Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 63, 2000, стор. 112–118

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 63, 2000, pp. 112–118

ІНВАРІАНТНІ МНОЖИНИ СИСТЕМ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ БЕЗ ПІСЛЯДІЇ

УДК 519.21

Г. Л. КУЛІНІЧ, С. В. КУШНІРЕНКО

Резюме. Для неоднорідних систем стохастичних диференціальних рівнянь без післядії вводиться поняття інваріантності поверхонь. Отримані результати, які дають загальні можливості знаходження інваріантних поверхонь СДР. Для певного класу нелінійних систем другого порядку виписаний явний вигляд інваріантних кривих.

1. Вступ

Розглянемо систему стохастичних диференціальних рівнянь (СДР) без післядії [2]

$$d\xi(t) = a(t,\xi(t))\,dt + \sum_{k=1}^{n} b_k(t,\xi(t))\,dw_k(t) + \int_{\mathbf{R}^n} c(t,\xi(t),u)\,\nu(dt,du), \tag{1}$$

де $a(t,x) = (a_i(t,x), i = 1,\dots,n)$, $b_k(t,x) = (b_{ik}(t,x), i = 1,\dots,n)$, $c(t,x,u) = (c_i(t,x,u), i = 1,\dots,n)$ — дійсні невипадкові векторні функції, визначені при $t \ge 0$, $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^n$; $w_k(t)$ — незалежні в сукупності одновимірні вінерівські процеси; $\nu([0,t),A)$ — пуассонівська міра з параметром $t\Pi(A)$, A — борелівська множина із $\mathbf{R}^n$, $\Pi(\mathbf{R}^n) < \infty$; процеси $w_k(t)$ і міра $\nu([0,t),A)$ задані на ймовірностному просторі $(\Omega,\Im,\mathsf{P})$, $\Im_t$ — вимірні при будь-якому $t \ge 0$ і A, а також незалежні між собою, $\Im_t \subset \Im$ — неспадний потік σ-алгебр; $\xi(t_0) = x_0$ ($t_0 \ge 0$, $x_0 = (x_{10}, x_{20},\dots,x_{n0})$).

Припустимо, що коефіцієнти рівняння (1) $a(t,x)$ та $b_k(t,x)$ є неперервними по (t,x), а $c(t,x,u)$ — неперервна по змінних (t,x) по мірі $\Pi(du)$ і задовольняють умови:

1 Існує стала $l > 0$ така, що

$$|a(t,x)|^2 + \sum_{k=1}^{n} |b_k(t,x)|^2 + \int_{\mathbf{R}^n} |c(t,x,u)|^2\,\Pi(du) \le l\left[1 + |x|^2\right].$$

2 Для довільної сталої $N > 0$ існує стала l_N така, що

$$|a(t,x) - a(t,y)|^2 + \sum_{k=1}^{n} |b_k(t,x) - b_k(t,y)|^2 \le l_N |x-y|^2$$

при $t \le N$, $|x| \le N$, $|y| \le N$.

Відомо [3], що умови 1–2 гарантують існування єдиного неперервного справа сильного розв'язку $\xi(t) = (\xi_i(t), i = 1,\dots,n)$ рівняння (1), при цьому $\mathsf{E}\,|\xi(t)|^2 < \infty$ для довільного $t \ge t_0$.

Розглянемо область $Q = [0,\infty) \times D$, де D — певна відкрита область із $\mathbf{R}^n$ і така, що $\Pi\{u : x + c(t,x,u) \notin D\} = 0$ для всіх $(t,x) \in Q$. Нехай $(t_0,x_0) \in Q$ і позначимо

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60H10.

через $\tau_Q(t_0, x_0)$ — момент першого виходу траєкторії розв'язку $\xi(t)$ із області Q, тобто $\tau_Q(t_0, x_0) = \inf\{t \geq t_0 : \xi(t) \notin D\}$, якщо множина тих $t \geq t_0$, для яких $\xi(t) \notin D$ не порожня і $\tau_Q(t_0, x_0) = \infty$ в іншому випадку.

