Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 63, 2000, стор. 119–124

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 63, 2000, pp. 119–124

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИПАДКОВОЮ ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

УДК 519.21

М. О. ПЕРЕСТЮК, О. М. СТАНЖИЦЬКИЙ

Резюме. Для системи диференціальних рівнянь з випадковою імпульсною дією отримано необхідні та достатні умови існування її періодичних розв'язків.

Розглянемо T-періодичну систему диференціальних рівнянь з випадковою правою частиною і випадковою імпульсною дією у фіксовані моменти часу t_i вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \xi(t)), \qquad t \neq t_i, \ \Delta x\big|_{t=t_i} = x(t_i + 0) - x(t_i - 0) = I_i(x, \eta_i), \tag{1}$$

де $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^n$, $i \in \mathbf{Z}$. Відносно функцій $f(t,x,y)$, $I_i(x,z)$ ($y \in \mathbf{R}^k$, $z \in \mathbf{R}^l$) і моментів t_i будемо вважати, що f періодична по t з періодом T і при деякому натуральному p виконуються рівності

$$I_{i+p}(x,z) = I_i(x,z), \qquad t_{i+p} = t_i + T. \tag{2}$$

Нехай $\xi(t)$ — стохастично неперервний випадковий процес, η_i — послідовність випадкових величин, задані на деякому ймовірносному просторі (Ω, F, P), що приймають значення відповідно в $\mathbf{R}^k$, $\mathbf{R}^l$. Будемо вважати також, що $\xi(t)$ і η_i — періодично зв'язані, тобто для всіх $s_1, \dots s_m \in \mathbf{R}$, $l_1, \dots l_r \in \mathbf{Z}$, $A_1, \dots A_m \in B(\mathbf{R}^k)$, $B_1, \dots B_r \in B(\mathbf{R}^l)$ де $B(\mathbf{R}^k)$ та $B(\mathbf{R}^l)$ — борелівські σ-алгебри на $\mathbf{R}^k$ та $\mathbf{R}^l$

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\{\xi(s_1 + T) \in A_1, \dots, \xi(s_m + T) \in A_m, \eta_{l_1+p} \in B_1, \dots, \eta_{l_r+p} \in B_r\} \\ &\quad = \mathsf{P}\{\xi(s_1) \in A_1, \dots, \xi(s_m) \in A_m, \eta_{l_1} \in B_1, \dots, \eta_{l_r} \in B_r\}.\end{aligned}$$

Відносно функцій $f(t,x,y)$, $I_i(x,z)$ будемо також вважати, щоб вони були вимірними за сукупністю своїх змінних, а також виконані умови:

1) Існує випадковий локально інтегровний на $\mathbf{R}$ процес $B(t)$ і послідовність випадкових величин $L_i(\omega)$, що

$$\begin{gathered}|f(x_1, \xi(t)) - f(x_2, \xi(t))| \leq B(t)|x_1 - x_2|, \\ |I_i(x_1, \eta_i) - I_i(x_2, \eta_i)| \leq L_i|x_1 - x_2|\end{gathered}$$

для всіх $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$;

2) Для довільного $T \in \mathbf{R}$

$$\mathsf{P}\left\{ \int_0^T |f(t, 0, \xi(t))|\, dt < \infty \right\} = 1;$$

3) Відображення A_i: $A_i x = x + I_i(x,z)$ для кожного $z \in \mathbf{R}^l$ визначене на всьому просторі $\mathbf{R}^n$ і областю його значень є весь простір $\mathbf{R}^n$.

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 34C25, 34C29, 34F05.

Якщо під розв'язком системи (1) розуміти випадковий процес $x(t,\omega)$, що з ймовірністю 1 на інтервалах $[t_i, t_{i+1})$ задовільняє першому із співвідношень (1), а при $t = t_i$ умовам стрибка(другому із співвідношень (1)) то, як випливає із результатів [1], стор. 26, і [2], стор. 10–13, неважко отримати, що розв'язок задачі Коші $x(t, t_0, x_0(\omega))$ системи (1) існує, єдиний при $t \in \mathbf{R}$, для довільного $t_0 \in \mathbf{R}$, і довільної випадкової величини $x_0(\omega)$ зі значеннями із $\mathbf{R}^n$ і представляє собою кусково абсолютно-неперервний випадковий процес з точками розриву t_i.

