Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 63, 2000, стор. 132–137

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 63, 2000, pp. 132–137

ПРО КАНОНИЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ХІДА–КРАМЕРА ДЛЯ НЕПАРНОГО СТУПЕНЯ ВІНЕРІВСЬКОГО ПРОЦЕСУ

УДК 519.21

П. М. ПЕРУНІЧІЧ ТА Т. К. ПОГАНІ

Резюме. В цій статті ми знаходимо канонічне представлення процесу $W^{2\kappa+1}(t)$, де κ — фіксоване натуральне число, а $\{W(t): t \geq 0\}$ — стандартний вінерів процес. Ми використовуємо підхід Леві [5, 6]. Ми також уточнюємо та покращуємо деякі результати Леві.

1. Вступ

Припустимо, що $\{X(t): t \geq 0\}$ — неперервний у середньому квадратичному, сепарабельний L_2-процес з нульовим середнім. Нехай $\mathcal{H}(X;t)$ — замкнений в L_2 лінійний простір, утворений $X(u)$, $0 \leq u \leq t$, тобто $\mathcal{H}(X;t) = \overline{\text{sp}}\{X(u): 0 \leq u \leq t\}$. Припустимо, що процес $X(t)$ є регулярним, тобто $\bigcap_{t \geq 0} H(X;t) = \{0\}$. Відомо, (див., наприклад, [1], [3]), що $X(t)$ можна подати у наступному вигляді

$$X(t) = \sum_{i=1}^{i=N} \int_0^t g_i(t,u)\, \mathcal{B}_i(du),$$

де $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ — взаємно ортогональні випадкові міри. Число $N \leq \infty$ називається *кратністю* процеса $X(t)$, якщо таке представлення неможливе для будь-якого $N_1 < N$. Зокрема, для $N = 1$ ми маємо:

$$X(t) = \int_0^t g(t,u)\, \mathcal{B}(du), \tag{1}$$

де $g(t,u)$ — ядерна функція. Якщо

$$\mathcal{H}(X;t) = \mathcal{H}(\mathcal{B};t), \tag{2}$$

то представлення (1) називається *канонічним представленням Хіда–Крамера* [7]. Леві в роботі [6] вивчав умови, за яких кратність процесу дорівнює одиниці.

2. Постановка задачі

Нехай $\{W(t): t \geq 0\}$ — стандартний вінерівський процес, а $X(t) = W^n(t)$, де $n = 2\kappa + 1 \in \mathbf{N}$ — фіксоване. Нашою метою є знаходження канонічного представлення для $X(t)$ у формі (1), оскільки кратність $X(t)$ дорівнює одиниці (див. [7]). Ми також припустимо, що коваріаційною функцією процесу $\mathcal{B}(t)$ є $K_{\mathcal{B}}(t,s) = t \wedge s$, що не накладає додаткових обмежень.

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60G07, 60G15.

Key words and phrases. Hida–Cramér representation, Wiener process, Goursat kernel.

Використовуючи поліноми Ерміта $H_n(x)$, легко отримати, що

$$X(t) = W^n(t) = n! \sum_l \frac{t^{(n-l)/2}}{2^{(n-l)/2}\,((n-l)/2)!} H_l(W(t)),$$

де підсумовування ведеться за $0 \le l \le n$, такими, що $n - l$ — парне. Оскільки поліноми $H_l(W(t))$ та $H_m(W(t))$ є ортогональними мартингалами при $l \neq m$, $X(t)$ має коваріаційну функцію

$$K_X(t,s) = \sum_{l=0}^{l=\kappa} a(n, n-l) s^l t^{n-l} \quad \text{для } s \ge t, \tag{3}$$

де

$$a(n, n-l) = \frac{n!}{(2l)!!} \sum_{j=0}^{j=[n/2]-l} \frac{(-1)^j (2n-2l-2j-1)!!}{(2j)!!\,(n-2l-2j)!}. \tag{4}$$

Твердження 1.

$$a(n,m) = \binom{n}{m} 2^{-n} \int_0^1 \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} (x^2-1)^m \, dx.$$

Доведення цього факту є елементарним і тому ми його опускаємо.