Позначимо через $\Gamma_Q(G)$ множину $\Gamma = \{(t, x) : G(t, x) = C\} \subset Q$, де функція $G(t, x)$ визначена в області Q і має неперервні похідні G'_t, G'_{x_i}, $G''_{x_i x_j}$ в Q, крім того, існують сталі $l > 0$ і $\delta > 0$ такі, що в області Q

$$\int_{\mathbf{R}^n} |G(t, x + c(t, x, u)) - G(t, x)|^{2+\delta}\, \Pi(du) \leq l. \tag{2}$$

Означення. Множина $\Gamma_Q(G)$ називається інваріантною в області Q множиною рівняння (1), якщо для всіх $(t_0, x_0) \in \Gamma_Q(G)$ і всіх $t \geq t_0$:

$$[G(t, \xi(t)) - G(t_0, x_0)]\phi(t) = 0 \quad \text{м.с.},$$

де $\phi(t) = 1$ при $t_0 \leq t < \tau_Q(t_0, x_0)$ і $\phi(t) = 0$ при $t \geq \tau_Q(t_0, x_0)$.

У даній роботі для інваріантності в області Q множини $\Gamma_Q(G)$ рівняння (1) отримані необхідні умови (Теорема 1), необхідні та достатні умови (Теорема 2), достатні умови (Теореми 3, 4). Ці результати дають загальні можливості знаходження інваріантних множин СДР. Для спеціального класу нелінійних систем другого порядку виписаний явний вигляд інваріантних кривих і встановлені необхідні та достатні умови їх інваріантності (Теорема 5).

Для рівняння вигляду (1) при $c(t, x, u) \equiv 0$ аналогічні результати отримані в роботі [4] для однорідних рівнянь, а в роботі [5] для неоднорідних. Явний вигляд інваріантних кривих систем другого порядку СДР вигляду (1) виписаний в роботі [1] для лінійних рівнянь при $c(t, x, u) \equiv 0$, а для спеціального класу нелінійних рівнянь в роботах [6] при $c(t, x, u) \equiv 0$ і [7] при $c(t, x, u) \neq 0$. Крім того, в роботі [6] розроблений метод дослідження поведінки розв'язку СДР на інваріантній кривій.

Надалі будемо дотримуватись таких позначень: $(\cdot\,,\cdot)$ — скалярний добуток;

$$\nabla_x \cdot = \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x_1}, \frac{\partial \cdot}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \cdot}{\partial x_n}\right)$$

— оператор “набла”;

$$LG(t, x) = G'_t(t, x) + \big(\nabla_x G(t, x), a(t, x)\big) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \big(\nabla_x \cdot, b_k(t, x)\big)^2 G(t, x);$$

$$\triangle_G(t, x, u) = G(t, x + c(t, x, u)) - G(t, x);$$

$$\tilde{\nu}([0, t), A) = \nu([0, t), A) - t\Pi(A).$$

2. Загальні теореми про інваріантність

Теорема 1. *Для інваріантності множини $\Gamma_Q(G)$ рівняння* (1) *необхідно, щоб для всіх $(t, x) \in \Gamma_Q(G)$ мали місце рівності*:

$$(\nabla_x G(t, x), b_k(t, x)) = 0, \qquad k = 1, \dots, n; \tag{3}$$

$$LG(t, x) = 0; \tag{4}$$

$$\Pi\{u : \triangle_G(t, x, u) \neq 0\} = 0. \tag{5}$$

Доведення. Нехай множина $\Gamma_Q(G)$ інваріантна в області Q і $(t_0, x_0) \in \Gamma_Q(G)$. Оскільки похідні G'_t, G'_{x_i}, $G''_{x_i x_j}$ неперервні в області Q і в області Q виконується нерівність (2), то при $t_0 \leq t < \tau_Q(t_0, x_0)$ має місце узагальнена формула Іто (див. [2]), згідно з якою

$$G(t, \xi(t)) = G(t_0, x_0) + I_1(t) + I_2(t), \tag{6}$$

де

$$I_1(t) = \int_0^t \left[LG(s, \xi(s)) + \int_{\mathbf{R}^n} \triangle_G(s, \xi(s), u)\, \Pi(du) \right] ds;$$

$$I_2(t) = \sum_{k=1}^n \int_0^t (\nabla_x G(s, \xi(s)), b_k(s, \xi(s)))\, dw_k(s) + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} \triangle_G(s, \xi(s), u)\, \tilde{\nu}(ds, du).$$