В [1], стор. 76, для диференціальних рівнянь типу (1) при відсутності імпульсної дії, отримано умови існування періодичних і періодично зв'язаних з $\xi(t)$ його розв'язків. Для слабко нелінійних систем в [3], з використанням функції Гріна для лінійної частини, також отримані достатні умови існування періодичних розв'язків, відмінні від умов з [1]. Результати з [1], були узагальнені на стохастичні рівняння Іто, а також на рівняння з запізненням [4].

Мета даної роботи — отримати аналогічні результати для рівнянь типу (1).

Для T-періодичних систем типу (1) має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай для системи* (1) *виконані вказані вище умови* 1)–3). *Тоді для існування T-періодичного і періодично зв'язоного з $\xi(t)$ і η_i її розв'язку необхідно і достатньо, щоб ця система мала розв'язок $y(t)$, який рівномірно за $k = 1, 2, \dots$ (або $k = -1, -2, \dots$) задовольняє умову*

$$\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k} \mathsf{P}\{|y(iT)| > r\} \to 0 \tag{3}$$

при $r \to \infty$.

Доведення. Доведення даної теореми ідейно схоже з доведенням аналогічного факту для систем без імпульсів з вище згаданої роботи [1]. Воно зводиться до побудови початкового розподілу для періодичного розв'язку. Така побудова проводиться шляхом випадкового зсуву аргументу з наступним усередненням отриманих ймовірнісних мір і подальшим використанням критерію компактності Скорохода [5] в просторі функцій без розривів другого роду. □

Зауваження 1. Умови теореми 1 очевидно виконані, коли система (1) має обмежений за ймовірністю розв'язок $x(t)$ такий, що

$$\sup_{t\geq 0} \mathsf{P}\{|x(t)| > r\} \to 0, \qquad r \to \infty.$$

Зауваження 2. Нехай в системі (1) функції f і I_i не залежать від випадковості, тобто система (1) є детермінованою, T-періодичною системою з імпульсною дією вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad t \neq t_i,\ \Delta x\big|_{t=t_i} = I_i(x). \tag{4}$$

Якщо ця система має хоча б один обмежений розв'язок, то як випливає з теореми 1, вона має і T-періодичний в ймовірносному сенсі розв'язок із взагалі кажучи, випадковою початковою умовою. Це, звичайно, не гарантує існування періодичного детермінованого розв'язку, оскільки періодичний випадковий процес може і не мати періодичних траєкторій.

Зауваження 3. Розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь і розв'язки відповідної імпульсної системи за рахунок імпульсної дії можуть якісно дуже відрізнятися. Приведемо відповідні приклади.

Приклад 1. Розглянемо скалярне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = 1.$$

Всі його розв'язки мають вигляд $x(t) = t + x_0(\omega)$ і монотонно з ймовірністю 1 прямують до нескінченності при зростанні t, а отже не є обмеженими за ймовірністю. Тому дане рівняння не має періодичних в розглядуваному сенсі розв'зків.

Однак, уже імпульсна система

$$\frac{dx}{dt} = 1, \qquad t \neq i, \ \Delta x\big|_{t=i} = -1,$$

де i — ціле, має обмежений розв'язок $x = \{t\}$, а тому має, згідно зауваження 2, і періодичний в ймовірносному сенсі розв'язок.

Приклад 2. Розглянемо скалярне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

Всі його розв'язки сталі, а отже періодичні з довільним періодом. Разом з тим імпульсна система

$$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad t \neq i, \ \Delta x\big|_{t=i} = 1,$$

не має жодного періодичного розв'язку, оскільки всі його розв'язки необмежено і монотонно зростають з ймовірністю 1.

