Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 63, 2000, стор. 145–155

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 63, 2000, pp. 145–155

ПРО РОЗПОДІЛ ЧАСІВ ПЕРЕБУВАННЯ ПРОЦЕСУ БРОУНІВСЬКОГО РУХУ НА ПУЧКУ ПРОМЕНІВ

УДК 519.21

Г. М. ШЕВЧЕНКО

Резюме. Для броунівського руху на сукупності променів зі спільним кінцем знайдено спільний розподіл часів, які процес проводить на цих променях. Розглянуто випадки із затримкою в спільному кінці променів і без неї.

0. Вступ

У роботі розглядається броунівський рух на пучку променів із спільним кінцем, коефіцієнти дифузії на яких можуть відрізнятись (але на кожному промені коефіцієнт сталий). Мотивацією було узагальнення на такі процеси закону арксинуса. Дана задача розглядалась для двох променів у роботі [2] (це також можна знайти в [3]). Загальніші процеси на графах з неоднорідними ребрами побудовано в статті [5], присвяченій дослідженню граничної поведінки таких процесів.

У першій частині роботи розглядається процес без затримки в нулі, сформульовано основні принципи побудови таких процесів, для функціоналу типу спільної характеристичної функції (який ми називатимемо просто характеристичною функцією) згаданих часів перебування записане інтегральне рівняння, з якого із застосуванням апарату операційного числення знайдено спільний розподіл цих часів. Те саме пророблене в другій частині, але з тією різницею, що тепер процес затримується в нулі, тому до часів перебування на променях додається час перебування в нулі.

1. Броунівський рух на пучку променів

1.1. Характеристики процесу. Нехай дано набір $S = \bigcup_{i=1}^{k} S_i$ променів $S_1, S_2, \dots, S_k$ зі спільним кінцем O, а також два набори додатніх чисел $b_1, b_2, \dots, b_k$ і $q_1, q_2, \dots, q_k$, $\sum_{j=1}^{k} q_j = 1$. Неперервна функція $\varphi(x)$ на S — це набір функцій $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ (відповідно на $S_1, S_2, \dots, S_k$), які задовольняють умову $\varphi_1(0+) = \varphi_2(0+) = \cdots = \varphi_k(0+)$. Ми будуємо вінерівський процес $x(t)$, який має на j-му промені коефіцієнт дифузії b_j, а в точці O "вибирає" j-й промінь з імовірністю q_j. Покладемо

$$u(t, x, \varphi) = T_t \varphi(x) = \mathsf{E}_x\, \varphi(x(t)).$$

Інфінітезимальний оператор вінерівського процесу з коефіцієнтом дифузії b_j є

$$\frac{b_j}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

тому

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}(t, x, \varphi) = \frac{b_j}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}(t, x, \varphi), \qquad x \in S_j \setminus \{0\}\,,\ t > 0. \tag{1}$$

В точці O повинна виконуватись умова неперервності

$$u_1(t, 0+, \varphi) = u_2(t, 0+, \varphi) = \cdots = u_k(t, 0+, \varphi).$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* 60J95.

Той факт, що частинка в точці O вибирає j-й промінь з імовірністю q_j, можна математично записати у вигляді умови[1]

$$\sum_{j=1}^{k} q_j \frac{\partial u_j}{\partial x}(t, 0+, \varphi) = 0. \tag{2}$$

Відповідно до загальної теорії при $t \to 0+$ повинна виконуватись умова $T_t \to I$, де I — тотожний оператор, тому

$$\lim_{t\to 0+} u(t, x, \varphi) = \varphi(x).$$

Перейшовши до перетворення Лапласа за змінною t (тобто до резольвенти)

$$\tilde{u}(p, x, \varphi) = \int_0^\infty e^{-pt} u(t, x, \varphi)\, dt, \qquad p > 0,$$

отримаємо для нього з (1) звичайне диференціальне рівняння; розв'язуючи його і враховуючи умови в точці O, матимемо для $x \in S_j$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_j(p, x, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2pb_j}} \int_0^\infty \Bigg\{ &\exp\left\{ -|x-y|\sqrt{\frac{2p}{b_j}} \right\} \\ &- \exp\left\{ -(x+y)\sqrt{\frac{2p}{b_j}} \right\} \Bigg\} \varphi_j(y)\, dy \\ + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{k} \frac{q_j}{b_j} \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^\infty &\exp\left\{ -\sqrt{2p}\left(\frac{x}{\sqrt{b_j}} + \frac{y}{\sqrt{b_i}} \right) \right\} \varphi_i(y)\, dy.\end{aligned} \tag{3}$$

Звідси можна знайти саму функцію $u(t, x, \varphi)$:

$$\begin{aligned}u_j(t, x, \varphi) = \frac{2}{D} \sum_{i=1}^{k} \frac{q_i}{\sqrt{b_i}} \int_0^\infty \exp\left\{ -\frac{1}{2t}\left(\frac{x}{\sqrt{b_j}} + \frac{y}{\sqrt{b_i}} \right)^2 \right\} \varphi_i(y) \frac{dy}{\sqrt{2\pi b_i t}} \\ + \int_0^\infty \left[\exp\left\{ -\frac{(y-x)^2}{2tb_j} \right\} - \exp\left\{ -\frac{(y+x)^2}{2tb_j} \right\} \right] \varphi_j(y) \frac{dy}{\sqrt{2\pi b_j t}},\end{aligned} \tag{4}$$