Оскільки $(t_0, x_0) \in \Gamma_Q(G)$, то, згідно з рівністю (6), отримаємо, що при всіх $t_0 \le t < \tau_Q(t_0, x_0)$:

$$-I_1(t) = I_2(t). \tag{7}$$

Процес $I_1(t)$ абсолютно неперервний, а процес $I_2(t)$ — локальний мартингал [3]. Тому рівність (7) може мати місце лише у випадку, коли при всіх $t_0 \le t < \tau_Q(t_0, x_0)$:

$$I_1(t) = 0, \qquad I_2(t) = 0. \tag{8}$$

Далі покажемо, що із рівностей (8) випливають умови Теореми 1. Дійсно, використовуючи нерівність (2), легко обгрунтувати неперервність функції

$$\psi(t, x) = LG(t, x) + \int_{\mathbf{R}^n} \triangle_G(t, x, u)\, \Pi(du).$$

Припустимо, що в деякій точці $(t^0, x^0) \in \Gamma_Q(G)$ маємо: $\psi(t^0, x^0) \ne 0$. Нехай $\psi(t^0, x^0) > 0$. Тоді, згідно з неперервністю функції $\psi(t, x)$ і відкритістю області Q, існує деякий δ-окіл $V_\delta(t^0, x^0) \subset Q$ точки (t^0, x^0), в якому $\psi(t, x) > 0$ при $(t, x) \in V_\delta(t^0, x^0)$. Згідно з означенням інваріантності множини $\Gamma_Q(G)$, не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $t_0 = t^0$, $x_0 = x^0$ і позначимо через τ_δ момент першого виходу траєкторій розв'язку $\xi(t)$ із області $V_\delta(t_0, x_0)$.

Отже, при $t_0 \le t < \tau_\delta$ маємо, що $I_1(t) > 0$. Оскільки $\tau_\delta \le \tau_Q(t_0, x_0)$, то ми прийшли до протиріччя, бо згідно з (8): $I_1(t) = 0$ при $t_0 \le t < \tau_Q(t_0, x_0)$. Якщо $\psi(t^0, x^0) < 0$, то міркування проводяться аналогічні. Тому

$$\psi(t, x) = 0 \quad \text{при всіх } (t, x) \in \Gamma_Q(G). \tag{9}$$

Із рівності (8) випливає, що і для характеристики (див. [3])

$$\langle I_2(t) \rangle = \int_0^t \left[\sum_{k=1}^n (\nabla_x G(s, \xi(s)), b_k(s, \xi(s)))^2 + \int_{\mathbf{R}^n} (\triangle_G(s, \xi(s), u))^2 \Pi(du) \right] ds$$

мартингала $I_2(t)$, при всіх $t_0 \le t < \tau_Q(t_0, x_0)$ теж виконується рівність $\langle I_2(t) \rangle = 0$. Далі, аналогічно доведенню рівності (9), отримаємо:

$$\sum_{k=1}^n (\nabla_x G(t, x), b_k(t, x))^2 + \int_{\mathbf{R}^n} (\triangle_G(t, x, u))^2\, \Pi(du) = 0$$

при всіх $(t, x) \in \Gamma_Q(G)$. З цієї рівності і (9) маємо рівності (3)–(5). □

Теорема 2. *Для того, щоб множини $\Gamma_Q(G)$ були інваріантними в області Q множинами рівняння* (1) *при всіх C необхідно і досить, щоб рівності* (3)–(5) *мали місце при всіх $(t, x) \in Q$.*

Доведення. Необхідність умов (3)–(5) випливає із Теореми 1. При доведенні достатності скористаємося рівністю (6), із якої, згідно з умовами Теореми, випливає, що $G(t, \xi(t)) = G(t_0, x_0)$ при $t_0 \le t < \tau_Q(t_0, x_0)$ для всіх $(t_0, x_0) \in Q$. □