Зауваження 4. Умови теореми 1 хоча і є необхідними і достатніми, але не досить ефективними. Одначе, для частинного випадку, а саме коли система (1) має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \sigma(t,x)\xi(t), \qquad t \neq t_i, \ \Delta x\big|_{t=t_i} = I_i(x) + J_i(x)\eta_i, \tag{5}$$

можна дати ефективні умови існування періодичних розв'язків в термінах функцій Ляпунова для укороченої детермінованої системи

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad t \neq t_i, \ \Delta x\big|_{t=t_i} = I_i(x). \tag{6}$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай в області $x \in \mathbf{R}^n$, $t \geq t_0$ (для деякого $t_0 \in \mathbf{R}$) існує невід'ємна функція $V(t,x)$, що абсолютно неперервна по t і задовільняє глобальну умову Ліпшиця по x, причому виконані умови 1)–3), а також:*

а) $V_r = \inf_{|x|>r, t>t_0} V(t,x) \to \infty$, $r \to \infty$,

б) $d^0V/dt \leq -C_1 V$, $V(t_i, x + I_i(x)) - V(t_i, x) \leq -C_2 V(t_i, x)$, (*тут* d^0V/dt — *похідна функції* V *в силу першого рівняння системи* (6))

в) $\|\sigma(t,x)\| + \|J_i(x)\| \leq C_3$, *де* C_1, C_2, C_3 — *додатні сталі. Нехай* f *та* σ — T*-періодичні по* t *функції.*

Тоді система (5) *має* T*-періодичний у вузькому сенсі розв'язок для довільного стохастично неперервного процесу* $\xi(t)$ *і послідовності* η_i *таких, що вони* T*-періодично зв'язані і* $M|\xi(t)| + M|\eta_i| < \infty$.

Доведення. Твердження теореми випливає із того, що як слідує із роботи [6], в умовах теореми 2 система (5) має обмежений за ймовірністю розв'язок. Доведення тоді слідує із зауваження 1. □

Використаємо теорему 1, також для дослідження існування періодичних розв'язків у деяких класів систем з випадковою імпульсною дією, а саме систем з малим випадковим збуренням.

Встановимо зв'язок між компактним інваріантним многовидом детермінорованої автономної системи і періодичними розв'язками збуреної системи, отриманої з детермінованої в результаті малого неперервного і імпульсного випадкового збурення. Як відомо, для імпульсних систем не вірна теорема про стійкість при постійно діючих збуреннях, т.б. з асимптотичної стійкості положення рівноваги незбуреної системи, ще не слідує близькість до нього розв'язку збуреної системи. Тому, для отримання змістовних результатів, від інваріантної множини будемо вимагати більш сильної ніж асимптотична, экспоненціальної стійкості.

Нехай в $\mathbf{R}^n$ задана автономна система

$$\frac{dx}{dt} = F(x). \tag{7}$$

Припустимо, що система (7) має експоненціально стійкий компактний інваріантний многовид S.

Розглянемо збурену періодичну імпульсну систему, отриману з (7) додаванням малого випадкового імпульсного і неперервного збурень

$$\frac{dx}{dt} = F(x) + \varepsilon g(t, x, \xi(t)), \qquad t \neq t_i, \ \Delta x\big|_{t=t_i} = \varepsilon I_i(x, \eta_i), \tag{8}$$

де $\varepsilon > 0$ — малий параметр, функції $g(t, x, y)$ та $I_i(x, z)$, задані при $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^k$, $z \in \mathbf{R}^l$, задовільняють разом з випадковим процесом $\xi(t)$, послідовністю випадкових величин η_i і моментами імпульсної дії умовам періодичності, вказаним вище. Нехай також система (8) задовільняе умовам існування і потраекторної единості розв'язків в $\mathbf{R}^n$. Позначимо через

$$a(t, \omega) = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |g(t, x, \xi(t))|, \qquad b_i(\omega) = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |I_i(x, \eta_i(\omega))|.$$

