Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 63, 2000, стор. 125–131

Teor. Ǐmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 63, 2000, pp. 125–131

# НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ МАКСИМУМА ОТРАЖЕННОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ СО СНОСОМ

УДК 519.21

Г. ПЕШКИР И А. Н. ШИРЯЕВ

Резюме. Пусть $\beta = (\beta_t)_{t\geq 0}$ — единственное сильное решение уравнения

$$d\beta_t = -\mu\,\mathrm{sign}(\beta_t)\,dt + dB_t,$$

для которого $\beta_0 = 0$, где $\mu > 0$ и $B = (B_t)_{t\geq 0}$ — стандартное броуновское движение. Известно, что $|\beta| = (|\beta_t|)_{t\geq 0}$ является отраженным броуновским движением со сносом $-\mu$. Используя это представление, мы показываем, что существуют абсолютные константы $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, такие, что

$$c_1\,\mathsf{E}\,(H_\mu(\tau)) \leq \mathsf{E}\left(\max_{0\leq t\leq\tau}|\beta_t|\right) \leq c_2\,\mathsf{E}\,(H_\mu(\tau))$$

для всех моментов остановки $\tau$ для $\beta$, где $H_\mu(x) = F_\mu^{-1}(x)$ — обращение отображения $F_\mu(x) = (e^{2\mu x} - 2\mu x - 1)/2\mu^2$. Кроме этого мы показываем, что

$$\mathsf{E}\left(\max_{0\leq t\leq\tau}|\beta_t|\right) \leq G_\mu\,(\mathsf{E}(\tau))$$

для всех моментов остановки $\tau$ для $\beta$, где $G_\mu(x) = \inf_{c>0}(cx+(1/2\mu)\log(1+\mu/c))$. Оба неравенства имеют хорошо известные аналоги для броуновского движения (получаемые при $\mu \downarrow 0$). Метод доказательства основывается на принципе мажорации Ленгларта, исчислении Ито и техники моментов остановки.

## 1. Введение

Согласно классическому определению теории марковских процессов, процесс $X = (X_t)_{t\geq 0}$ называется *отраженным броуновским движением со сносом* $\lambda \in \mathbf{R}$, если $X$ — неотрицательный диффузионный процесс Маркова, отвечающий инфинитезимальному оператору $L_X$, который действует на пространстве функций $f\colon [0,\infty) \to \mathbf{R}$ из $C^2$, которые удовлетворяют $f'(0+) = 0$ и действуют в соответствии с правилом:

$$(L_X f)(x) = \lambda f'(x) + \frac{1}{2}f''(x) \tag{1.1}$$

(см., например, [4]). Если дополнительно $X_0 = x$ для такого процесса и некоторого фиксированного $x \in \mathbf{R}$ , то обычно записывают $X \sim RBM_x(\lambda)$.

Если $\lambda = 0$, то известно, что такой процесс можно представить в виде

$$X_t = |x + B_t|, \tag{1.2}$$

где $B = (B_t)_{t\geq 0}$ — стандартное броуновское движение (см., например, [4] или [7]).

---

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60J65, 60E15; Secondary 60J60, 60G40.

*Key words and phrases.* Reflected Brownian motion with drift, maximal inequality, Lenglart's domination principle, the Burkholder–Gundy inequality, Doob's inequality, optimal stopping.

Supported by the Danish National Research Foundation.

Для случая общего $\lambda \in \mathbf{R}$ только недавно доказано (см. [3]), что соотвествующий аналог (1.2) имеет вид:

$$X_t = |\beta_t|, \tag{1.3}$$

где $\beta = (\beta_t)_{t \geq 0}$ — единственное сильное решение скачкообразного уравнения:

$$d\beta_t = \lambda \operatorname{sign}(\beta_t)\, dt + dB_t \tag{1.4}$$

с $\beta_0 = x$. Как и раньше, $X \sim RBM_x(\lambda)$ и поэтому каждое отраженное броуновское движение со сносом можно реализовать как модуль скачкообразного процесса $\beta$. Это представление полезно во многих отношениях, поскольку позволяет использовать методы и результаты теории стохастических уравнений и стохастическое исчисление (например, формулу Ито–Танаки).