Теорема 3. *Для того, щоб множини $\Gamma_Q(G)$ були інваріантними в області Q множинами рівняння* (1) *для певних $C = C_j$, $j = 1, \dots, m$, досить, щоб існували функції $F_i(t,x,y)$, $i = 1,2$, $F_3(t,x,y,u)$, визначені в області $(t,x,y) \in Q \times I$, де $I = \{G(t,x) : (t,x) \in Q\}$, $u \in \mathbf{R}^n$, і такі, що при всіх $(t,x) \in Q$ мають місце рівності:*

$$
\begin{gathered}
LG(t,x) = F_1(t,x,G(t,x)),\\
(\nabla_x G(t,x), b_k(t,x)) = F_2(t,x,G(t,x)), \qquad k = 1,\dots,n,\\
\triangle_G(t,x,u) = F_3(t,x,G(t,x),u) \quad \text{по мірі } \Pi(du),\\
F_i(t,x,C_j) = 0, \quad i = 1,2; \qquad F_3(t,x,C_j,u) = 0 \quad \text{по мірі } \Pi(du),\ j = 1,\dots,m,
\end{gathered}
$$

і, крім того, стохастичне рівняння

$$
\begin{aligned}
d\eta(t) = F_1(t,\xi(t),\eta(t))\,dt + \sqrt{n}F_2(t,\xi(t),\eta(t))\,dw(t)\\
+ \int_{\mathbf{R}^m} F_3(t,\xi(t),\eta(t),u)\,\nu(dt,du)
\end{aligned} \tag{10}
$$

з випадковими коефіцієнтами $F_i(t,\xi(t),y)$, $i = 1,2$, $F_3(t,\xi(t),y,u)$, де $w(t)$ — одновимірний вінерівський процес, незалежний від міри $\nu([0,t),A)$, має єдиний сильний розв'язок $\eta(t)$ при $t_0 \le t < \tau_Q(t_0,x_0)$.

Доведення. Нехай $(t_0,x_0) \in \Gamma_Q(G)$ при $C = C_j$. В рівності (6) скористаємося зображенням (див. [3])

$$
\sum_{k=1}^{n} \int_0^t \big(\nabla_x G(s,\xi(s)), b_k(s,\xi(s))\big)\,dw_k(s) = \sqrt{n}\int_0^t F_2\big(s,\xi(s),G(s,\xi(s))\big)\,dw(s),
$$

де $w(t)$ — одновимірний вінерівський процес, незалежний від міри $\nu([0,t),A)$, і для процесу $\eta(t) = G(t,\xi(t))$, згідно з умовами Теореми, при $t_0 \le t < \tau_Q(G)$ отримаємо рівняння (10), в якому точка $y = C_j$ є стаціонарною точкою. Тому $\eta(t) = C_j$ при всіх $t_0 \le t < \tau_Q(G)$. Отже, множина $\Gamma_Q(G)$ при $C = C_j$ є інваріантною множиною рівняння (1) в області Q. □

Теорема 4. *Для того, щоб множина $\Gamma_Q(G)$ була інваріантною в області Q множиною рівняння* (1) *досить, щоб при всіх $(t,x) \in Q$ виконувались наступні умови:*

1) $G(t,x) \ge C$ $(G(t,x) = C$ *при всіх* $(t,x) \in \Gamma_Q(G))$;
2) $LG(t,x) + \displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} \triangle_G(t,x,u)\,\Pi(du) \le 0$;
3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\nabla_x G(t,x), b_k(t,x))^2 \le l_0[1 + |x|^2]$.

Доведення. Візьмемо довільну точку $(t_0,x_0) \in \Gamma_Q(G)$. Тоді, згідно з формулою (6), маємо, що при $t_0 \le t < \tau_Q(t_0,x_0)$:

$$
G(t,\xi(t)) - C \le I_2(t). \tag{11}
$$

Позначимо через $\tau(t) = \min(t, \tau_Q(t_0,x_0))$. Оскільки $\tau(t)$ — марківський момент, а згідно з умовою 3). Теореми 4, випадкова величина $\langle I_2(\tau(t))\rangle$, де $\langle I_2(t)\rangle$ — характеристика мартингала $I_2(t)$, має скінченне математичне сподівання, то (див. [3]) $\mathsf{E}\, I_2(\tau(t)) = 0$. Отже, враховуючи нерівність (11), маємо, що