де $D = \sum_{i=1}^{k} q_i/\sqrt{b_i}$. Отже, маємо такий вираз для щільності перехідної ймовірності:

$$\begin{aligned}G(t, x, y) = \frac{2q_i}{Db_i\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{ -\frac{1}{2t}\left(\frac{x}{\sqrt{b_j}} + \frac{y}{\sqrt{b_i}} \right)^2 \right\} \\ + \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{2\pi b_j t}} \left[\exp\left\{ -\frac{(y-x)^2}{2tb_j} \right\} - \exp\left\{ -\frac{(y+x)^2}{2tb_j} \right\} \right], \qquad x \in S_j,\ y \in S_i.\end{aligned} \tag{5}$$

Виходячи з єдиності обмеженого розв'язку (1), неважко вивести рівняння Колмогорова–Чепмена для $G(t, x, y)$ і перевірити виконання умови $\int_S G(t, x, y)\, dy = 1$. Щоб довести існування неперервної модифікації процесу, потрібно оцінити

$$\frac{1}{t} P_x\big\{ x(t) \in S \setminus B_\varepsilon(x) \big\}$$

[1] Процес, який ми будуємо, є узагальненим дифузійним процесом на графі. Його характеристики можна знайти, виходячи з його означення: матриця дифузії є просто скалярна функція, на j-му промені рівна b_j, а коефіцієнт переносу є несиметрична дельта-функція, яка на кусково неперервну функцію $\varphi(x)$, $x \in S$, діє так: $\langle \delta, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{k} q_i \varphi_i(0+)$. Тоді, записавши диференціальне рівняння Колмогорова, можна відразу отримати умови (1) і (2) (докладніше див. [5]).

і довести, що цей вираз прямує до нуля при $t \to 0+$ так, як це звичайно робиться для вінерівського процесу.

Нехай $v(x)$, $x \in S$, — невід'ємна вимірна функція і

$$\breve{u}(t,x,v,\varphi) = \mathsf{E}_x\, \varphi(x(t)) \exp\left\{ -\int_0^t v(x(\tau))\, d\tau \right\}.$$

Для цієї функції можна отримати наступне інтегральне рівняння (докладніше див. [1]):

$$\breve{u}(t,x,v,\varphi) = u(t,x,v,\varphi) - \int_0^t ds \int_S v(y)\breve{u}(s,y,v,\varphi) G(t-s,x,y)\, dy, \tag{6}$$

з якого методом послідовних наближень (адже це рівняння вольтеррового типу) можна знайти функцію $\breve{u}(t,x,v,\varphi)$.

1.2. Спільний розподіл часів перебування на променях. Узагальнений закон арксинуса. Покладемо $v(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbb{I}_{S_i}(x)$. Тоді

$$\breve{u}(t,x,v,1) = \breve{u}(t,x,\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$$

є спільна характеристична функція часів перебування на променях $S_1,\ldots,S_k$ процесу, стартуючого з точки x. Позначивши $\zeta_i = \int_0^t \mathbb{I}_{S_i}(x(s))\, ds$, дістанемо

$$\breve{u}(t,x,\lambda_1,\ldots,\lambda_k) = \mathsf{E}_x\, e^{-\lambda_1\zeta_1 - \cdots - \lambda_k\zeta_k}.$$

Нехай $F_{\zeta_1,\ldots,\zeta_{k-1}}(t_1,\ldots,t_{k-1})$ — спільна функція розподілу величин $\zeta_1,\ldots,\zeta_{k-1}$. Зрозуміло, що $\zeta_i \ge 0$, $\sum_{i=1}^k \zeta_i = t$, так що ця функція розподілу зосереджена на множині $T = \{(t_1,\ldots,t_{k-1})\colon \sum_{j=1}^{k-1} t_j \le t, t_j \ge 0\}$. Отже, можна написати (в аргументах й заради зручності не писатимемо λ)

$$\breve{u}(t,x) = \int\cdots\int_T e^{-\lambda_1 t_1 - \cdots - \lambda_k t_k} F_{\zeta_1,\ldots,\zeta_{k-1}}(dt_1,\ldots,dt_{k-1}) \tag{7}$$

(у інтегралі покладено $t_k = t - t_1 - \cdots - t_{k-1}$). З того, що функція $G(t,x,y)$ є розв'язком (1) і задовольняє за змінною x зазначені умови в точці O, випливає (якщо застосувати до обох частин (6) оператор

$$\frac{\partial}{\partial t} - \frac{b_j}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2};$$

строгий перехід є в [1]) рівняння для $\breve{u}(t,x)$

$$\frac{\partial \breve{u}_j}{\partial t} = \frac{b_j}{2}\cdot\frac{\partial^2 \breve{u}_j}{\partial x^2} - \lambda_j \breve{u}, \qquad t > 0,\ x \in S_j \setminus \{0\},$$

а з нього — рівняння для перетворення Лапласа $\bar{u}(p,x) = \int_0^\infty e^{-pt}\breve{u}(t,x)\, dt$:

$$\frac{b_j}{2}\cdot\frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x^2} - (\lambda_j + p)\bar{u} = -1, \qquad p > 0,\ x > 0,$$

причому повинні виконуватись умови:

(i) $|\bar{u}_j| \le p^{-1}$,
(ii) $\bar{u}_1(p,0+) = \cdots = \bar{u}_k(p,0+)$,
(iii) $\sum_{j=1}^k q_j \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x}(t,0+) = 0$.