3. Ядра Гурса

Розглянемо процес (1). Якщо ядро $g(t,u)$ можна виразити у вигляді

$$g(t,u) = \sum_{l=1}^{l=\kappa} \varphi_l(t) \psi_l(u), \tag{5}$$

то воно називається *ядром Гурса*. Число κ називається порядком такого ядра, якщо не існує $\kappa' < \kappa$, для якого виконується таке ж представлення для функції. Зрозуміло, що якщо $g(t,u)$ — ядро Гурса порядку κ, то коваріаційна функція $K_X(t,s)$ також є ядром Гурса порядку $\kappa'' \le \kappa$, [6].

Ядро $g(t,u)$ називається канонічним, якщо представлення (1) є канонічним. Оскільки коваріаційна функція процесу $X(t) = W^{2\kappa+1}(t)$ має вигляд (3), ми спробуємо знайти канонічне ядро Гурса у вигляді

$$g(t,u) = \sum_{l=0}^{l=\kappa} \alpha_l u^{\kappa-l} t^l, \tag{6}$$

де $\alpha := (\alpha_0, \ldots, \alpha_\kappa) \in \mathbf{R}^{\kappa+1}$. З (6) та (3) випливає, що

$$\alpha_l \sum_{m=0}^{m=\kappa} \frac{\alpha_m}{n-l-m} = a(n, n-l), \qquad 0 \le l \le \kappa. \tag{7}$$

Систему позначимо через (Δ_1). У наступному розділі ми обговорюємо систему (Δ_1)

4. Система

Відомо, що (див., [5, 6]) система (Δ_1) має $2^{\kappa+1}$ розв'язків. Існує тільки 2^κ істотньо різних розв'язків (розв'язки $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_\kappa)$ and $-\alpha := (-\alpha_0, \ldots, -\alpha_\kappa)$ відрізняються тільки знаком; але це не є важливим для представлення (1)).

Твердження 2. *Система* (Δ_1) *має єдиний додатний розв'язок в області*

$$R' = \prod_{l=1}^{l=\kappa} \left(0, \sqrt{\min\{(n-2l)a(n,n-l), \gamma_l\}}\right),$$

де

$$\gamma_l := \frac{(n-l)(n-2l)a(n,n-l)}{(n-2l)\beta_l - l}, \qquad \beta_l := \sum_{j=1;j\neq l}^{j=\kappa} \frac{j}{n-l-j}.$$

Доведення. Оскільки $a(n,l) = 0$ для $0 \le l \le \kappa$ (пор. з результатом твердження 1), можна показати, що $(\alpha_0 + \cdots + \alpha_\kappa)^2 = n^2 \cdot (2n-3)!!$. З іншого боку,

$$\alpha_l^2 < (n-2l)a(n,n-l), \qquad 0 \le l \le \kappa.$$

Знайдемо додатний розв'язок α у множині

$$R := \prod_{l=0}^{l=\kappa} (0, (n-2l)a(n,n-l)). \tag{8}$$

В цьому випадку $\alpha_0 + \cdots + \alpha_\kappa = n\sqrt{(2n-3)!!}$. Покладемо

$$\alpha_0 = n\sqrt{(2n-3)!!} - \sum_{l=1}^{l=\kappa} \alpha_l$$

для всіх рівняннь системи (Δ_1) за виключенням першого. Таким чином ми отримуємо перетворену систему (Δ_2):

$$\frac{l\alpha_l^2}{n-2l} + \left(n\sqrt{(2n-3)!!} + \sum_{m=1;m\neq l}^{m=\kappa} \frac{m\alpha_m}{n-l-m} \right) \alpha_l - (n-l)a(n,n-l) = 0, \tag{9}$$