$$
\mathsf{E}[G(\tau(t),\xi(\tau(t))) - C] \le 0.
$$

Тобто
$$G\big(\tau(t), \xi(\tau(t))\big) - C = 0 \quad \text{м.с.} \tag{12}$$

Нехай A — множина тих траєкторій процесу $\xi(t)$, для яких $\tau_Q(t_0, x_0) = \infty$, а B — для яких $\tau_Q(t_0, x_0) < \infty$. Оскільки при $\omega \in B$ при деякому t величина $\tau(t)$ стає рівною $\tau_Q(t_0, x_0)$, а процес $\xi(t)$ неперервний справа, то $\xi(\tau(t)) \to \xi(\tau_Q(t_0, x_0))$ при $t \to \infty$, а значить і $G(\tau(t), \xi(\tau(t))) \to G(\tau_Q(t_0, x_0), \xi(\tau_Q(t_0, x_0)))$ при $t \to \infty$. Тому при $\omega \in B$, згідно з (12), маємо, що $G(\tau_Q(t_0, x_0), \xi(\tau_Q(t_0, x_0))) - C = 0$. Оскільки
$$\begin{aligned} G(\tau(t), \xi(\tau(t))) - C &= [a(t, \xi(t)) - C]\mathbb{I}_{\{t<\tau_Q(t_0,x_0)\}} \\ &\quad + [G(\tau_Q(t_0, x_0), \xi(\tau_Q(t_0, x_0))) - C]\mathbb{I}_{\{t\geq\tau_Q(t_0,x_0)\}}, \end{aligned}$$
то $[G(t, \xi(t)) - C]\mathbb{I}_{t<\tau_Q(t_0,x_0)} = 0$. Зрозуміло, що аналогічна рівність виконується і при $\omega \in A$. Отже,
$$[G(t, \xi(t)) - C]\mathbb{I}_{\{t<\tau_Q(t_0,x_0)\}} = 0 \quad \text{м.с.}$$
Із цієї рівності і довільності точки $(t_0, x_0) \in \Gamma_Q(G)$ випливає твердження теореми. □

2. Інваріантні криві для певного класу систем другого порядку

В цьому пункті для системи (1) другого порядку з одним вінерівським процесом, тобто $n = 2$, $b_2(t, x) \equiv 0$, розглянемо такі класи рівнянь:

K_1: $b_1(t, x) = (g_1(t, x)x_1 + g_2(t, x)x_2, -g_2(t, x)x_1 + g_1(t, x)x_2)$,
$c(t, x, u) = (\gamma_1(t, x, u)x_1 + \gamma_2(t, x, u)x_2, -\gamma_2(t, x, u)x_1 + \gamma_1(t, x, u)x_2)$,
$D_1 = (|x| \neq 0)$, $\Pi\{u\colon (1 + \gamma_1(t, x, u))^2 + \gamma_2^2(t, x, u) = 0\} = 0$, $G_1(x) = re^{\alpha\varphi}$, де (r, φ) — полярні координати;

K_2: $b_1(t, x) = (g_1(t, x)x_1, g_2(t, x)x_2)$, $c(t, x, u) = (\gamma_1(t, x, u)x_1, \gamma_2(t, x, u)x_2)$, $D_2 = (x_1 > 0, x_2 > 0)$, $\Pi\{u\colon \gamma_i(t, x, u) \leq -1\} = 0$, $i = 1, 2$, $G_2(x) = x_2x_1^{-\alpha}$;

K_3: $b_1(t, x) = (g_1(t, x)x_1, g_2(t, x)x_1 + g_1(t, x)x_2)$,
$c(t, x, u) = (\gamma_1(t, x, u)x_1, \gamma_2(t, x, u)x_1 + \gamma_1(t, x, u)x_2)$, $D_3 = (x_1 > 0)$,
$\Pi\{u\colon \gamma_1(t, x, u) \leq -1\} = 0$, $G_3(x) = x_2x_1^{-1} - \alpha \ln x_1$,

де $g_i(t, x)$, $\gamma_i(t, x, u)$ — неперервні обмежені функції.

