Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 63, 2000, стор. 156–162

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 63, 2000, pp. 156–162

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНА НЕРІВНІСТЬ ДЛЯ МОМЕНТІВ СУМ ВИПАДКОВИХ ВЕКТОРІВ

УДК 519.21

С. В. ШКЛЯР

Резюме. Наведено виправлене доведення леми Утєва про моменти сум випадкових векторів, що вірне і в випадку $\delta = 0$. Як наслідок, отримано нерівність Розенталя для ϕ-перемішувань векторів та довільних показників степеня $t \geq 1$.

Інтерполяційна лема була доведена Утєвим ([1], лема 4.1, с. 62) з метою узагальнення нерівності Розенталя на довільні показники $t \geq 1$. Проте нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\,\|\eta_i\|^{t/v} \leq 2 \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\,\|Y_i\|^{t/v}$$

перед (4.5) в роботі [1] невірна, бо $t/v \leq 1$.

Doukhan помітив цю помилку і виправив доведення для випадку $\delta > 0$ ([2], лема 1 розділу 1.4.1, с. 27). Докладне доведення леми Утєва для випадку $\delta > 0$ подано в [3] (лема 3 і висновок 1). Зауважимо, що в [3] умову $t \geq \nu/2$ можна замінити на $t \geq \nu/(2+\delta)$.

Наша мета — навести таке доведення леми Утєва, яке б було вірним також при $\delta = 0$. Це важливо при вивченні моментів ϕ-перемішаних випадкових векторів.

Для цього в нерівності (3) (це — аналог нерівності, що йде після (20) в [3]) спочатку скористаємось нерівністю вігнутості, а потім нерівністю Ляпунова для першого доданку. Отримаємо

$$\mathsf{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \eta_i\right\|^t \leq 2^{\nu-1} \cdot \left(\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|\right)^{\nu} + \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\mathsf{E}\,\|\eta_i\|^{t/\nu}\right)^{\nu/t}\right)^{t} \right).$$

Оцінка другого доданку в правій частині нерівності нескладна (див. нерівність (14)). Для оцінки першого доданку збільшимо y в означенні величин T_i, Y_i. Тоді перший доданок оцінюється в нерівності (7) через $\mathsf{E}\left|\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right|^{\nu}$.

1. Інтерполяційна лема Утєва

Нехай $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$ — ймовірнісний простір, $F = \{\mathfrak{F}_i\}_{i=1}^{n}$, $\mathfrak{F}_i \subset \mathfrak{F}$ — набір σ-алгебр, B — сепарабельний банахів простір.

Будемо говорити, що набір випадкових векторів $\eta = \{\eta_i\}_{i=1}^{n}$, $\eta_i \in B$, $i = 1, 2, \ldots, n$ є центрованим і узгодженим з (F, B), якщо $\mathsf{E}\,\eta_i = 0$ і η_i є $\mathfrak{F}_i$-вимірними, $i = 1, \ldots, n$.

Позначимо:

$$M(\nu, \delta, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathsf{E}\,\|\eta_i\|^{\nu+\delta}\right)^{\nu/(\nu+\delta)}.$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* 60F05, 60F17.

де $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ — набір випадкових векторів.

$$Q(\nu, \delta, \eta) = \begin{cases} \max\left\{M(\nu,\delta,\eta), (M(2,\delta,\eta))^{\nu/2}\right\}, & \text{при } \nu \ge 2, \\ M(\nu,\delta,\eta), & \text{при } 1 \le \nu \le 2. \end{cases}$$