де $1 \le l \le \kappa$. Суму в (9) позначимо Σ. Розв'язуючи ці рівняння як квадратичні за α_l, можна отримати таку систему:

$$\begin{aligned} \alpha_l &= \phi_l(\alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}, \alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_\kappa) \\ &= \frac{n-2l}{2l} \Bigg\{ -(n\sqrt{(2n-3)!!} + \Sigma) \\ &\qquad + \sqrt{(n\sqrt{(2n-3)!!} + \Sigma)^2 + 4\frac{(n-l)la(n,n-l)}{n-2l}} \Bigg\}, \qquad 1 \le l \le \kappa. \end{aligned} \tag{10}$$

Якобіан системи (10) $J(\alpha) = (\partial\phi_l/\partial\alpha_j)_{\kappa\times\kappa}$ складається з таких елементів

$$\frac{\partial\phi_l}{\partial\alpha_j} = \frac{j(n-2l)}{n-l-j} \cdot \frac{(\delta_{lj}-1)\alpha_l^2}{(n-2l)(n-l)a(n,n-l) + l\alpha_l^2}. \tag{11}$$

Відомо, що ітераційна процедура (10) збігається до єдиного розв'язку в його околі тоді і тільки тоді, коли спектральний радіус якобіану $J(\alpha)$ є меншим за 1 (див. [4]). Тепер залишається визначити спектр матриці $J(\alpha)$. У загальному випадку він є досить складним. З іншого боку, теорема Гершгоріна дає непогану оцінку спектрума квадаратної матриці. Перш за все ми доводимо такий результат.

Теорема 1. (Гершгорін [2], [4]). *Спектр квадратної матриці $M = (m_{ij})_{p\times p}$ належить об'єднанню дисків*

$$\mathcal{C} = \bigcup_{l=1}^{l=p}\{z\colon |z - m_{ll}| \le r_l\}, \qquad r_l := \sum_{j=1;j\neq l}^{j=p} |m_{jl}|.$$

В нашому випадку ми отримуємо

$$r_l = \sum_{j=1;j\neq l}^{j=\kappa} \left|\frac{\partial \phi_l}{\partial \alpha_j}\right| = \frac{(n-2l)\alpha_l^2}{(n-2l)(n-l)a(n,n-l)+l a_l^2} \sum_{j=1;j\neq l}^{j=\kappa} \frac{j}{n-l-j}. \tag{12}$$

Таким чином, достатньо знайти підмножину множини R, означеної в (8), таку, що $r_l < 1$ для $1 \le l \le \kappa$, оскільки всі діагональні елементи $J(\alpha)$ дорівнюють нулю. Звідси ми отримуємо, що множина C належить одиничному диску, а спектральний радіус $J(\alpha)$ не перевищує 1. Зрозуміло, що необхідною підмножиною, що містить α при $r_l < 1$, є множина R', означена в твердженні 2. Це і завершує доведення. □

Приклад 1. Для $\kappa = 1$ ми маємо

$$\alpha_0 = \frac{3}{2}\left(3\sqrt{3} - \sqrt{11}\right), \qquad \alpha_1 = \frac{3}{2}\left(\sqrt{11} - \sqrt{3}\right).$$

Оскільки додатний розв'язок є єдиним.

Приклад 2. Для $\kappa = 2$ система (Δ_2) має такий вигляд

$$\begin{aligned} &\alpha_1^2 + (3\alpha_2 + 15\sqrt{105})\alpha_1 - 7200 = 0,\\ &4\alpha_2^2 + (\alpha_2 + 10\sqrt{105})\alpha_1 - 1350 = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

причому

$$J(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3\alpha_1^2}{7200+\alpha_1^2} \\ \frac{\alpha_2^2}{1350+4\alpha_2^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для $\alpha \in (0.30\sqrt{2}\,) \times (0.15)$ власні числа $J(\alpha)$ менші за одиницю.