Теорема 5. *Криві $\Gamma_{Q_i}(G_i)$ відповідно для класів K_i, $i = 1, 2, 3$, інваріанті в області Q_i при всіх C тоді і тільки тоді, коли для всіх $(t, x) \in Q_i$ відповідно при $i = 1, 2, 3$ виконуються умови:*

для K_1:

1) $g_1(t, x) = \alpha g_2(t, x)$;

2) $(a(t, x), x) + \alpha(a(t, x), x^{\perp}) = -\dfrac{\alpha^2 + 1}{2}|x|^2 g_2^2(t, x)$, *де* $x^{\perp} = (-x_2, x_1)$;

3) $$\begin{aligned} &\ln\left[(1 + \gamma_1(t, x, u))^2 + \gamma_2^2(t, x, u)\right] \\ &= -2\alpha\Big[\pi\mathbb{I}_{\{1+\gamma_1(t,x,u)<0\}} - \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\gamma_2(t, x, u)\mathbb{I}_{\{1+\gamma_1(t,x,u)=0\}} \\ &\qquad - \arctan\frac{\gamma_2(t, x, u)}{1 + \gamma_1(t, x, u)}\mathbb{I}_{\{1+\gamma_1(t,x,u)\neq0\}}\Big] \quad \textit{по мірі } \Pi(du). \end{aligned}$$

для K_2:

1) $g_2(t, x) = \alpha g_1(t, x)$;

2) $x_1a_2(t, x) - \alpha x_2a_1(t, x) = \dfrac{\alpha(\alpha - 1)}{2}g_1^2(t, x)x_1x_2$;

3) $\gamma_2(t, x, u) = (1 + \gamma_1(t, x, u))^{\alpha} - 1$ *по мірі* $\Pi(du)$.

для K_3:

1) $g_2(t,x) = \alpha g_1(t,x)$;
2) $-(x_2 + \alpha x_1)a_1(t,x) + x_1 a_2(t,x) = \dfrac{\alpha}{2} g_1^2(t,x) x_1^2$;
3) $\gamma_2(t,x,u) = \alpha[1 + \gamma_1(t,x,u)]\ln[1 + \gamma_1(t,x,u)]$ *по мірі* $\Pi(du)$.

Доведення. Для класів K_2, K_3 безпосередньо перевіряється, що відповідно в областях Q_2, Q_3 виконуються умови (3)–(5) Теореми 2. Для класу K_1 використовуються рівняння для процесу $(|\xi(t)|, \varphi(t))$, який вводиться за формулами $\xi_1(t) = |\xi(t)|\cos\varphi(t)$, $\xi_2(t) = |\xi(t)|\sin\varphi(t)$. При $0 < t < \tau = \inf\{t\colon |\xi(t)| = 0\}$ (див. [8]) мають місце рівняння:

$$d|\xi(t)| = \left[\frac{(a,\xi(t))}{|\xi(t)|} + \frac{1}{2}|\xi(t)|g_2^2\right] dt \\ + |\xi(t)|\left[g_1\, dw_1(t) + \int_{\mathbf{R}^2}\left(\sqrt{(1+\gamma_1)^2 + \gamma_2^2} - 1\right)\nu(dt,du)\right],$$

та

$$d\varphi(t) = \left[\frac{(a,\xi^{\perp}(t))}{|\xi(t)|^2} - g_1 g_2\right] dt - g_2\, dw_1(t) \\ + \int_{\mathbf{R}^2}\left[\pi\,\mathbb{I}_{\{1+\gamma_1<0\}} - \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\gamma_2\,\mathbb{I}_{\{1+\gamma_1=0\}} - \arctan\frac{\gamma_2}{(1+\gamma_1)}\mathbb{I}_{\{1+\gamma_1\neq 0\}}\right]\nu(dt,du),$$

де $\xi^{\perp}(t) = (-\xi_2(t), \xi_1(t))$, g_i, γ_i — відповідно функції $g_i(t,\xi(t))$, $\gamma_i(t,\xi(t),u)$, $a = (a_i(t,\xi(t)), i = 1,2)$.