Лема. *Нехай F — набір σ-алгебр, B — сепарабельний банахів простір.*

Нехай для будь-якого набору випадкових векторів $\eta = \{\eta_i\}_{i=1}^n$, центрованого і узгодженого з (F, B)

$$\mathsf{E}\left\|\sum_{i=1}^n \eta_i\right\|^\nu \le cQ(\nu, \delta, \eta),$$

де $c \ge 1$, $\nu \ge 1$, $\delta \ge 1$. Тоді для всіх t, $1 \le t \le \nu$, $t \ge \nu/(2+\delta)$, та будь-якого набору випадкових векторів $\phi = \{\phi_i\}_{i=1}^n$, центрованого і узгодженого з (F, B), справедлива нерівність

$$\mathsf{E}\left\|\sum_{i=1}^n \phi_i\right\|^t \le 2^{2t+4\nu-1} \cdot cQ(t, \delta, \phi).$$

При доведенні будуть використані наступні нерівності: (x, y — вектори сепарабельного банахового простору, X — випадковий вектор)

$$\begin{aligned} &\|x+y\|^p \le 2^{p-1}(\|x\|^p + \|y\|^p), && p \ge 1, && \text{(нерівність вігнутості)} \\ &\|x+y\|^p \le \|x\|^p + \|y\|^p, && 0 < p \le 1, && \text{(нерівність опуклості)} \\ &\mathsf{E}\,\|X - \mathsf{E}\,X\|^p \le 2^p\,\mathsf{E}\,\|X\|^p, && p \ge 1, && \text{(нерівність вігнутості)} \\ &(\mathsf{E}\,\|X\|^q)^{1/q} \le (\mathsf{E}\,\|X\|^p)^{1/p}, && 0 < q \le p, && \text{(нерівність Ляпунова)} \end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned} (\mathsf{E}\,\|X\|)^p &\le \mathsf{E}\,\|X\|^p, && p \ge 1, \\ (\mathsf{E}\,\|X\|)^p &\ge \mathsf{E}\,\|X\|^p, && 0 < p \le 1. \end{aligned}$$

Для дійсних a_i, $i = 1, \ldots, n$, та $p \ge 1$

$$\sum_{i=1}^n |a_i|^p \le \left(\sum_{i=1}^n |a_i|\right)^p \qquad \text{(нерівність вігнутості для суми).}$$

2. Доведення

2.1. Позначення.

$$Q = Q(t, \delta, \phi), \qquad y = (2\,Q)^{1/t},$$

$$A_i = \{\omega \in \Omega\colon \|\phi_i\| > y\}, \qquad A_0 = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i,$$

$$T_i = \phi_i \mathbb{I}(\Omega \setminus A_i), \qquad Y_i = \phi_i \mathbb{I}(A_i), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

де $\mathbb{I}$ — індикаторна функція випадкової події. Позначимо

$$\begin{aligned} \psi_i &= T_i - \mathsf{E}\,T_i, && i = 1, \ldots, n, \\ \eta_i &= Y_i - \mathsf{E}\,Y_i, && i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Оскільки ϕ_i центровані, $\phi_i = T_i + Y_i$, то $\phi_i = \psi_i + \eta_i$. Нехай

$$\begin{aligned} \xi_i &= \|\eta_i\|^{t/\nu} - \mathsf{E}\,\|\eta_i\|^{t/\nu}, && i = 1, \ldots, n, \\ b_i &= \|\,\mathsf{E}\,Y_i\|^{t/\nu} - \mathsf{E}\,\|\eta_i\|^{t/\nu}, && i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Пізніше покажемо, що $b_i \le 0$, $i = 1, \dots, n$. Позначимо

$$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n),$$
$$\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n),$$
$$\xi = (z\xi_1, \dots, z\xi_n),$$

де z — одиничний вектор банахового простору B.