В этой заметке мы демонстрируем этот подход при доказательстве двух неравенств для отраженного броуновского движения *со сносом*, которые дополняют хорошо известные неравенства для броуновского движения *без сноса*. Первое из этих неравенств — это *неравенство Буркхолдера–Ганди* [1], в котором утверждается, что

$$c_1\, \mathsf{E}\left(\sqrt{\tau}\right) \leq \mathsf{E}\left(\max_{0 \leq t \leq \tau} |B_t|\right) \leq c_2\, \mathsf{E}\left(\sqrt{\tau}\right) \tag{1.5}$$

для всех моментов остановки $\tau$ для $B$ (см. теорему 2.1). Второе неравенство — это хорошо известное неравенство типа Дуба для броуновского движения, согласно которому

$$\mathsf{E}\left(\max_{0 \leq t \leq \tau} |B_t|\right) \leq \sqrt{2}\sqrt{\mathsf{E}(\tau)} \tag{1.6}$$

для всех моментов остановки $\tau$ для $B$ (см. теорему 2.4). Это неравенство было получено независимо несколькими авторами, причем известно, что константа $\sqrt{2}$ является наилучшей из возможных (см. [2]).

## 2. Результаты и доказательства

Сначала мы получим аналог неравенства Буркхолдера–Ганди (1.5). Для этого мы определим функцию $F_\mu$ на $\mathbf{R}_+$, полагая

$$F_\mu(x) = \frac{e^{2\mu x} - 2\mu x - 1}{2\mu^2} \tag{2.1}$$

для $x \geq 0$. Тогда $x \mapsto F_\mu(x)$ строго возрастает на $\mathbf{R}_+$. Мы обозначаем

$$H_\mu(x) = F_\mu^{-1}(x) \tag{2.2}$$

обращение для отображения $x \geq 0$ (см. замечания 2.3 ниже).

**Теорема 2.1.** *Пусть $X = (X_t)_{t \geq 0}$ — отраженное броуновское движение со сносом $-\mu$, такое, что $X_0 = 0$, где $\mu > 0$ фиксировано. Тогда имеет место следующее неравенство*:

$$c_1\, \mathsf{E}\left(H_\mu(\tau)\right) \leq \mathsf{E}\left(\max_{0 \leq t \leq \tau} X_t\right) \leq c_2\, \mathsf{E}\left(H_\mu(\tau)\right) \tag{2.3}$$

*для всех моментов остановки $\tau$ для $X$, где $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ — некоторые абсолютные константы.*

*Доказательство.* Мы представим доказательство, основанное на следующем принципе мажорации Ленгларта [5] (см. также [7], стр. 155–156).

**Лемма 2.2.** *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией; $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ — некоторый адаптированный к $(\mathcal{F}_t)$ неотрицательный непрерывный процесс; $A = (A_t)_{t\geq 0}$ — адаптированный к $(\mathcal{F}_t)$ возрастающий непрерывный процесс, такой, что $A_0 = 0$; $H\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ — возрастающая непрерывная функция, для которой $H(0) = 0$. Предположим, что*

$$\mathsf{E}(Z_\tau) \leq \mathsf{E}(A_\tau) \tag{2.4}$$

*для всех ограниченных моментов остановки $\tau$ относительно $(\mathcal{F}_t)$, таких, что процесс $\left(Z_{t\wedge\tau}\right)_{t\geq 0}$ является ограниченным. Тогда*

$$\mathsf{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} H(Z_t)\right) \leq \mathsf{E}\left(\widetilde{H}(A_\tau)\right) \tag{2.5}$$

*для всех моментов остановки $\tau$ относительно $(\mathcal{F}_t)$, где*

$$\widetilde{H}(x) = x\int_x^\infty \frac{1}{s}\,dH(s) + 2H(x) \tag{2.6}$$

*для всех $x \geq 0$.*

*Доказательство.* Согласно теореме Фубини

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} H(Z_t)\right) &= \mathsf{E}\left(H\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} Z_t\right)\right) = \mathsf{E}\left(\int_0^\infty \mathbb{I}_{\{\sup_{0\leq t\leq\tau} Z_t \geq s\}}\,dH(s)\right)\\ &\leq \int_0^\infty \left(\mathsf{P}\left\{\sup_{0\leq t\leq\tau} Z_t \geq s, A_\tau \leq s\right\} + \mathsf{P}\{A_\tau > s\}\right) dH(s),\end{aligned} \tag{2.7}$$