Звідси знаходимо

$$\bar{u}(p,0) = \sum_{j=1}^k \frac{q_j}{\sqrt{b_j(\lambda_j + p)}} \Bigg/ \sum_{j=1}^k q_j \sqrt{(\lambda_j + p)/b_j}. \tag{8}$$

Щоб знайти $\breve{u}(t,0)$, нам знадобиться така лема (будемо писати $F(p) \risingdotseq f(t)$ в разі, коли $F(p)$ є перетворення Лапласа функції $f(t)$):

Лема 1. Теорема множення Ефроса. *Якщо* $F(p) \risingdotseq f(t)$; $\Phi(p)$, $q(p)$ — *аналітичні функції і* $\Phi(p)e^{-\tau q(p)} \risingdotseq \varphi(t,\tau)$, $\tau > 0$, *то* $F(q(p))\Phi(p) \risingdotseq \int_0^\infty f(\tau)\varphi(t,\tau)\,d\tau$.

Доведення. Повне доведення цієї леми можна знайти в [4]. Нас влаштує нестроге доведення, яке полягає в простій зміні порядку інтегрування, адже всі наші функції невід'ємні. □

Візьмемо $f(t) \equiv 1$ (таким чином, $F(p) = p^{-1}$);

$$q(p) = \sum_{j=1}^{k} q_j \sqrt{(\lambda_j + p)/b_j}, \qquad \Phi(p) = \sum_{j=1}^{k} \frac{q_j}{\sqrt{b_j(\lambda_j + p)}},$$

при цьому $\bar{u}(p,0) = F(q(p))\Phi(p)$;

$$\begin{aligned}\Phi(p)e^{-\tau q(p)} &= \sum_{j=1}^{k} \frac{q_j}{\sqrt{b_j(\lambda_j + p)}} \exp\Big\{-\tau \sum_{j=1}^{k} q_j \sqrt{(\lambda_j + p)/b_j}\Big\} \\ &= \frac{d}{dp}\left[-\frac{2}{\tau}\exp\Big\{-\tau \sum_{j=1}^{k} q_j \sqrt{(\lambda_j + p)/b_j}\Big\}\right] \\ &= \frac{d}{dp}\left[-\frac{2}{\tau}\prod_{j=1}^{k}\exp\Big\{-\tau q_j \sqrt{(\lambda_j + p)/b_j}\Big\}\right].\end{aligned}$$

Отже, треба знайти оригінал функції

$$\exp\Big\{-\tau q_j \sqrt{(\lambda_j + p)/b_j}\Big\},$$

а потім скористатись теоремами множення, диференціювання і в кінці теоремою Ефроса. Випускаючи рутинні обрахунки, запишемо кінцевий результат

$$\breve{u}(t,0) = \int\cdots\int_T \frac{t\Gamma(k/2)}{\left(\pi\sum_{j=1}^k q_j^2/(b_j t_j)\right)^{k/2}} \left(\prod_{j=1}^{k}\frac{q_j}{\sqrt{b_j t_j^{\,3}}}\right) \exp\Big\{-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j t_j\Big\}\,dt_1\ldots dt_{k-1}.$$

Порівнюючи це з (7), бачимо, що $\zeta_1,\ldots,\zeta_{k-1}$ за умови стартування процесу з нуля, розподілені зі щільністю

$$f_{\zeta_1,\ldots,\zeta_{k-1}}(t_1,\ldots,t_{k-1}) = \frac{t\Gamma(k/2)}{\left(\pi\sum_{j=1}^k q_j^2/(b_j t_j)\right)^{k/2}} \left(\prod_{j=1}^{k}\frac{q_j}{\sqrt{b_j t_j^{\,3}}}\right).$$

Подібним чином можна знайти розподіл часу, який процес провів на одному з променів, спільний розподіл двох таких часів тощо. Справді,

$$\breve{u}(t,0,\lambda_1,0,\ldots,0) = \mathsf{E}_0\, e^{-\lambda_1\zeta_1} = \int_0^t e^{-\lambda_1 s} F_{\zeta_1}(ds);$$

$$\bar{u}(p,0,\lambda_1,0,\ldots,0) = \frac{q_1(b_1(\lambda_1+p))^{-1/2} + cp^{-1/2}}{q_1\sqrt{(\lambda_1+p)/b_1} + c\sqrt{p}}, \qquad c = \sum_{j=2}^{k}\frac{q_j}{\sqrt{b_j}}.$$

Тоді, виконавши аналогічну послідовність дій, матимемо

$$f_{\zeta_1}(s) = \frac{tq_1c}{\pi\sqrt{b_1 s(t-s)}\big((q_1^2/b_1)(t-s) + c^2 s\big)}. \tag{9}$$

Міркування при виведенні спільного розподілу часів перебування на двох променях нічим не відрізняються від уже наведених, тому напишемо лише остаточний результат:

$$f_{\zeta_1,\zeta_2}(t_1,t_2) = \frac{tq_1q_2\tilde{c}}{2\pi\sqrt{b_1b_2}}\left((t-t_1-t_2)\left(\frac{q_1^2}{b_1}t_2+\frac{q_2^2}{b_2}t_1\right)+\tilde{c}^2\,t_1t_2\right)^{-3/2}, \tag{10}$$

де $\tilde{c} = \sum_{i=3}^{k} q_i/\sqrt{b_i}$.

