r^{(-1)}\left(\frac{\lambda r_l\delta_l}{(1-p)p}\int_0^{p\varkappa_l}\theta_{\varphi,r}\left(H_{B_l}\left(\sigma_l^{(-1)}(u)\right)\right)du\right)\right)\right\} \\
&\quad\le r^{(-1)}\left(\frac{\lambda}{(1-p)p}\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\int_0^{p\varkappa_l}\theta_{\varphi,r}\left(H_{B_l}\left(\sigma_l^{(-1)}(u)\right)\right)du\right)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Якщо скористатися цією нерівністю та в (3.16) покласти $r_l = d/(\delta_l z_l)$, то отримаємо нерівність (3.14). Якщо ж покласти $r_l = a/(\delta_l z_l)$, то отримаємо нерівність (3.15). □

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умови при яких має місце одна з нерівностей* (3.5), (3.7) *або* (3.14), (3.15). *Тоді відповідно для всіх* $\varepsilon > 0$ *і* $\lambda > 0$ *мають місце нерівності*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in T}|c(t)x(t)| \geq \varepsilon\right\} \leq \inf_{0<p<1}\inf_{\lambda>0}\Gamma_k(\lambda,p)\exp\{-\lambda\varepsilon\}, \qquad k=1,\ldots,4. \tag{3.19}$$

Доведення. Теорема випливає з нерівності Чебишова, а саме, при $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in T}|c(t)x(t)| > \varepsilon\right\} \leq \frac{\mathsf{E}\exp\{\sup_{t\in T}|c(t)x(t)|\}}{\exp\{\lambda\varepsilon\}} \leq \Gamma_k(\lambda,p)\exp\{-\lambda\varepsilon\},$$

де $k=1,\ldots,4$. □

Наслідок 3.1. *Нехай виконуються умови леми* 3.1 (*нерівність* (3.5)). *Тоді при будь-якому* $\varepsilon \geq B$, *де*

$$B = \sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\int_0^{p\varkappa_l}\alpha_\varphi\left(H_{B_l}\left(\sigma_l^{(-1)}(u)\right)\right)du$$

має місце нерівність

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in T}|c(t)x(t)| \geq \varepsilon\right\} \leq 2\exp\{-Q_1^*(\varepsilon - B)\}, \tag{3.20}$$

де $Q_1^*(u)$, $u > 0$, *перетворення Юнга–Фенхеля функції*

$$Q_1(\lambda) = \psi\left(\frac{\lambda d}{1-p}\right)(1-p) + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\delta_l z_l}{d}\varphi\left(\frac{\lambda d\varkappa_l}{z_l(1-p)p}\right)p,$$

а саме, $Q_1^*(u) = \sup_{\lambda>0}(u\lambda - Q_1(\lambda))$.

Доведення. Зауважимо спочатку, що, як легко бачити, при виконанні умов леми 3.1 функція $Q_1(\lambda)$ є N-функцією Орлича, тому [5] перетворення Юнга–Фенхеля функції $Q_1(\lambda)$ визначене для всіх $u > 0$ та $Q_1^*(u)$ є також N-функцією Орлича. Отже з теореми 3.1 випливає, що при $\varepsilon > B$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in T}|c(t)x(t)| > \varepsilon\right\} &\leq 2\inf_{\lambda>0}\exp\{Q_1(\lambda) + \lambda B - \lambda\varepsilon\}\\ &= 2\exp\left\{-\sup_{\lambda>0}(\lambda(\varepsilon - B) - Q_1(\lambda))\right\}\\ &= 2\exp\{-Q_1^*(\varepsilon - B)\}. \qquad \square\end{aligned}$$

Аналогічно отримуємо таке твердження.

Наслідок 3.2. *Нехай виконуються умови леми* 3.1 (*нерівність* (3.7)). *Тоді при будь-якому* $\varepsilon > B$ *має місце нерівність*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in T}|c(t)x(t)| \geq \varepsilon\right\} \leq 2\exp\{-Q_2^*(\varepsilon - B)\}, \tag{3.21}$$

де $Q_2(u)$, $u > 0$, *перетворення Юнга–Фенхеля функції*

$$Q_2(\lambda) = \frac{1-p}{a}\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\varkappa_l\psi\left(\frac{\lambda a z_l}{(1-p)\varkappa_l}\right) + \varphi\left(\frac{\lambda a}{(1-p)p}\right)p.$$

4. Асимптотичні границі для випадкових процесів з класів $V(\varphi,\psi)$

Спочатку наведемо дві прості леми.