поскольку отображение $s \mapsto H(s)$ монотонно возрастает и непрерывно. Рассмотрим моменты остановки

$$\tau_1 = \inf\{t \geq 0 \mid Z_t \geq s\}\tau_2 = \inf\{t \geq 0 \mid A_t \geq s\}. \tag{2.8}$$

Из неравенства Маркова и (2.4) вытекает, что

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0\leq t\leq\tau} Z_t \geq s, A_\tau \leq s\right\} \leq \mathsf{P}\{\tau_1 \leq \tau, \tau_2 \geq \tau\} \leq \mathsf{P}\{Z_{\tau_1\wedge\tau_2\wedge\tau} \geq s\} \leq \frac{1}{s}\,\mathsf{E}\left(A_{\tau_1\wedge\tau_2\wedge\tau}\right)$$

какое бы ни было ограниченное $\tau$. Из (2.7) и (2.9) мы делаем вывод, что

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} H(Z_t)\right) &\leq \int_0^\infty \left(\frac{1}{s}\,\mathsf{E}\left(A_\tau \mathbb{I}_{\{A_\tau\leq s\}}\right) + 2\mathsf{P}\{A_\tau > s\}\right) dH(s)\\ &= \mathsf{E}\left(A_\tau \int_{A_\tau}^\infty \frac{1}{s}\,dH(s)\right) + 2\,\mathsf{E}(H(A_\tau)) = \mathsf{E}\left(\widetilde{H}(A_\tau)\right)\end{aligned} \tag{2.10}$$

для всех ограниченных $\tau$. Заметим теперь, что $x \mapsto \widetilde{H}(x)$ возрастает и перейдем к пределу при $k \to \infty$, чтобы доказать результат для произвольного момента остановки $\tau$, используя ограниченные $\tau \wedge k$. Это заканчивает доказательство леммы. □

Как уже доказано в (1.3) и (1.4), процесс $X$ можно представить в виде $X_t = |\beta_t|$, где $\beta = (\beta_t)_{t\geq 0}$ — решение уравнения

$$d\beta_t = -\mu\,\mathrm{sign}(\beta_t)\,dt + dB_t \tag{2.11}$$

при $\beta_0 = 0$. Инфинитезимальный оператор $L_X$ процесса $X$ определен в (1.1) при $\lambda = -\mu$.

Продолжим определенное в (2.1) отображение $F_\mu$ на $\mathbf{R}_-$, полагая $F_\mu(x) = F_\mu(-x)$ для $x < 0$. Заметим, что $x \mapsto F_\mu(x)$ — четное отображение, для которого $L_X(F_\mu) = 1$

на $\mathbf{R}$ при $F_\mu(0) = 0$. Кроме того, поскольку $x \mapsto F_\mu(x)$ — отображение из $C^2$, то формулу Ито можно применить к $F_\mu(\beta_t)$, что дает:

$$F_\mu(X_t) = F_\mu(|\beta_t|) = F_\mu(\beta_t) = \int_0^t (L_X(F_\mu))(\beta_s)\,ds + \int_0^t F'_\mu(\beta_s)\,dB_s = t + M_t, \quad (2.12)$$

где $M = (M_t)_{t\geq 0}$ — непрерывный локальный мартингал, $M_t = \int_0^t F'_\mu(\beta_s)\,dB_s$.

Пусть $\tau$ — ограниченный момент остановки, такой, что $(F_\mu(X_{t\wedge\tau}))_{t\geq 0}$ является ограниченным. Переходя к последовательности локальных мартингалов, если это необходимо, мы получаем из (2.12), что

$$\mathsf{E}(F_\mu(X_\tau)) = \mathsf{E}(\tau) \quad (2.13)$$

согласно теореме из [7].

Элементарные вычисления, основанные на правиле Лопиталя, показывают, что

$$\sup_{x>0}\left(\frac{x}{H_\mu(x)}\int_x^\infty \frac{dH_\mu(s)}{s}\right) = 1 \quad (2.14)$$

для всех $\mu > 0$. Согласно определению (2.6) это влечет

$$\widetilde{H}_\mu(x) \leq 3H_\mu(x) \quad (2.15)$$

для всех $x \geq 0$. Поэтому доказательство можно закончить в два шага.