2. Процес, затримуваний у нулі

Перейдемо тепер до випадку, коли точка O "липуча". Для цього скористаємося випадковою заміною часу, ідея якої дуже умовно полягає в наступному. Позначимо через η_t "кількість відвідин" процесом точки O, що можна умовно написати так: $\eta_t = \int_0^t \delta(x(s))\,ds$, де $\delta(x)$ — дельта-функція. Тепер потрібно процес "затримати" зі степенем "липучості" r; затриманий час є $\zeta_t = \inf\{s \geq 0 : s + r\eta_s \geq t\}$ і, таким чином, можна покласти $\hat{x}(t) = x(\zeta_t)$ — затриманий процес. Приступимо до строгого розгляду.

2.1. Характеристики модифікованого процесу. Покладемо

$$f_t(x) = \frac{2}{B}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \tau^{-1/2}\exp\left\{-\frac{x^2}{2b_i\tau}\right\}d\tau, \qquad x \in S_i,$$

де $B = \sum_{i=1}^k \sqrt{b_i}$. Підінтегральний вираз можна розуміти як дію напівгрупи $\{T_t\}$ на "зважену" дельта-функцію (таку, що для кусково неперервної функції $\varphi(x)$, $x \in S$,

$$\langle\delta,\varphi\rangle = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^k \sqrt{b_i}\varphi_i(0+)).$$

Дійсно, i-та компонента функції $f_t(x)$ є

$$\begin{aligned} f_{ti}(x) &= \frac{2}{BD}\sum_{j=1}^k \frac{q_j}{\sqrt{b_j}}\int_0^t \tau^{-1/2}\exp\left\{-\frac{x^2}{2b_i\tau}\right\}\frac{d\tau}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int_0^t \frac{1}{B}\sum_{j=1}^k \sqrt{b_j}\frac{2}{D}\cdot\frac{q_j}{\sqrt{b_j}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2b_j\tau}\right\}\frac{d\tau}{\sqrt{2\pi b_j\tau}} \\ &= \int_0^t \frac{1}{B}\sum_{j=1}^k \sqrt{b_j}G_{ij}(\tau,x,0+)\,d\tau. \end{aligned} \tag{11}$$

З (5) випливає, що $G(t,x,y) \leq C/\sqrt{t}$, тому, по-перше,

$$f_{ti}(x) = \lim_{y\to 0+}\int_0^t \frac{1}{B}\sum_{j=1}^k \sqrt{b_j}G_{ij}(\tau,x,y)\,d\tau,$$

по-друге, $f_{ti}(x)$ неперервна і, по-третє,

$$f_{ti}(x) \leq \int_0^t \frac{1}{B}\sum_{j=1}^k \sqrt{b_j}\frac{C}{\sqrt{\tau}}\,d\tau = 2C\sqrt{t},$$

звідки $\sup_{x\in S} f_t(x) \to 0$, $t \to 0+$. Звідси (з використанням напівгрупової властивості) випливає, що $T_tf_s(x) = f_{t+s}(x) - f_t(x)$. Доведені факти про $f_t(x)$ дають існування адитивного невід'ємного неперервного за t функціоналу η_t такого, що $\mathsf{E}_x\,\eta_t = f_t(x)$ і $\eta_t = \mathrm{l.i.m.}_{h\to 0+}\int_0^t h^{-1}f_h(x(\tau))\,d\tau$. Те, що $h^{-1}f_h(x) \to \delta(x)$ при $h \to 0+$

і дозволяє умовно вважати $\eta_t = \int_0^t \delta(x(s))\,ds$. Покладаємо, як написано у вступі до цієї частини, $\hat{x}(t) = x(\zeta_t)$. Знайдемо резольвенту процесу $\hat{x}(t)$, тобто функцію

$$U_\lambda(x,\varphi) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,\mathsf{E}_x\,\varphi(\hat{x}(t))\,dt.$$

Маємо $U_\lambda(x,\varphi) = U_\lambda^{(1)}(x,\varphi) + U_\lambda^{(2)}(x,\varphi)$, де

$$U_\lambda^{(1)}(x,\varphi) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,\mathsf{E}_x\big(\varphi(x(t))e^{-\lambda r\eta_t}\big)\,dt,$$

$$U_\lambda^{(2)}(x,\varphi) = r\,\mathsf{E}_x\int_0^\infty e^{-\lambda t-\lambda r\eta_t}\varphi(x(t))\,d\eta_t.$$

Покладемо

$$u_\lambda(t,x,\varphi) = \mathsf{E}_x\,e^{-\lambda\eta_t}\varphi(x(t)).$$

Виведемо рівняння для $u_\lambda(t,x,\varphi)$. Позначимо $\eta_t^h = \int_0^t h^{-1}f_h(x(\tau))\,d\tau$, $u_\lambda^h(t,x,\varphi) = \mathsf{E}_x\big(e^{-\lambda\eta_t^h}\varphi(x(t))\big)$. Тоді $\eta_t^h \to \eta_t$, $u_\lambda^h(t,x,\varphi) \to u_\lambda(t,x,\varphi)$, $h \to 0+$. Маємо наступне інтегральне рівняння (це є (6) для певної функції $v(x)$)

$$u_\lambda^h(t,x,\varphi) - \mathsf{E}_x\,\varphi(x(t)) = -\lambda\int_0^t ds\int_S h^{-1}f_h(y)u_\lambda^h(t-s,y,\varphi)G(s,x,y)\,dy. \qquad (12)$$