Лема 4.1. *Нехай $X = \{x(t), t \in T\}$ — випадковий процес, T — деяка параметрична множина, має місце нерівність*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in T}|c(t)X(t)| > \varepsilon\right\} \le w(\varepsilon),$$

де $c(t)$, $t \in T$, та $w(\varepsilon) > 0$ — певні функції. Якщо $D_k \subset T$ такі множини, що $D_k \subset D_{k+1}$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = T$, а $\delta_k = \inf_{t\in D_k}|c(t)|$, то, якщо існує така послідовність $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k < \varepsilon_{k+1}$, що збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} w(\varepsilon_k\delta_k) < \infty, \tag{4.1}$$

тоді з імовірністю одиниця існує таке $k_0 = k_0(\omega) < \infty$, що $|x(t)| < s(t)$ при $t \notin D_{k_0}$, де $s(t)$ будь-яка функція така, що $s(t) \ge \varepsilon_{k+1}$ при $t \notin D_k$.

Доведення. Мають місце нерівності

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in D_k}|x(t)| > \varepsilon_k\right\} \le \mathsf{P}\left\{\sup_{t\in D_k}\frac{|c(t)x(t)|}{\delta_k} \ge \varepsilon_k\right\}$$
$$\le \mathsf{P}\left\{\sup_{t\in T}|c(t)x(t)| \ge \varepsilon_k\delta_k\right\} \le w(\varepsilon_k\delta_k).$$

З умови (4.1) та леми Бореля–Кантеллі випливає, що існує таке $k_0(\omega) < \infty$, що з імовірністю одиниця $\sup_{t\in D_k}|x(t)| \le \varepsilon_k$ при $k \ge k_0$. Отже, як легко бачити, твердження леми має місце. □

Аналогічно доводиться наступна лема.

Лема 4.2. *Нехай $X = \{x(t), t \in T\}$ — випадковий процес, T — деяка параметрична множина. $D_k \subset T$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = T$, такі множини, що $D_k \subset D_{k+1}$; $\varepsilon_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, така послідовність, що $\varepsilon_k < \varepsilon_{k+1}$. Якщо виконується умова*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in D_k}|x(t)| \ge \varepsilon_k\right\} < \infty, \tag{4.2}$$

то з імовірністю одиниця існує таке $k_0 = k_0(\omega) < \infty$, що $|x(t)| < s_1(t)$ при $t \notin D_{k_0}$, де $s_1(t)$ така функція, що $s_1(t) \ge \varepsilon_{k+1}$ при $t \notin D_k$.

З леми 4.1 та теореми 3.1 миттєво випливають такі теореми.

Теорема 4.1. *Нехай $X = \{x(t), t \in T\}$ — випадковий процес з класу $V(\varphi,\psi)$, для якого виконуються припущення розділу 3. Нехай виконуються умови теореми 3.1. Тоді має місце твердження леми 4.1, де $w(\varepsilon) = \inf_{0<p<1}\inf_{\lambda>0}\Gamma_k(\lambda,p)\exp\{-\lambda\varepsilon\}$, $k = 1,\ldots,4$.*

Нехай тепер $X = \{x(t), t \in T\}$ — випадковий процес з класу $V(\varphi,\psi)$, (T,ρ) — псевдометричний простір; $D_k \subset D_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = T$ — деякі компактні множини.

Теорема 4.2. *Нехай для процесу x на кожній з множин D_k виконуються умови леми 2.1 (або леми 2.2). Тоді для x має місце твердження леми 4.2, якщо для послідовності $\varepsilon_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $\varepsilon_k < \varepsilon_{k+1}$, збігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} V(\varepsilon_k), \tag{4.3}$$

де $V(\varepsilon_k) = \inf_{0<p<1}\inf_{\lambda>0}\Gamma_{w_k,D_k}(\lambda,p)\exp\{-\lambda\varepsilon_k\}$, w_k *— довільна точка в* D_k, *а* $\Gamma_{w_k,D_k}(\lambda,p)$ *задано в* (2.4) (*або* $V(\varepsilon_k) = \inf_{0<p<1}\inf_{\lambda>0}\Gamma_r(\lambda,p)\exp\{-\lambda\varepsilon_k\}$, *де* $\Gamma_r(\lambda,p)$ *задано в* (2.8)).