**Шаг 1.** Полагая $Z_t = F_\mu(X_t)$ и $A_t = t$, мы видим из (2.13), что все условия леммы 2.2 выполнены и поэтому мы получаем из (2.5) и (2.15), что

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left(\max_{0\leq t\leq\tau} X_t\right) &= \mathsf{E}\left(\max_{0\leq t\leq\tau} H_\mu(Z_t)\right) \leq \mathsf{E}\left(\widetilde{H}_\mu(A_\tau)\right)\\ &\leq 3\,\mathsf{E}(H_\mu(A_\tau)) = 3\,\mathsf{E}(H_\mu(\tau))\end{aligned} \quad (2.16)$$

для всех моментов остановки $\tau$ для $X$. Это и доказывает неравенство в правой части (2.3).

С другой стороны, полагая $Z_t = t$ и $A_t = \max_{0\leq s\leq t} F_\mu(X_s)$, мы получаем из (2.13), что выполнены все условия леммы 2.2 и поэтому (2.5) и (2.15) влекут, что

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(H_\mu(\tau)) &= \mathsf{E}\left(\max_{0\leq t\leq\tau} H_\mu(Z_t)\right) \leq \mathsf{E}\left(\widetilde{H}_\mu(A_\tau)\right)\\ &\leq 3\,\mathsf{E}\left(H_\mu(A_\tau)\right) = 3\,\mathsf{E}\left(\max_{0\leq t\leq\tau} X_t\right)\end{aligned} \quad (2.17)$$

для всех моментов остановки $\tau$ для $X$. Это и доказывает неравенство в левой части (2.3). Доказательство теоремы закончено. □

*Замечания 2.3.* 1. Понятно, что отображение $x \mapsto F_\mu(x)$ — выпукло на $\mathbf{R}_+$ и следовательно $x \mapsto H_\mu(x)$ — вогнутое отображение на $\mathbf{R}_+$. Применяя неравенство Иенсена в (2.3), получаем:

$$\mathsf{E}\left(\max_{0\leq t\leq\tau} X_t\right) \leq c_2 H_\mu(\mathsf{E}(\tau)) \quad (2.18)$$

для всех моментов остановки $\tau$ для $X$.

2. Далее, ввиду (2.13) из соотношения (2.18) вытекает следующая оценка типа Дуба:

$$\mathsf{E}\left(\max_{0\leq t\leq\tau} X_t\right) \leq c_2 H_\mu(\mathsf{E}(F_\mu(X_\tau))), \quad (2.19)$$

справедливая для всех моментов остановки $\tau$ для $X$, таких, что $\mathsf{E}(\tau) < \infty$.

3. Можно легко проверить, что $F_\mu(x) \to x^2$ при $\mu \downarrow 0$ и поэтому

$$\lim_{\mu \downarrow 0} H_\mu(x) = \sqrt{x} \tag{2.20}$$

для всех $x \geq 0$. Переходя к пределу в (2.3) при $\mu \downarrow 0$, мы доказываем (1.5). Точно таким же образом мы доказываем, что (2.18) влечет (1.6) с константой $c_2 = 3$ в правой части.

4. Используя соотношения $(2\mu x)^k/(2\mu^2 k!) \leq F_\mu(x) \leq (e^{2\mu x} - 1)/(2\mu^2)$, мы легко показываем, что

$$\frac{1}{2\mu} \log\left(1 + 2\mu^2 x\right) \leq H_\mu(x) \leq \frac{k/2}{(2\mu)^{1-2/k}} x^{1/k} \tag{2.21}$$

для всех $x \geq 0$ и всех $k \geq 2$. Оценка в левой части (2.21) точнее при больших $x$, а оценка в правой части (2.21) точнее при малых $x$.

**Шаг 2.** Получим теперь аналог неравенства типа Дуба (1.6). Заметим, что хотя (2.18) и является такой оценкой, в пределе она не дает наилучшую константу.

В следующей теореме мы устраняем этот недостаток.