Для обгрунтування граничного переходу в даному рівнянні нам потрібна

Лема 2. *Нехай $\psi(t,x)$, $t>0$, $x\in S$, — обмежена за x і локально за t, вимірна функція і*

$$\psi_h(t,x) = \int_0^t ds\int_S G(t-s,x,y)\psi(s,y)h^{-1}f_h(y)\,dy.$$

Тоді для всіх $L>0$, $T>0$, $\varepsilon>0$ знайдеться $\delta>0$ таке, що для $h>0$, $x,x'\in S$, $t,t'\in[0,T]$, $\psi(t,x)$ маємо $|\psi_h(t,x)-\psi_h(t',x')|<\varepsilon$, як тільки[2] $\rho(x,x')+|t-t'|<\delta$, $\sup_{\substack{x\in S\\ t\in[0,T]}}|\psi(t,x)|<L$.

Доведення. Позначимо

$$\|\psi\| = \sup_{\substack{x\in S\\ t\in[0,T]}}|\psi(t,x)|,$$

без обмеження загальності вважатимемо, що $t\le t'$. Маємо

$$|\psi_h(t,x)-\psi_h(t',x')| \le |\psi_h(t,x)-\psi_h(t,x')| + |\psi_h(t,x')-\psi_h(t',x')|. \qquad (13)$$

Візьмемо деяке $\gamma>0$. У виразі для першого доданку зовнішній інтеграл розіб'ємо на два: I_1 — від $t-\gamma$ до t та I_2 — від 0 до $t-\gamma$. Перший інтеграл оцінюємо виходячи з того, що $f_h(x)\le C_1\sqrt{h}\exp\{-x^2/(2b(x)h)\}$ і $G(t,x,y)\le C/\sqrt{t}$:

$$I_1 \le 2CC_1\|\psi\|\left|\int_{t-\gamma}^t ds\int_S \frac{1}{\sqrt{h(t-s)}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2b(x)h}\right\}dy\right| = C_0\|\psi\|\sqrt{\gamma}.$$

Щоб оцінити другий інтеграл, розглянемо вираз

$$R_a(x,x') = \frac{1}{h}\int_0^{t-\gamma}ds\int_0^h d\tau\int_{-\infty}^\infty\big|g_a(t-s,x,y)-g_a(t-s,x',y)\big|\exp\left\{-\frac{y^2}{2\tau}\right\}\frac{dy}{\sqrt{2\pi\tau}},$$

---

[2] Тут для $x\in S_i$ та $x'\in S_j$ покладено

$$\rho(x,x') = \begin{cases}|x-x'|, & i=j,\\ x+x', & i\ne j.\end{cases}$$

де

$$g_a(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left\{-\frac{(ax-y)^2}{2t}\right\}.$$

Функція $\exp\{-x^2/2\}$ має похідну, обмежену числом $\exp\{-1/2\}$, тому

$$|g_a(t-s,x,y) - g_a(t-s,x',y)| \le \frac{ae^{-1/2}}{t-s}|x-x'|$$

і тоді після підрахунку інтегралів у нас вийде

$$R_a(x,x') \le ae^{-1/2} \ln\frac{t}{\gamma} \cdot |x-x'|.$$

Зробивши лінійну заміну в інтегралі, пересвідчуємося, що для $x, x' \in S_i$

$$\int_0^{t-\gamma} ds \int_{S_j} \left|G(t-s,x,y) - G(t-s,x',y)\right| h^{-1} f_h(y)\, dy \le C_{ij} R_{a_{ij}}(x,x').$$

де a_{ij}, C_{ij} — певні константи (не залежні від x та x'). Звідси отримаємо при $x, x' \in S_i$ оцінку $I_2 \le \tilde{C}\|\psi\| \ln(t/\gamma) \cdot |x-x'|$, де $\tilde{C}$ не залежить від i. Для $x \in S_i$, $x' \in S_j$, $i \ne j$, за нерівністю трикутника

$$I_2 \le \tilde{C}\|\psi\| \ln\frac{T}{\gamma} \cdot \rho(x,x'),$$

що разом з першою оцінкою дає

$$|\psi_h(t,x) - \psi_h(t,x')| \le C_0\|\psi\|\sqrt{\gamma} + \tilde{C}\|\psi\| \ln\frac{T}{\gamma} \cdot \rho(x,x').$$

Другий доданок в (13) оцінюється аналогічно: границі інтегрування в ньому розбиваються числом $t-\gamma$, "хвости" оцінюються як у першому доданку, а інтеграли від 0 до $t-\gamma$ об'єднуються в один. Далі розглядається вираз

$$R'_a(t,t') = \frac{1}{h}\int_0^{t-\gamma} ds \int_0^h d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \left|(g_a(t-s,x,y) - g_a(t'-s,x,y)\right| \exp\left\{-\frac{y^2}{2\tau}\right\} \frac{dy}{\sqrt{2\pi\tau}}.$$