Твердження теореми випливає з нерівності (2.4) та (2.5) леми 2.1, оскільки

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in D_k}|x(t)|>\varepsilon\right\}\le \mathsf{P}\left\{\sup_{t\in D_k}|x(t)|>\varepsilon\right\}+\mathsf{P}\left\{\inf_{t\in D_k}|x(t)|>\varepsilon\right\}\le 2\Gamma_{w_k,D_k}(\lambda,p)$$

або з нерівності (2.10) леми 2.2. □

5. Стаціонарні процеси

Означення 5.1. Випадковий процес $X=\{x(t),t\in\mathbf{R}\}$ з класу $V(\varphi,\psi)$ називається стаціонарним, якщо при всіх $t,s\in\mathbf{R}$

$$\tau_\psi(x(t))=c_\psi=\text{const},\qquad \tau_\varphi(x(t))=c_\varphi=\text{const},\qquad \tau_\varphi(x(t)-x(s))=\sigma_\varphi(t-s).$$

Зауваження 5.1. Для спрощення вважатимемо, що функція $\sigma_\varphi=(\sigma_\varphi(h),h>0)$ монотонно зростає (інакше можна було б розглядати монотонну перебудову цієї функції) $\sigma_\varphi(h)\to 0$ при $h\to 0$ та $\lim_{u\to\infty}\sigma_\varphi(u)=c_\sigma<\infty$. Крім того, будемо розглядати процес при $t\ge 0$.

Теорема 5.1. *Нехай* $x=\{x(t),t\in\mathbf{R}^+\}$ *— стаціонарний сепарабельний випадковий процес з класу* $V(\varphi,\psi)$. *Нехай* t_l, $l=0,1,2,\ldots$, *таке розбиття* $\mathbf{R}^+$, *що* $t_0=0$, $t_l<t_{l+1}$, $t_{l+1}-t_l\ge 1$, $t_l\to\infty$, *коли* $l\to\infty$. $c(t)>0$ *деяка неперервна функція, така, що* $|c(t)|<1$, $\delta_l=\sup_{t\in B_l}|c(t)|$, $B_{l+1}=[t_l,t_{l+1}]$. *Нехай виконуються умови*

a$_1$) *для деякого* $\varepsilon>0$

$$\int_0^\varepsilon \alpha_\varphi\left(\ln\left(1+\left(2\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)^{-1}\right)du<\infty, \tag{5.1}$$

де $\alpha_\varphi=u/\varphi^{(-1)}(u)$,

a$_2$)

$$\sum_{l=1}^\infty \delta_l\alpha_\varphi(\ln(1+(t_{l+1}-t_l))<\infty. \tag{5.2}$$

Тоді при будь-якому $\varepsilon>\widetilde{B}$, $0<p<1$, *де*

$$\widetilde{B}=\sum_{l=1}^\infty\delta_l\int_0^{p\varkappa_l}\alpha_\varphi\left(\ln\left(\frac{t_{l+1}-t_l}{2\sigma_\varphi^{(-1)}(u)}+1\right)\right)du, \tag{5.3}$$

$\varkappa_l=\sigma_\varphi(x_{l+1}-x_l)$, *має місце нерівність*

$$\mathsf{P}\{\sup|c(t)x(t)|\ge\varepsilon\}\le 2\exp\{-\widetilde{Q}_1^*(\varepsilon-\widetilde{B})\}, \tag{5.4}$$

де $\widetilde{Q}_1^*(u)$, $u>0$, *— перетворення Юнга–Фенхеля функції*

$$\widetilde{Q}_1(\lambda)=\psi\left(\frac{\lambda c_\psi\hat\delta}{1-p}\right)(1-p)+\sum_{l=1}^\infty\frac{\delta_l}{\hat\delta}\varphi\left(\frac{\lambda\varkappa_l\hat\delta}{(1-p)p}\right)p, \tag{5.5}$$

де $\hat\delta=\sum_{i=1}^\infty\delta_i$.