Припустимо також, що випадковий процес $a(t)$ і послідовність випадкових величин b_i мають скінченні математичні сподівання і існує $C > 0$, що

$$\sup_{t \in [0,\ T]} Ma(t) + \sup_{i=1,\dots,p} Mb_i \le C.$$

Будемо також вважати, что функції F, g, I_i ліпшецеві за x в $\mathbf{R}^n$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай інваріантна множина системи* (7) *експоненціально стійка в цілому. Тоді система* (8) *при достатньо малих значеннях параметра* ε *має* T*-періодичний, періодично зв'язаний з* $\xi(t)$ *і* η_i *розв'язок* $x(t)$, *що задовольняє умові*

$$\sup_{t \in [0,\ T]} M\rho(x(t), S) < \delta(\varepsilon), \qquad \delta(\varepsilon) \to 0, \ \varepsilon \to 0. \tag{9}$$

Доведення. Оскільки інваріантна множина S системи (7) експоненціально стійка в цілому, то для розв'язку $y(t, x_0)$ цієї системи виконана оцінка

$$\rho(y(t, x_0), S) \le K \exp\{-\gamma(t - \tau)\} \rho(y(\tau, x_0), S), \tag{10}$$

для довільних $t \ge \tau \ge 0$, з незалежними від t, τ, x_0 додатними сталими γ, K. Виберемо число $A > 0$, кратне періоду T ($A = mT$) настільки великим, щоб

$$K \exp\{-\gamma A\} < \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Знову позначимо $x(t, x_0)$ — розв'язок системи (8). Оцінимо на відрізку $[0, A]$ в середньому відстань від цього розв'язку до множини S. Маємо

$$
\begin{aligned}
M|x(t,x_0) - y(t,x_0)| &\le \int_0^t LM|x(s,x_0) - y(s,x_0)|\,ds \\
&\quad + \varepsilon \int_0^A M|g(s, x(s,x_0), \xi(s)|\,ds + \sum_{0<t_i<A} M|I_i(x(t_i,x_0), \eta_i)| \\
&\le L\int_0^t (|x(s,x_0) - y(s,x_0)|\,ds + \varepsilon \int_0^A Ma(t)\,dt + \sum_{0<t_i<A} Mb_i \\
&\le L\int_0^t (|x(s,x_0) - y(s,x_0)|\,ds + \varepsilon(AC + mpC).
\end{aligned}
$$

Звідси отримаємо оцінку

$$
M|x(t,x_0) - y(t,x_0)| \le \varepsilon(AC + mpC)\exp\{LA\}, \tag{12}
$$

справедливу для $t \in [0, A]$.

Тому для всіх $t \in [0, A]$ маємо

$$
\begin{aligned}
M\rho(x(t,x_0), S) &\le \rho(y(t,x_0), S) + \varepsilon(AC + mpC)\exp\{LA\} \\
&\le K\exp\{-\gamma t\}\rho(x_0, S) + \varepsilon(AC + mpC)\exp\{LA\}.
\end{aligned}
$$

Якщо вимагати, щоб $\rho(x_0, S) < \nu(\varepsilon)$, де $\nu(\varepsilon)$ — достатньо мала монотонно залежна від ε величина, отримаємо остаточно, що

$$
M\rho(x(t,x_0), S) < \delta(\varepsilon) \tag{14}
$$

для деякої функції $\delta \to 0$, $\varepsilon \to 0$ і $t \in [0, A]$.