За нерівністю вігнутості

$$\mathsf{E}\left\|\sum_{i=1}^n \phi_i\right\|^t \le 2^{t-1} \cdot \left(\mathsf{E}\left\|\sum_{i=1}^n \psi_i\right\|^t + \mathsf{E}\left\|\sum_{i=1}^n \eta_i\right\|^t\right). \tag{1}$$

За нерівністю Ляпунова оскільки $\nu/t \ge 1$, то

$$\mathsf{E}\left\|\sum_{i=1}^n \psi_i\right\|^t \le \left(\mathsf{E}\left\|\sum_{i=1}^n \psi_i\right\|^\nu\right)^{t/\nu},$$

і оскільки ψ — узгоджений з (F, B), то

$$\mathsf{E}\left\|\sum_{i=1}^n \psi_i\right\|^t \le (c\,Q(\nu, \delta, \psi))^{t/\nu} \stackrel{\text{def}}{=} U. \tag{2}$$

Оцінимо $\mathsf{E}\left\|\sum_{i=1}^n \eta_i\right\|^t$.

Оскільки $t \ge 1$, $\nu/t \ge 1$, то за нерівностями вігнутості, Ляпунова та нерівністю вігнутості для суми

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left\|\sum_{i=1}^n \eta_i\right\|^t &\le \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^n \|\eta_i\|\right)^t \\
&= \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^n \left(\|\eta_i\|^{t/\nu} - \mathsf{E}\,\|\eta_i\|^{t/\nu} + \mathsf{E}\,\|\eta_i\|^{t/\nu}\right)^{\nu/t}\right)^t \\
&\le \mathsf{E}\left(2^{\nu/t-1} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\left|\|\eta_i\|^{t/\nu} - \mathsf{E}\,\|\eta_i\|^{t/\nu}\right|^{\nu/t} + \left(\mathsf{E}\,\|\eta_i\|^{t/\nu}\right)^{\nu/t}\right)\right)^t \qquad (3)\\
&\le 2^{\nu-t} \cdot \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^{\nu/t} + \sum_{i=1}^n \mathsf{E}\,\|\eta_i\|\right)^t \\
&\le 2^{\nu-1} \cdot \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|\right)^\nu + 2^{\nu-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \mathsf{E}\,\|\eta_i\|\right)^t.
\end{aligned}$$

2.2. Поведінка ξ. Для того, щоб оцінити $\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|\right)^\nu$, покажемо, що $\xi_i \ge b_i$, а також доведемо, що $\mathsf{P}(A_0) \ge 1/2$.

Доведемо, що для всіх $i = 1, \dots, n$ та $\omega \in \Omega$

$$\xi_i \ge b_i. \tag{4}$$

Це еквівалентно $\|Y_i - \mathsf{E}\,Y_i\|^{t/\nu} - \mathsf{E}\,\|\eta_i\|^{t/\nu} \ge \|\,\mathsf{E}\,Y_i\|^{t/\nu} - \mathsf{E}\,\|\eta_i\|^{t/\nu}$, тобто $\|Y_i - \mathsf{E}\,Y_i\| \ge \|\,\mathsf{E}\,Y_i\|$. За визначенням Y_i

$$\|Y_i\| > y,$$

коли виконується випадкова подія A_i, інакше $Y_i = 0$.

У випадку $\mathsf{P}(A_i) = 0$

$$\mathsf{E}\,Y_i = 0$$

і нерівність (4) очевидна.

Коли має місце випадкова подія $\Omega \setminus A_i$, то нерівність (4) очевидна.

Коли $\mathsf{P}(A_i) > 0$ і має місце подія A_i, то $\|Y_i\| > y$, $\|Y_i\|^t > 2\,Q$, тому за нерівностями Чебишова та Ляпунова, а також оскільки $Q \geq \mathsf{E}\,\|Y_i\|^t$, то

$$\left\|\frac{Y_i}{2}\right\|^t > \frac{Q}{2^{t-1}} \geq \left(\frac{\mathsf{E}\,\|Y_i\|^t}{2\,Q}\right)^{t-1} \cdot Q \geq \Big(\mathsf{P}\Big(\|Y_i\|^t > 2\,Q\Big)\Big)^{t-1} \cdot Q = (\mathsf{P}(A_i))^{t-1} \cdot Q$$
$$\geq (\mathsf{P}\{\|Y_i\| \neq 0\})^{t-1}\,\mathsf{E}\,\|Y_i\|^t \geq (\mathsf{E}\,\|Y_i\|)^t \geq \|\,\mathsf{E}\,Y_i\|^t.$$

Отже $\|Y_i\| > 2\;\mathsf{E}\,\|Y_i\|$, звідки випливає (4).