5. Канонічне представлення

Спочатку ми наведемо результат Леві.

Теорема 2. (Леві [6]). *Ядро $g(t,u)$ є канонічним тоді і тільки тоді, коли не існує функції $\xi(t)$, такої, що*

$$\int_0^t g(t,u)\,d\xi(u) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \tag{14}$$

а інтеграл Хелінгера $\mathcal{I}_\xi$ функції $\xi(\cdot)$ є скінченним, тобто

$$\mathcal{I}_\xi = \int_0^t \frac{(d\xi(u))^2}{du} \in (0,\infty). \tag{15}$$

Нехай $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_\kappa)$ — розв'язок (Δ_1). Ми шукаємо функцію $\xi(t)$, яка задовольняє (15). Зауважимо, що (15) є лінійним однорідним рівнянням першого порядку типу Вольтера. Ядро $g(t,u)$ має вигляд (6), де всі коефіцієнти α_j є додатними, $0 \le j \le \kappa$. Використовуючи відому формулу

$$\frac{d}{dt}\int_0^t g(t,u)\,d\xi(u) = g(t,t)\xi(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} g(t,u)\xi(u)\,du$$

κ разів, ми зводимо рівняння (15) до диференціального рівняння Ейлера

$$\sum_{l=0}^{l=\kappa}\left[\sum_{j=0}^{j=l-1}\binom{\kappa-j-1}{l-j}(\kappa-j)\dots(\kappa-l+1)s_j+s_l\right]t^{\kappa-l}\xi^{(\kappa-l)}(t)=0, \tag{16}$$

в якому

$$s_j:=\sum_{l=j}^{l=\kappa}l(l-1)\dots(l-j+1)\alpha_l, \qquad 0\le j\le\kappa.$$

Наприклад, $s_0=n\sqrt{(2n-3)!!}$, $s_\kappa=\kappa!\,\alpha_\kappa$. Для $\xi(t)=t^r$ ми отримуємо характеристичне рівняння для (16):

$$b_0r(r-1)\cdot(r-\kappa+1)+b_1r(r-1)\cdots(r-\kappa+2)+\cdots+b_{\kappa-1}r+b_\kappa=0, \tag{17}$$

де $b_l:=b_l(s_0,\dots,s_\kappa)$ — коефіцієнт при $t^{\kappa-l}\xi^{(\kappa-l)}(t)$ в (16). Таким чином

$$\begin{aligned}\alpha_0r(r+1)\cdots(r+\kappa-1)+\alpha_1r(r+1)\cdots(r+\kappa-2)(r+\kappa)+\cdots\\ +\alpha_\kappa(r+1)(r+2)\cdots(r+\kappa)=0.\end{aligned} \tag{18}$$

Оскільки всі α_j додатні, то зрозуміло, що $0,-1,\dots,-\kappa$ не є розв'язками (18). Таким чином рівняння

$$\frac{\alpha_0}{r+\kappa}+\frac{\alpha_1}{r+\kappa-1}+\cdots+\frac{\alpha_\kappa}{r}=0 \tag{19}$$

є еквівалентним до (18). Рівняння (19) має κ розв'язків $r_1,\dots,r_\kappa$ (так само, як і (18)). В цьому випадку загальним розв'язком рівняння Ейлера (16) є

$$\xi(t)=c_1t^{r_1}+\cdots+c_\kappa t^{t_\kappa}. \tag{20}$$

Оскільки ми шукаємо функцію $\xi(t)$, для якої інтеграл Хелінгера (15) розбігається, то з (20) очевидно, що в цьому випадку $r_l\le\frac{1}{2}$, $1\le l\le\kappa$.