Доведення. Перевіримо, що ця теорема випливає з наслідку 3.1. Для цього спочатку пересвідчимось, що виконуються умови леми 3.1. Покладемо $B_l=[t_l,t_{l+1}]$. Оскільки для $\rho(t,s)=|t-s|$ (див., наприклад, [1])

$$N_{B_l}(v)\le\frac{t_{l+1}-t_l}{2v}+1,$$

то

$$\int_0^{p\varkappa_l} \alpha_\varphi\left(H_{B_l}\left(\sigma_l^{(-1)}(u)\right)\right) du \le \int_0^{p\varkappa_l} \alpha_\varphi\left(\ln\left(1+\frac{t_{l+1}-t_l}{2\sigma_\varphi^{(-1)}(u)}\right)\right) du. \tag{5.6}$$

Легко бачити, що всі інтеграли у (5.6) збігаються, коли виконується умова (5.1). Нехай $\varphi^*(u)$ — перетворення Юнга–Фенхеля функції $\varphi(u)$. Оскільки [5] $\varphi^*(u)$ також N-функція Орлича, то для $\varphi^*(u)$ має місце нерівність [1, стор. 44] ($x>0$, $y>0$)

$$\varphi^{*(-1)}(x+y) \le \varphi^{*(-1)}(x) + \varphi^{*(-1)}(y). \tag{5.7}$$

Оскільки для $u>0$ має місце нерівність [1, стор. 100]

$$\frac{u}{\varphi^{(-1)}(u)} \le \varphi^{*(-1)}(u) \le \frac{2u}{\varphi^{(-1)}(u)}, \tag{5.8}$$

то з (5.7) та (5.8) випливають нерівності

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^\infty \delta_l \int_0^{p\varkappa_l} \alpha_\varphi\left(H_{B_l}\left(\sigma_l^{(-1)}(u)\right)\right) du \\
&\quad\le \sum_{l=1}^\infty \delta_l \int_0^{p\varkappa_l} \alpha_\varphi\left(\ln\left(1+\frac{t_{l+1}-t_l}{2\sigma_\varphi^{(-1)}(u)}\right)\right) du \\
&\quad\le 2\Bigg(\sum_{l=1}^\infty \delta_l \int_0^{p\varkappa_l} \Big[\alpha_\varphi(\ln(1+(t_{l+1}-t_l))) \\
&\qquad\qquad + \alpha_\varphi\left(\ln\left(1+\left(2\sigma_\varphi^{(-1)}(u)\right)^{-1}\right)\right)\Big] du\Bigg) \\
&\quad= 2\Bigg(p\sum_{l=1}^\infty \delta_l\varkappa_l\alpha_\varphi\Bigg(\ln(1+(t_{l+1}-t_l)) \\
&\qquad\qquad + \sum_{l=1}^\infty \delta_l \int_0^{p\varkappa_l} \alpha_\varphi \ln\left(1+\left(2\sigma_\varphi^{(-1)}(u)\right)^{-1}\right)\Bigg) du\Bigg).
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Оскільки $\varkappa_l \le c_\varphi$, то

$$\sum_{l=1}^\infty \delta_l\varkappa_l\alpha_\varphi(\ln(1+(t_{l+1}-t_l))) \le c_\varphi \sum_{l=1}^\infty \delta_l\alpha_\varphi(\ln(1+(t_{l+1}-t_l))) < \infty.$$

Оскільки $t_{l+1}-t_l \ge 1$, то ряд $\sum_{l=1}^\infty \delta_l$ також збігається, отже

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^\infty \delta_l \int_0^{p\varkappa_l} \alpha_\varphi\left(\ln\left(1+\left(2\sigma_\varphi^{(-1)}(u)\right)^{-1}\right)\right) du \\
&\qquad\le \int_0^{pc_\varphi} \alpha_\varphi\left(\ln\left(1+\left(2\sigma_\varphi^{(-1)}(u)\right)^{-1}\right)\right) du \sum_{l=1}^\infty \delta_l < \infty.
\end{aligned}$$

Отже умови леми 3.1 виконуються. Нерівність (5.4) тепер безпосередньо випливає з нерівності (3.20). □