**Теорема 2.4.** 1. *Пусть $X = (X_t)_{t \geq 0}$ — отраженное броуновское движение со сносом $-\mu$, такое, что $X_0 = 0$, где $\mu > 0$ — фиксировано. Тогда справедливо следующее неравенство:*

$$\mathsf{E}\left(\max_{0 \leq t \leq \tau} X_t\right) \leq \inf_{c > 0}\left(c\,\mathsf{E}(\tau) + \frac{1}{2\mu}\log\left(1 + \frac{\mu}{c}\right)\right) \tag{2.22}$$

*для всех моментов остановки $\tau$ для $X$.*

*Более того, справедливы следующие неравенства:*

$$\mathsf{E}\left(\max_{0 \leq t \leq \tau} X_t\right) \leq \sqrt{\frac{1}{2}\,\mathsf{E}(\tau)} + \frac{1}{2\mu}\log\left(1 + \mu\sqrt{2\,\mathsf{E}(\tau)}\right), \tag{2.23}$$

$$\mathsf{E}\left(\max_{0 \leq t \leq \tau} X_t\right) \leq \frac{1}{2\mu}\left(1 + \log\left(1 + 2\mu^2\,\mathsf{E}(\tau)\right)\right) \tag{2.24}$$

*для всех моментов остановки $\tau$ для $X$. Неравенство (2.23) точнее для малых $\mu$ (полагая $\mu \downarrow 0$ в (2.23), мы получаем (1.6)), а неравенство (2.24) точнее при больших $\mu$ (полагая $\mu \downarrow 0$ в (2.24), доказываем, что правая часть стремится к нулю).*

*Доказательство.* Укажем только на основные моменты доказательства, а по поводу деталей — отсылаем к работам [2] (теорема 3) и [6] (следствие 3.2).

Из (1.3) и (1.4) вытекает, что процесс $X$ можно представить в виде $X_t = |\beta_t|$, где $\beta = (\beta_t)_{t \geq 0}$ — решение (2.11) при $\beta_0 = x \geq 0$. Положим $S_t = (\max_{0 \leq r \leq t} X_r) \vee s$ для $s \geq x$ и рассмотрим задачу оптимальной остановки:

$$V_*(x, s) = \sup_\tau \mathsf{E}_{x,s}(S_\tau - c\tau), \tag{2.25}$$

где $X_0 = x$ и $S_0 = 0$ для $P_{x,s}$. Супремум в (2.25) берется по всем моментам остановки $\tau$ для $X$, для которых $\mathsf{E}_{x,s}(\tau) < \infty$, а константа $c > 0$ — фиксирована.

Эта задача общей теории оптимальных моментов остановки для процессов Маркова, которая приводит к такой задаче со свободными концами:

$$(L_X V_*)(x, s) = c, \qquad g_*(s) < x < s, \tag{2.26}$$

$$\left.\frac{\partial V_*}{\partial s}(x, s)\right|_{x = s-} = 0 \quad \text{нормальное отражение,} \tag{2.27}$$

$$\left.V_*(x, s)\right|_{x = g_*(s)+} = s \quad \text{моментальная остановка,} \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,s)\Big|_{x=g_*(s)+} = 0 \quad \text{гладкое достижение,} \tag{2.29}$$

где $s \mapsto g_*(s)$ — оптимальная граница остановки (которую необходимо найти). Поскольку $X$ — неотрицательная диффузия и $0$ — граничная (регулярная) точка моментального отражения, то оптимальной в (2.25) будет такой момент остановки:

$$\tau_* = \inf\{t > 0 \colon S_t \geq s_*, X_t \leq g_*(S_t)\}, \tag{2.30}$$

где $s_* \geq 0$ удовлетворяет условию $g_*(s_*) = 0$.

Решение (2.26)–(2.29) выражается в виде

$$V_*(x,s) = s + c\int_{g_*(s)}^{x} \big(L(x) - L(y)\big)\, m(dy) \tag{2.31}$$

для $0 \leq g_*(s) \leq x \leq s$, где оптимальная граница $s \mapsto g_*(s)$ является *максимальным* решением (нелинейного) дифференциального уравнения первого порядка

$$g'(s) = \frac{L'(g(s))}{2c\big(L(s) - L(g(s))\big)} \tag{2.32}$$

расположенным ниже диагонали в $\mathbf{R}^2_+$. Будем говорить, что $L = L(x)$ — это *функция масштаба* $X$, а $m = m(dx)$ — *мера скоростей* $X$. Из (2.11) мы получаем

$$L(x) = \frac{e^{2\mu x} - 1}{2\mu}, \qquad x \geq 0, \tag{2.33}$$

$$m(dx) = 2e^{-2\mu x}\, dx. \tag{2.34}$$

Свойство строгой марковости влечет $V_*(x,s) = V_*(s_*,s_*) - c\,\mathsf{E}_{x,s}(\tau_{s_*})$ для $0 \leq x \leq s \leq s_*$, где $\tau_{s_*} = \inf\{t > 0 \colon X_t = s_*\}$, что ведет к такому явному выражению:

$$V_*(x,s) = s_* + c\int_0^x \big(L(x) - L(y)\big)\, m(dy) \tag{2.35}$$

для $0 \leq x \leq s \leq s_*$.