Твердження 3. *Поліном* (18) *є стійким та має тільки дійсні корені.*

Доведення. Ліву частину (19) позначимо $f(r)$. Зрозуміло, що рівняння $f(r)=0$ не має дійсних додатних розв'язків. Дійсно, $f(r)\to\pm\infty$ при $r\to-l\pm$ для всіх $0\le l\le\kappa$ й тому $f(r)<0$ для $r<-\kappa$, звідки випливає, що на кожному інтервалі $(-l,-l+1)$ функція $f(r)$ має тільки один корень, $1\le l\le\kappa$.

Тому рівняння (18) має κ розв'язків, а $f(r)$ має κ нулів у лівій півплощині. Доведення закінчено. □

Наслідок 1. *Розв'язок системи є канонічним ядром Гурса в* $\mathbf{R}_+^{\kappa+1}$, *якщо виконується умова*

$$r_l<0, \qquad 1\le l\le\kappa,$$

замість умови Леві [5]:

$$\Re\{r_l\}\le\frac{1}{2}, \qquad 1\le l\le\kappa.$$

Таким чином ми довели такий результат.

Теорема 3. *Представлення*

$$X(t)=W^n(t)=\sum_{l=0}^{l=\kappa}\alpha_lt^l\int_0^t u^{\kappa-l}\,\mathcal{B}(du) \tag{21}$$

є канонічним, якщо $\alpha=(\alpha_0,\dots,\alpha_\kappa)$ *є розв'язком системи* (Δ_1), *причому* $n=2\kappa+1$, $\kappa\in\mathbf{N}$.

Приклад 3. Нехай $\kappa = 1$. Через $\mathcal{P}_t$ позначимо проекцію на підпростір $\mathcal{H}(X;t)$, де $X(t) = W^3(t)$. Маємо для $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{P}_t\{W^3(t+\varepsilon)\} = W^3(t) + \varepsilon\alpha_1 t\mathcal{B}(t),$$

де α_1 означене в прикладі 1. Неважко переконатися, що

$$\mathcal{B}(t) = \pi t^{\varrho} \int_0^t u^{\sigma} W^3(du),$$

де

$$\pi = \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1} = \frac{\sqrt{3}}{9}, \qquad \varrho = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0 + \alpha_1} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{11}{3}}\right),$$
$$\sigma = -\frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \alpha_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{11}{3}} - 3\right),$$

відповідно. Таким чином ми маємо

$$P_t\{W^3(t+\varepsilon)\} = W^3(t) + \frac{\varepsilon}{2}\left(\sqrt{\frac{11}{3}} - 1\right) t^{\left(3-\sqrt{11/3}\right)/2} \int_0^t u^{\left(\sqrt{11/3}-3\right)/2} W^3(du).$$

Зауваження 1. Рівняння Ейлера (16) можна отримати за допомогою повторного інтегрування, як показано Леві в [6].

Література

1. H. Cramér, *Stochastic processes as curves in Hilbert space*, Theory Probab. Appl. **9** (1964), № 2, 169–179.
2. S. A. Geršgorin, *Über die Abgrenzung die Eigenwerte einer Matrix*, Izvestija AN SSSR, Ser. mat. **7** (1931), 749–754.
3. T. Hida, *Canonical representations of Gaussian processes and their applications*, Mem. College Sci. Univ. Kyoto, **A33** (1960), № 1, 109–155.
4. G. Kurepa, *Higher algebra*, т. II, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1971. (Serbo-Croatian)
5. P. Lévy, *Sur une classe de courbes de l'espace de Hilbert et sur une équation intégrale non-linéaire*, Ann. Sci. Ecole Normale Supérieure **73** (1956), 121–156.
6. P. Lévy, *Stochastic processes and Brownian motion*, "Nauka", Moscow, 1972. (Russian)
7. L. D. Pitt, *Hida-Cramér multiplicity theory for multiple Markov processes and Goursat representations*, Nagoya Math. J. **57** (1975), 199–228.

Department of Maritime Studies, University of Rijeka, Rijeka, Croatia
Електронна адреса: poganj@brod.pfri.hr

Надійшла 20/05/2000