Для оцінки поведінки розв'язку $x(t, x_0)$ на $[A, 2A]$ розглянемо розв'язок системи (7) $y_1(t)$ такий, що

$$
y_1(A) = x(A, x_0).
$$

Аналогічно попередньому, враховуючи (10), отримаємо

$$
\begin{aligned}
M\rho(x(t,x_0), S) &\le \rho(y_1(t), S) + \varepsilon(AC + mpC)\exp\{LA\} \\
&\le K\exp\{-\gamma(t-A)\}M\rho(y_1(A), S) + \varepsilon(AC + mpC)\exp\{LA\} \\
&\le K\exp\{-\gamma(t-A)\}\delta(\varepsilon) + \varepsilon(AC + mpC)\exp\{LA\} \\
&\le (K+1)\delta(\varepsilon).
\end{aligned}
$$

А при $t = 2A$, враховуючи (11), маємо

$$
M\rho(x(t,x_0), S) \le \left(\frac{1}{2} + 1\right)\delta(\varepsilon).
$$

На відрізку $[2A, 3A]$ розглянемо розв'язок $y_2(t)$ системи (7) такий, що $y_2(2A) = x(2A, x_0)$. Тоді маємо для $t \in [2A, 3A]$

$$
\begin{aligned}
M\rho(x(t,x_0), S) &\le K\exp\{-\gamma(t-2A)\}M\rho(y_2(2A), S) + \varepsilon(AC + mpC) \\
&\le \exp\{LA\} \le K\left(\frac{1}{2} + 1\right)\delta(\varepsilon) + \delta(\varepsilon) \\
&= \left(K\left(\frac{1}{2} + 1\right) + 1\right)\delta(\varepsilon).
\end{aligned}
$$

А при $t = 3A$, аналогічно отримаємо

$$M\rho(x(3A, x_0), S) \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\delta(\varepsilon)+\delta(\varepsilon) = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\delta(\varepsilon).$$

Продовжуючи цей процес на відрізку $[(k-1)A,\ kA]$ будемо мати

$$M\rho(x(t, x_0), S) \le \left(K\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right)+1\right)\delta(\varepsilon), \tag{15}$$

а при $t = kA$

$$M\rho(x(kA, x_0), S) \le \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right)\delta(\varepsilon). \tag{16}$$

З (15) і (16) тоді випливає існування додатньої сталої C_1, що для всіх $t \ge 0$

$$M\rho(x(t, x_0), S) \le C_1\delta(\varepsilon). \tag{17}$$

Із формули (17) та нерівності Чебишева випливає тоді виконання для $x(t, x_0)$ умови (3), а тому і існування $x(t)$-періодичного і періодично зв'язаного з $\xi(t)$ і η_i розв'язку системи (8). Будуючи початкове значення цього розв'язку, прийомом, описаним в [1], неважко бачити, що $M\rho(x(0), S)$ можна зробити як завгодно малим, вимагаючи достатньої малості ε і $\nu(\varepsilon)$ (тут $x(0)$ — початкове значення періодичного розв'язку). Проводячи для нього на $[0, T]$ оцінки, аналогічні (12) та (13), переконуємося в скінченності $M\rho(x(t), S)$ і справедливости оцінки типу (14).

Теорема доведена. □

Зауваження. Теорема 3 є в деякому сенсі аналогом другої теореми М. М. Боголюбова, що стверджує існування в околі стійкого многовиду незбуреної системи періодичного розв'язку збуреної системи.

Література

1. Р. З. Хасьминский, *Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайном возмущении их параметров*, "Наука", Москва, 1969.
2. A. M. Samoilenko and M. O. Perestyuk, *Impulsive differential equations*, World Scientific, Sindapore–New Jersey–London–Hong Kong, 1995.
3. А. Я. Дороговцев, *Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированых и стохастических динамических систем*, "Вища школа", Киев, 1992.
4. В. Б. Колмановский, *Стационарные решения уравнений с запаздыванием*, Проблемы передачи информации **3** (1967), № 1, 64–72.
5. А. В. Скороход, *Исследования по теории случайных процессов*, Издательство Киевского университета, Киев, 1961.
6. А. А. Мосейко, *Про необмежену продовжуваність розв'язків систем з випадковою імпульсною дією*, Нелінійні коливання (1998), № 1, 102–106.

Механіко-математичний факультет, Київський університет ім. Т. Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ 01033, Україна

Механіко-математичний факультет, Київський університет ім. Т. Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ 01033, Україна

Надійшла 20/09/2000