Приклад 5.1. Розглянемо стаціонарний процес $x(t)$ з класу $V(\varphi,\psi)$, де $\varphi(x) = D_\alpha|x|^\alpha$, $\alpha>1$, $D_\alpha>0$, при достатньо великих x. Тоді умова (5.1) виконується для досить малих ε (таких, що $\sigma^{(-1)}(\varepsilon)<1$), якщо

$$\int_0^\varepsilon \left(\ln\frac{1}{\sigma_\varphi^{(-1)}(u)}\right)^{(\alpha-1)/\alpha} du < \infty. \tag{5.10}$$

Зауважимо, що ця умова виконується, наприклад, коли при $u < 1$ виконується $\sigma_\varphi(u) = c(\ln u)^{-y}$, де $c > 0$ — деяка константа, а y будь-яке число, що $y > (\alpha-1)/\alpha$. Нерівність (5.2) виконується тоді та лише тоді, коли збігається ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \delta_l (\ln(1+(t_{l+1}-t_l)))^{1-1/\alpha} < \infty. \tag{5.11}$$

Виберемо $t_l = \exp\{l^\gamma\}$, $l \geq 1$, де $\gamma > 0$ — довільне число. Якщо функція $c(t)$ монотонно спадає, то ряд (5.11) збігається, коли збігається ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} c\bigl(\exp\{l^\gamma\} l^{\gamma(1-1/\alpha)}\bigr) < \infty. \tag{5.12}$$

Ряд (5.12) збігається, наприклад, коли $c(t) = (\ln t)^{-\delta}$ при $t \geq e$, де δ — будь-яке число, що $\delta > \gamma^{-1} + \bigl(1-\alpha^{-1}\bigr)$. Оскільки γ — довільне число, то, зрозуміло, що в цьому випадку теорема 5.1 буде виконуватись для будь-якої функції, що $c(t) = (\ln t)^{-\delta}$ при $t > e$, $\delta > 1 - 1/\alpha$. Легко бачити, що коли при досить великих $\lambda > 0$

$$\psi(\lambda) = \varphi(\lambda) = \lambda^\alpha/\alpha, \qquad \alpha > 1,$$

тобто при досить великих λ

$$\widetilde{Q}_1(\lambda) = \frac{|\lambda|^\alpha}{\alpha}\tilde{c}_\alpha(p),$$

де

$$\tilde{c}_\alpha(p) = \frac{c_\psi^\alpha \hat{\delta}^\alpha}{(1-p)^{\alpha-1}} + \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \varkappa_l^\alpha \left(\hat{\delta}^{\alpha-1}(1-p)^\alpha p^{\alpha-1}\right)^{-1},$$

то

$$\widetilde{Q}_1^*(u) = |u|^\beta \bigl(\tilde{c}_\alpha(p)\bigr)^{-\alpha/\beta} \beta^{-1},$$

де β таке число, що $1/\beta + 1/\alpha = 1$. Отже, при досить великих $\varepsilon > 0$ з нерівності (5.4) випливає, що

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\geq 0} |c(t)x(t)| > \varepsilon\right\} \leq 2\exp\left\{-\frac{(\varepsilon - \widetilde{B})^\beta}{\bigl(\tilde{c}_\alpha(p)\bigr)^{\alpha/\beta}\beta}\right\}, \tag{5.13}$$

де $\widetilde{B}$ задано в (5.3), $c(t) > 0$ — будь-яка монотонно спадна функція, для якої збігається ряд (5.12). Якщо ж $\psi(x) = \varphi(x) = x^2/2$ при всіх $x \in \mathbf{R}$, то при всіх $\varepsilon > \widetilde{B}$, де

$$\widetilde{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \int_0^{p\varkappa_l} \left(\ln\left(\frac{t_{l+1}-t_l}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right)\right)^{1/2} du,$$

має місце нерівність

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\geq 0} |c(t)x(t)| \geq \varepsilon\right\} \leq 2\exp\left\{-\frac{(\varepsilon - \widetilde{B}_1)^2}{2\tilde{c}_2(p)}\right\}, \tag{5.14}$$

де $c(t) > 0$ — будь-яка монотонно спадна функція, для якої збігається ряд (5.11). Наприклад, $c(t) = (\ln t)^{-\delta}$ при $t > 1$, де $\delta > \frac{1}{2}$.