Похідна функції $g_a(t,x,y)$ за змінною t є

$$\left(-\frac{1}{2\sqrt{t^3}} + \frac{(ax-y)^2}{2\sqrt{t^5}}\right) \cdot \exp\left\{-\frac{(ax-y)^2}{2t}\right\}.$$

З огляду на те, що $t < t'$ і для всіх $s > 0$ виконується $se^{-s} \le e^{-1}$, можемо записати

$$|g_a(t-s,x,y) - g_a(t'-s,x,y)| \le K\frac{1}{\sqrt{(t-s)^3}}(t'-t)$$

з деяким $K > 0$ і проінтегрувати:

$$R'_a(t,t') \le 2K(t'-t)\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Звідси маємо, як і вище:

$$|\psi_h(t,x') - \psi_h(t',x')| \le 2C_0\|\psi\|\sqrt{t'-t+\gamma} + C'\|\psi\|\frac{1}{\sqrt{\gamma}}(t'-t).$$

Враховуючи умови $\rho(x,x') + |t-t'| < \delta$ $\|\psi\| < L$ і те, що $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}$, запишемо

$$|\psi_h(t,x) - \psi_h(t',x')| \le 3C_0 L\left(\sqrt{t'-t} + \sqrt{\gamma}\right) + L\left(\tilde{C}\ln\frac{T}{\gamma} + C'\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)\delta.$$

Вибираючи $\gamma = (\varepsilon/(6C_0L))^2$, а δ так, щоб

$$3C_0L\sqrt{\delta} + L\left(\tilde{C}\ln\frac{T}{\gamma} + C'\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)\delta < \frac{\varepsilon}{2}\ ,$$

одержимо необхідну оцінку. $\square$

Лема показує, що сім'я $u_\lambda^h(t,x,\varphi)$ є передкомпактна множина неперервних на $[0,T]\times S$ функцій, тому з неї можна вибрати рівномірно збіжну до $u_\lambda(t,x,\varphi)$ послідовність і перейти таким чином у рівнянні (12) до границі. Одержимо рівняння

$$u_\lambda(t,x,\varphi) = \int_S \varphi(y)G(t,x,y)\,dy - \lambda\int_0^t g_s(x)u_\lambda(t-s,0,\varphi)\,ds, \tag{14}$$

яке має єдиний розв'язок, де

$$g_t(x) = \frac{d}{dt}f_t(x) = \sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{S_i}(x)\frac{2}{B\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2b_it}\right\}.$$

Дійсно, функція $u_\lambda(t,x,\varphi)$ повністю визначається значеннями функції $u_\lambda(t,0,\varphi)$, що задовольняє певне рівняння вольтеррового типу. Тоді

$$U_\lambda^{(1)}(x,\varphi) = R_\lambda\varphi(x) - \lambda rU_\lambda^{(1)}(0,\varphi)\cdot\tilde{g}_\lambda(x),$$

де $R_\lambda\varphi(x)$ — резольвента процесу $x(t)$, а

$$\tilde{g}_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}g_t(x)\,dt = \frac{2}{B}\sum_{i=1}^k \mathbb{I}_{S_i}(x)\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\exp\left\{-x\sqrt{\frac{2\lambda}{b_i}}\right\}.$$

Далі,

$$\begin{aligned} U_\lambda^{(2)}(x,\varphi) &= r\int_0^\infty e^{-\lambda t}u_{\lambda r}(t,x,\varphi\delta)\,dt \\ &= r\lim_{h\to 0+}\int_0^\infty e^{-\lambda t}u_{\lambda r}\left(t,x,\varphi h^{-1}f_h\right)\,dt. \end{aligned} \tag{15}$$

З рівняння (14) знаходимо

$$u_\lambda(t,x,\varphi\delta) = \varphi(0)g_t(x) - \lambda\int_0^t g_s(x)u_\lambda(t-s,0,\varphi\delta)\,ds,$$

звідки маємо

$$U_\lambda^{(2)}(x,\varphi) = r\varphi(0)\tilde{g}_\lambda(x) - \lambda rU_\lambda^{(2)}(0,\varphi)\tilde{g}_\lambda(x).$$

Порівнявши це з виразом для $U_\lambda^{(1)}(x,\varphi)$, отримаємо резольвенту модифікованого процесу

$$\hat{R}_\lambda\varphi(x) = R_\lambda\varphi(x) + r\tilde{g}_\lambda(x)\big(\varphi(0) - \lambda\hat{R}_\lambda\varphi(0)\big), \tag{16}$$

звідки, підставивши $x=0$, дістанемо

$$\hat{R}_\lambda\varphi(x) = R_\lambda\varphi(x) + r\tilde{g}_\lambda(x)\frac{\varphi(0) - \lambda R_\lambda\varphi(0)}{1 + r\sqrt{2\lambda}/B}\ . \tag{17}$$

Звідси можна знайти вираз для напівгрупи модифікованого процесу:

$$\hat{T}_t\varphi(x) = \int_S \hat{G}(t,x,y)\varphi(y)\,dy + q(t,x)\varphi(0);$$

$\hat{G}(t,x,y)$ і $q(t,x)$ можна виразити через стандартну нормальну функцію розподілу, але ті формули доволі громіздкі, тому ми їх тут не виписуємо.