За допомогою цих рівнянь встановлюється, що $dr(t)\exp\{\alpha\varphi(t)\} = 0$ при $0 < t < \tau$ тоді і тільки тоді, коли виконуються умови Теореми 5 для K_1. □

Наслідок. *Легко бачити, що коли виконуються лише умови* 1), 2) *Теореми* 5 *відповідно для* K_i, *то розв'язок* $\xi(t)$ *"дифундує" на поверхнях* $\Gamma_{Q_i}(G_i)$ *і перестрибує із однієї поверхні на іншу лише в моменти* $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$ *стрибків пуассонівського процесу* $\nu([0,t),\mathbf{R}^2)$.

Зауважимо, що достатні умови Теореми 5 приведені у роботі [7].

Далі розглянемо приклад застосувань Теорем 3 і 4. Нехай у рівнянні (1) $n = 2$,

$$a_1(t,x) = \left[-\frac{1}{2}g^2(t,x) + \beta(t)\right]x_1 + q(t,x)x_2,$$
$$a_2(t,x) = \left[-\frac{1}{2}g^2(t,x) + \beta(t)\right]x_2 + q(t,x)x_1,$$
$$b_1(t,x) = (g(t,x)x_2, -g(t,x)x_1),$$
$$b_2(t,x) \equiv 0,$$
$$c(t,x,u) = (-x_1 + x_2, -x_2 - x_1),$$

де $g(t,x)$, $q(t,x)$, $\beta(t)$ — неперервні обмежені функції. Якщо розглянути функцію

$$G(t,x) = |x|^2 - \alpha^2\exp\left\{2\int_0^t \beta(s)\, ds\right\}$$

і область $D = \mathbf{R}^2$, то в цьому випадку виконуються умови Теореми 3 при $F_1(t,x,y) = 2\beta(t)y$, $F_2(t,x,y) \equiv 0$, $F_3(t,x,y) \equiv 0$. Отже, згідно з Теоремою 3, множина

$$\Gamma_Q(G) = \left\{(t,x)\colon |x|^2 - \alpha^2 \exp\left\{2\int_0^t \beta(s)\,ds\right\} = 0\right\},$$

де $Q = [0,\infty) \times \mathbf{R}^2$, є інваріантною множиною рівняння (1), якщо

$$|x_0|^2 = \alpha^2 \exp\left\{2\int_0^{t_0} \beta(s)\,ds\right\},$$

тобто $(t_0, x_0) \in \Gamma_Q(G)$. Легко впевнитися, що функція $G_1(t,x) = G^2(t,x)$ є функцією Ляпунова при $C = 0$ і $\beta(t) \le 0$ в області Q і для неї виконуються умови Теореми 4. Отже, при $\beta(t) \le 0$, згідно з Теоремою 4, отримаємо той самий висновок про інваріантність множини $\Gamma_Q(G)$.

Література

1. В. Г. Бабчук, Г. Л. Кулініч, *Інваріантні множини систем лінійних стохастичних диференціальних рівнянь Іто другого порядку*, Вісник Київського університету, серія математика та механіка **18** (1976), 136–139.
2. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения*, "Наукова думка", Киев, 1968.
3. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения и их применения*, "Наукова думка", Киев, 1982.
4. G. L. Kulinich and O. V. Pereguda, *Phase picture of the diffusion processes with the degenerate diffusion matrices*, Random Oper. and Stoch. Equ. **5** (1997), № 3, 203–216.
5. Г. Л. Кулініч, О. В. Перегуда, *Якісний аналіз систем стохастичних диференціальних рівнянь Іто*, Укр. матем. ж. **52** (2000), № 9, 1251–1256.
6. Г. Л. Кулініч, *Про інваріантні множини систем другого порядку стохастичних диференціальних рівнянь Іто*, Доповіді НАН України **10** (1997), 35–38.
7. Г. Л. Кулініч, *Про інваріантні множини систем другого порядку стохастичних диференціальних рівнянь без післядії*, Тези доповідей Міжнародної наукової конференції "Розробка та застосування математичних методів у науково-технічних дослідженнях", 8–10 жовтня 1998 р., м. Львів, Вісник "Прикладна, т. 1, 1998, стор. 126–127.
8. Г. Л. Кулініч, *Якісний аналіз поведінки гармонічного осцилятора під впливом випадкових збурень параметрів процесами типу "білого і дробового шумів"*, Теор. ймовір. матем. статист. **58** (1998), 81–91.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Надійшла 22/11/2000