Подставляя (2.33) в (2.32), мы легко получаем, что линейная функция $g_*(s) = s - s_*$ является максимальным решением (2.32), где $s_* > 0$ задается в явном виде:

$$s_* = \frac{1}{2\mu}\log\Big(1 + \frac{\mu}{c}\Big). \tag{2.36}$$

Следовательно $g_*(s) = s - s_*$ является оптимальной границей остановки, то есть момент остановки (2.30) оптимален для (2.25). Из (2.35) видим, что

$$V_*(0,0) = s_*. \tag{2.37}$$

Поэтому (2.36) влечет (2.22), т.е. первая часть доказательства закончена.

Чтобы доказать оставшиеся утверждения, сначала заметим, что для каждого момента остановки $\tau$ для $X$, такого, что $\mathsf{E}(\tau) < \infty$, инфимум в (2.22) достигается в

$$c_* = c_*(\mu, \mathsf{E}(\tau)) = -\frac{\mu}{2} + \sqrt{\frac{1}{2\,\mathsf{E}(\tau)} + \mu^2}. \tag{2.38}$$

Подставляя это выражение в правую часть (2.22), получаем точное неравенство (равенство достигается на моменте остановки (2.30) для каждого фиксированного $\mu > 0$). Кроме того, полагая в этом неравенстве $\mu \downarrow 0$, мы получаем (1.6) с $\sqrt{2}$ в правой стороне.

К сожалению правая сторона неравенства, полученного подстановкой (2.37) в (2.22), представляет собой сложную функцию от $\mathsf{E}(\tau)$. Упрощения можно добиться, если заметить, что

$$c_*(\mu, \mathsf{E}(\tau)) \to \frac{1}{\sqrt{2\,\mathsf{E}(\tau)}}, \qquad \mu \downarrow 0, \tag{2.39}$$

$$\mu c_*(\mu, \mathsf{E}(\tau)) \to \frac{1}{2\,\mathsf{E}(\tau)}, \qquad \mu \uparrow \infty. \tag{2.40}$$

Это свидетельствует, что полагая $c = 1/\sqrt{2\,\mathsf{E}(\tau)}$ в (2.22), мы получаем точное неравенство для малых $\mu$, а полагая $c = 1/(2\mu\,\mathsf{E}(\tau))$ в (2.22), мы получаем точное неравенство для больших $\mu$. Поскольку эти два неравенства совпадают с неравенствами (2.23) и (2.24), то доказательство закончено. □

## Литература


1. D. L. Burkholder and R. F. Gundy, *Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales*, Acta Math. **124** (1970), 249–304.
2. L. E. Dubins, L. A. Shepp, and A. N. Shiryaev, *Optimal stopping rules and maximal inequalities for Bessel processes*, Theory Probab. Appl. **38** (1993), 226–261.
3. S. E. Graverson and A. Shiryaev, *An extension of P. Lévy's distributional properties to the case of a Brownian motion with drift*, Research Report, т. 22, Centre Math. Phys. Stochastics, Aarhus, 1998.
4. N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland, Amsterdam, 1981.
5. E. Lenglart, *Relation de domination entre deux processus Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **13** (1977), 171–179.
6. G. Peskir, *Optimal stopping of the maximum process: The maximality principle*, Research Report, vol. 377, Dept. Theoret. Statist., Aarhus, 1997 ; Ann. Probab. **26** (1998), 1614–1640.
7. D. Revuz and M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.



Department of Mathematics, University of Zagreb, Bijenicka 30, 10000, Zagreb, Croatia

*Текущий адрес*: Institute of Mathematics, University of Aarhus, Ny Munkegade, 8000 Aarhus, Denmark

*Электронный адрес*: goran@imf.au.dk

Steklov Mathematical Institute, Gubkina str. 8, 117966, Moscow, Russia

*Электронный адрес*: shiryaev@mi.ras.ru