Обчислимо інфінітезимальний оператор побудованого процесу. З того, що

$$\left(\lambda - \frac{b(x)}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\tilde{g}_\lambda(x) = 0$$

і

$$\left(\lambda - \frac{b(x)}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)R_\lambda\varphi(x) = \varphi(x)$$

при $x \neq 0$ ($b(x) = \sum_{i=1}^k b_i \mathbb{I}_{S_i}(x)$), маємо

$$\left(\lambda - \frac{b(x)}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\hat{R}_\lambda\varphi(x) = \varphi(x), \qquad x \neq 0,$$

тобто поза нулем інфінітезимальний оператор процесу дорівнює

$$\frac{b(x)}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Продиференціюємо рівняння (16) у нулі по x і складемо похідні на різних променях з вагами q_i, що знищить перший доданок у правій частині. Одержимо

$$\sum_{i=1}^k q_i \frac{\partial}{\partial x}\hat{R}_\lambda\varphi_i(0+) = -r\sum_{i=1}^k q_i \frac{2}{B\sqrt{b_i}}\big(\varphi(0) - \lambda\hat{R}_\lambda\varphi(0)\big) = -\frac{2rD}{B}\big(\varphi(0) - \lambda\hat{R}_\lambda\varphi(0)\big), \quad (18)$$

де

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{q_i}{\sqrt{b_i}}.$$

Звідси отримаємо значення інфінітезимального оператора в нулі:

$$\hat{A}\varphi(0) = \frac{B}{2rD}\sum_{i=1}^k q_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial x}(0+).$$

Виходить, що процес залишає точку O зі скінченою швидкістю, тому й відбувається його затримання в цій точці. Згадаймо немодифікований процес з першої частини: поведінка його в нулі була подібна до поведінки в будь-якій іншій точці (за винятком того, що тут "частинка" має не дві рівноймовірні, а k "зважених" можливостей для продовження руху) і, отже, для нього справджується аналог теореми про повторний логарифм, яка якраз і говорить про те, що точка виходить з нуля з нескінченною швидкістю.

2.2. Розподіл часів перебування для процесу із затримкою. В [1] викладено наступний факт: єдиним обмеженим при $t \to +\infty$ розв'язком задачі Коші

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= Au(t,x) - v(x)u(t,x), \\ u(t,x) &\to 1, \qquad t \to 0+, \end{aligned} \quad (19)$$

де A — інфінітезимальний оператор процесу $x(t)$, а $v(x)$ — обмежена неперервна функція, є

$$u(t,x) = \mathsf{E}_x \exp\left\{-\int_0^t v(x(s))ds\right\}.$$

У цьому твердженні достатньо вимагати лише кускової неперервності функції $v(x)$: потрібно перейти до перетворень Лапласа і здійснити граничний перехід.

Візьмемо

$$v(x) = \lambda_0\mathbb{I}_{\{0\}}(x) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbb{I}_{S_i}(x).$$

Тоді

$$\breve{u}(t, x, \lambda_0, \ldots, \lambda_k) = \mathsf{E}_x \exp\left\{-\int_0^t v(x(s))\,ds\right\}$$

є спільна характеристична функція величин $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ — часів перебування на променях і ζ_0 — часу перебування процесу в нулі. Ми знаємо вигляд інфінітезимального оператора, тож скористаємося вищенаведеним твердженням для знаходження $\breve{u}(t,x)$. Запишемо рівняння (19) одразу для перетворення Лапласа $\bar{u}(p,x) = \int_0^\infty e^{-pt}\breve{u}(t,x)\,dt$, $p > 0$:

$$-1 + p\bar{u}_i(p,x) = \frac{b_i}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x^2}(p,x) - \lambda_i \bar{u}_i(p,x), \qquad x \in S_i \setminus \{0\}. \tag{20}$$

У точці O отримаємо умову

$$-1 + p\bar{u}(p,0) = \frac{B}{2rD}\sum_{i=0}^{k} q_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x}(p, 0+) - \lambda_0 \bar{u}(p,0).$$

Це рівняння легко розв'язується, як і у випадку немодифікованого процесу. Остаточний результат:

$$\bar{u}(p,0) = \frac{1 + a\sum_{i=1}^k q_i\sqrt{(b_i(\lambda_i+p))^{-1}}}{p + \lambda_0 + a\sum_{i=1}^k q_i\sqrt{(\lambda_i+p)/b_i}}\,, \tag{21}$$

де $a = B/(\sqrt{2}\,rD)$. Скористаємося знову теоремою Ефроса. Покладемо $f(t) = 1$,

$$q(p) = p + \lambda_0 + a\sum_{i=1}^k q_i\sqrt{\frac{\lambda_i}{b_i}}, \qquad \Phi(p) = 1 + a\sum_{i=1}^k q_i\sqrt{\frac{1}{b_i(\lambda_i+p)}}.$$

Тоді

$$\Phi(p)e^{-\tau q(p)} = -\frac{2}{\tau}\cdot\frac{d}{dp}e^{-\tau q(p)} - e^{-\tau q(p)}. \tag{22}$$

Аналогічно виведенню для немодифікованого процесу маємо

$$\exp\left\{-\tau a\sqrt{\frac{p+\lambda_i}{b_i}}\right\} \risingdotseq \frac{a\tau q_i}{2\sqrt{\pi b_i t^3}}\exp\left\{-\frac{\tau^2 a^2 q_i^2}{4b_i t} - \lambda_i t\right\},$$