Наступна теорема при більш сильних обмеженнях дає кращі оцінки розподілів величин $\sup_{t\geq 0} |c(t)x(t)|$.

Теорема 5.2. *Нехай $x = \{x(t), t \in \mathbf{R}^+\}$ — стаціонарний сепарабельний випадковий процес з класу $V(\varphi,\psi)$, t_l, $l = 0,1,2,\ldots$, таке розбиття $\mathbf{R}^+$, що $t_0 = 0$, $t_l < t_{l+1}$,*

$t_{l+1} - t_l \geq 1$, $t_{l+1} - t_l \to \infty$, коли $l \to \infty$; $c(t) > 0$ деяка неперервна функція, така, що $|c(t)| < 1$, $\delta_l = \sup_{t \in B_l} |c(t)|$, $B_{l+1} = [t_l, t_{l+1}]$. Нехай виконуються умови

b$_1$) *для деякого $\varepsilon > 0$*

$$\int_0^{\varepsilon} \theta_{\varphi r}\left(2\ln\left(1 + \left(2\sigma^{(-1)}(u)\right)^{-1}\right)\right) du < \infty, \tag{5.15}$$

де $\theta_{\varphi r}(x) = r(\exp\{x\})/\varphi^{(-1)}(x)$, $r(u)$ — будь-яка функція визначена в лемі 2.2;

b$_2$)

$$\sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \theta_{\varphi r}(2\ln(1 + (t_{l+1} - t_l))) < \infty \tag{5.16}$$

і функція $\theta_{\varphi r}(x)$ опукла при досить великих x.

Тоді при всіх $\varepsilon > 0$ має місце нерівність

$$\mathsf{P}\{\sup |c(t)x(t)| \geq \varepsilon\} \leq \inf_{0 \leq p \leq 1} \inf_{\lambda > 0} \Gamma_5(\lambda r) \exp\{-\lambda\varepsilon\}, \tag{5.17}$$

де

$$\Gamma_5(\lambda r) = 2\exp\left\{\psi\left(\frac{\lambda c_\psi \hat{\delta}}{1-p}\right)(1-p) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\delta_l}{\hat{\delta}} \varphi\left(\frac{\lambda \varkappa_l \hat{\delta}}{(1-p)p}\right)p\right\}$$
$$\times \left(r^{(-1)}\left(\lambda \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \int_0^{p\varkappa_l} \theta_{\varphi r}\left(\ln\left(\frac{t_{l+1} - t_l}{2\sigma_\varphi^{(-1)}(u)} + 1\right)\right) du\right)\right)^2.$$

Теорема доводиться так же, як і теорема 5.1. Зауважимо лише, що оскільки функція $\theta_{\varphi r}(u)$ опукла, то при досить малих u та великих $t_{l+1} - t_l$ має місце нерівність

$$\theta_{\varphi r}\left(\ln\left(\frac{t_{l+1} - t_l}{2\sigma_\varphi^{(-1)}(u)} + 1\right)\right)$$
$$\leq \frac{1}{2}\left[\theta_{\varphi r}(2\ln(1 + t_{l+1} - t_l)) + \theta_{\varphi r} 2\ln\left(1 + \left(2\sigma_\varphi^{(-1)}(u)\right)^{-1}\right)\right]. \qquad \square$$

Приклад 5.2. Розглянемо стаціонарний процес з класу $V(\varphi, \varphi)$, де $\varphi(x) = \frac{1}{\alpha}|x|^\alpha$, $\alpha > 1$, при достатньо великих x (якщо $\alpha = 2$, то будемо вважати, що $\varphi(x) = \frac{1}{2}|x|^2$ при всіх $x > 0$). Нехай $\sigma_\varphi(u) = u^z$, $z > 0$. В якості $r(t)$ виберемо функцію $r(t) = t^{z/2} - 1$, $t \geq 1$. Легко перевірити, що в цьому випадку умова (5.15) теореми 5.2 виконується. Не важко також перевірити, поклавши $t_l = e^l$, $l \geq 1$, що умову (5.16) задовольняє функція $c(t) = t^{-z}$, $t > 1$. Оскільки в цьому випадку при будь-яких досить великих $\lambda > 0$ та при всіх $\varepsilon > 0$ виконується нерівність (нерівність 5.17)