звідки

$$\exp\left\{-\tau a\sum_{i=1}^k\sqrt{\frac{p+\lambda_i}{b_i}}\right\}$$
$$\risingdotseq \frac{a^k\tau^k}{2^k}\int\cdots\int_T\left(\prod_{i=1}^k\frac{q_i}{\sqrt{b_i t_i^3}}\right)\exp\left\{-\sum_{i=1}^k\left(\frac{\tau^2a^2q_i^2}{4b_it_i} - \lambda_i t_i\right)\right\}dt_1\ldots dt_{k-1}.$$

Як і вище, множина інтегрування

$$T = \left\{(t_1,\ldots,t_{k-1})\colon \sum_{j=1}^{k-1} t_j \le t, t_j \ge 0\right\};$$

якщо тепер ліву частину домножити на $e^{-\tau(p+\lambda_0)}$ (щоб зліва вийшло $e^{-\tau q(p)}$), то права частина домножиться на $e^{-\tau\lambda_0}$, а множина інтегрування за теоремою зсуву для перетворень Лапласа буде

$$T_\tau = \left\{(t_1,\ldots,t_{k-1})\colon \sum_{i=1}^{k-1} t_i \le t - \tau, t_i \ge 0\right\}.$$

Тепер, якщо проінтегрувати це по τ (щоб пізніше скористуватися теоремою Ефроса) і змінити порядок інтегрування, вийде (для наочності покладено $\tau = t_0$; множиною інтегрування буде, очевидно, $T' = \{(t_1, \dots, t_{k-1})\colon \sum_{i=0}^{k-1} t_j \le t, t_i \ge 0\}$):

$$\frac{a^k}{2^k} \int \cdots \int_{T'} t_0^k \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{q_i}{\sqrt{b_i t_i^3}} \right) \exp\left\{ -\sum_{i=1}^{k} \frac{t_0^2 a^2 q_i^2}{4 b_i t_i} - \sum_{i=0}^{k} \lambda_i t_i \right\} dt_0 \dots dt_{k-1}.$$

Цю функцію треба домножити згідно з (22) на $2t/\tau - 1$, щоб отримати $\breve{u}(t,0)$. Згадавши тепер, що $\breve{u}(t,0)$ є спільна характеристична функція часів перебування $\zeta_0, \dots, \zeta_{k-1}$, отримаємо, що підінтегральний множник перед $\exp\{\sum_{i=0}^{k} \lambda_i t_i\}$ є спільна щільність, отже,

$$f_{\zeta_0,\dots,\zeta_{k-1}}(t_0, \dots, t_{k-1}) = a^k t_0^{k-1} 2^{-k} (2t - t_0) \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{q_i}{\sqrt{b_i t_i^3}} \right) \exp\left\{ -\sum_{i=1}^{k} \frac{t_0^2 a^2 q_i^2}{4 b_i t_i} \right\}, \quad (23)$$

де $t_k = t - \sum_{i=0}^{k-1} t_i$. Цей результат добре узгоджується з виведеним для двовимірного випадку в роботі [2]. Як і в першій частині, для того, щоб отримати розподіл часу, що процес провів у нулі, або спільний розподіл цього часу і часу, проведеного на промені, потрібно знайти оригінали функцій $\bar{u}(p, 0, \lambda_0, 0, \dots)$ і $\bar{u}(p, 0, \lambda_0, \lambda_1, 0, \dots)$. Усі викладки аналогічні вищенаведеним. Остаточний результат —

$$f_{\zeta_0}(t_0) = \frac{ca(2t - t_0)}{2\sqrt{(t - t_0)^3}} \exp\left\{ -\frac{t_0^2 a^2 c^2}{4(t - t_0)} \right\},$$

$$f_{\zeta_0,\zeta_1}(t_0, t_1) = \frac{\tilde{c}\, q_1 a^2 t_0 (2t - t_0)}{4\sqrt{b_1 t_1^3 (t - t_0 - t_1)^3}} \exp\left\{ -\frac{t_0^2 a^2 q_1^2}{4 b_1 t_1} - \frac{t_0^2 a^2 \tilde{c}^2}{4(t - t_0 - t_1)} \right\},$$

де

$$c = \sum_{i=1}^{k} \frac{q_i}{\sqrt{b_i}}, \qquad \tilde{c} = \sum_{i=2}^{k} \frac{q_i}{\sqrt{b_i}}.$$

Література

1. Е. Б. Дынкин, *Функционалы от траекторий марковских случайных процессов*, Докл. АН СССР **104** (1955), № 5, 691–694.
2. С. В. Ефименко и Н. И. Портенко, *О функционалах типа времени пребывания от процесса, склеенного из двух процессов броуновского движения*, Укр. матем. ж. **41** (1989), № 1, 29–33.
3. М. І. Портенко, *Дифузія в середовищах з напівпрозорими мембранами*, Інститут математики НАН України, Київ, 1993.
4. А. М. Эфрос и А. М. Данилевский, *Операционное исчисление и контурные интегралы*, Харьков, 1937.
5. M. I. Freidlin and A. D. Wentzell, *Diffusion processes on graphs and the averaging principle*, Ann. Probab. **21** (1993), № 4, 2215–2245.

Національний університет ім. Тараса Шевченка, кафедра теорії ймовірностей
Електронна адреса: ude@yahoo.com

Надійшла 20/09/2000