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t \geq 0} |c(t)x(t)| \geq \varepsilon\right\} \leq 2\exp\left\{\frac{\lambda^\alpha A^\alpha}{\alpha} - \lambda\varepsilon\right\}\left(r^{(-1)}(\lambda B^\alpha)\right)^2, \tag{5.18}$$

де

$$A^\alpha = \frac{(c_\psi \hat{\delta})^\alpha}{(1-p)^{\alpha-1}} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\delta_l \varkappa_l^\alpha}{\hat{\delta}^{\alpha-1}(1-p)^\alpha p^{\alpha-1}},$$

$$B^\alpha = \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \int_0^{\varkappa_l p} \theta_{\varphi r}\left(\ln\left(\frac{e^{l+1} - e^l}{2\sigma_\varphi^{(-1)}(u)} + 1\right)\right) du.$$

Якщо в (5.18) покласти $\lambda = \left(\varepsilon/A_\alpha\right)^{1/(\alpha-1)}$, то отримаємо, що при досить великих $\varepsilon > 0$ має місце нерівність

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\geq 0}|c(t)x(t)| > \varepsilon\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\varepsilon^\beta}{\beta A_\alpha^{\beta-1}}\right\}\left(\frac{\varepsilon^{\beta-1}}{A_\alpha^{\beta-1}}B^\alpha + 1\right)^{4/z}, \tag{5.19}$$

де $\beta > 0$ таке число, що $1/\beta + 1/\alpha = 1$. Зауважимо, що для великих ε ця нерівність краща ніж нерівність (5.13). Крім того, при $\alpha = \beta = 2$ нерівність (5.19) має місце при всіх $\varepsilon > 0$.

Приклад 5.3. Розглянемо, як і у прикладі 5.1, стаціонарний процес з класу $V(\varphi,\varphi)$, де $\varphi(x) = D_\alpha|x|^\alpha$, $\alpha \geq 1$. У позначеннях теореми 4.1 та з нерівності (5.13) випливає, що

$$w(\varepsilon) = 2\exp\left\{-\frac{(\varepsilon - \widetilde{B})^\beta}{\beta\left(\tilde{c_\alpha}(p)\right)^{\alpha/\beta}}\right\}.$$

Виберемо $c(t) = (\ln t)^{-\delta}$, $\delta > \frac{1}{2}$, і ε_k так, щоб збігався ряд $\sum_{k+1}^\infty w(\varepsilon_k\delta_k)$. Наприклад, ε_k можна вибрати так, щоб виконувалась рівність

$$\frac{\left(\varepsilon_k \cdot \delta_k - \widetilde{B}\right)^\beta}{\beta(\tilde{c_\alpha}(p))^{\alpha/\beta}} = \ln k^\gamma, \qquad \gamma > 1.$$

Тоді

$$\varepsilon_k = \delta_k^{-1}\left[\left(\tilde{c_\alpha}(\beta)\right)^{\alpha/\beta^2}(\beta\ln k^\gamma)^{1/\beta} + \widetilde{B}\right].$$

Оскільки $\delta_k = (\ln k)^{-\delta}$, то можна стверджувати, що при досить великих t з ймовірністю одиниця виконується нерівність

$$|x(t)| \leq C(\ln t)^{1/\beta+1/2+\delta}, \qquad c > 0,\ \delta > 0.$$

Література

1. V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko, *Metric characterization of random variables and random processes*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
2. А. В. Скороход, *Замечание о гауссовских мерах в банаховых пространствах*, Теор. вероятност. применен. **15** (1970), № 3, 519–520.
3. В. А. Дмитровский, *О распределении максимума и локальных свойствах реализаций предгауссовских полей.*, Теор. вероятност. матем. статист. (1981), № 25, 154–164.
4. Yu. V. Kozachenko, O. I. Vasilik, *On the distribution of suprema of* $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ *random processes*, Theory of Stochastic Proc. **4 (20)** (1998), № 1–2, 147–160.
5. М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича*, "Физматгиз", Москва, 1958.
6. Ю. В. Козаченко, Е. И. Островский, *Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских*, Теор. вероятност. матем. статист. (1985), № 32, 42–53.

Механіко-математичний факультет, Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ

Електронна адреса: yvk@mechmat.univ.kiev.ua

Механіко-математичний факультет, Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ

Надійшла 17/10/2000