Таким чином, оцінку (4) доведено.

Оскільки $\mathsf{E}\,\xi_i = 0$, то $b_i \leq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Значить $|\xi_i| \leq \xi_i - 2\,b_i$.

Покажемо, що $\mathsf{P}(A_0) \geq \frac{1}{2}$. За нерівністю Чебишова

$$\mathsf{P}(A_i) = \mathsf{P}\left(\|\phi_i\|^t > 2\,Q\right) \leq \frac{\mathsf{E}\,\|\phi_i\|^t}{2\,Q}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Далі

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n \|\phi_i\|^t}{2\,Q} \leq \frac{1}{2},$$
$$\mathsf{P}(A_0) = \mathsf{P}\left(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Зауважимо, що коли має місце випадкова подія A_0, то для всіх i маємо $Y_i = 0$, $\xi_i = b_i$, звідки $\sum_{i=1}^n \xi_i = \sum_{i=1}^n b_i$ та

$$\left(-\sum_{i=1}^n b_i\right)^\nu = \frac{1}{\mathsf{P}(A_0)}\,\mathsf{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n \xi_i\right|^\nu \cdot \mathbb{I}(A_0)\right) \leq 2\;\mathsf{E}\left|\sum_{i=1}^n \xi_i\right|^\nu. \tag{5}$$

2.3. Оцінка $\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|\right)^\nu$.

За нерівностями (4) та вігнутости маємо:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|\right)^\nu &\leq \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^n (\xi_i - 2\,b_i)\right)^\nu \\ &\leq 2^{\nu-1} \cdot \mathsf{E}\left|\sum_{i=1}^n \xi_i\right|^\nu + 2^{2\nu-1} \cdot \left(-\sum_{i=1}^n b_i\right)^\nu.\end{aligned} \tag{6}$$

З нерівностей (5), (6) маємо

$$\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|\right)^\nu \leq \left(2^{\nu-1} + 2^{2\nu}\right)\,\mathsf{E}\left|\sum_{i=1}^n \xi_i\right|^\nu. \tag{7}$$

Оскільки набір ξ є центрованим і узгодженим з (F, B), то

$$\mathsf{E}\left|\sum_{i=1}^n \xi_i\right|^\nu \leq c\,Q(\nu, \delta, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} V.$$

Отже

$$\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|\right)^\nu \leq \left(2^{\nu-1} + 2^{2\nu}\right)\,V. \tag{8}$$

2.4. Оцінки U, V та $\left(\sum_{i=1}^n \mathsf{E}\,\|\eta_i\|\right)^t$.

В [3] (нерівності (26) та (30)) показано, що коли $y = Q^{1/t}$, то для U та V виконуються оцінки $U \le 2^t \cdot c^{t/\nu} \cdot Q$ та $V \le 2^{\nu+t} \cdot c\,Q$. У нас $y = (2\,Q)^t$, тому оцінка U погіршиться:

$$U = (c\,Q(\nu,\delta,\psi))^{t/\nu} \le 2^{t+1-t/\nu} \cdot c^{t/\nu} Q, \tag{9}$$

$$V = c\,Q(\nu,\delta,\xi) \le 2^{\nu+t} \cdot c\,Q. \tag{10}$$

Для того, щоб оцінити U, аналогічно [3] отримаємо нерівність

$$M(\nu,\delta,\psi) \le 2^\nu \cdot y^{\nu-t} M(t,\delta,\phi) = 2^{t+1-t/\nu} Q.$$

Справді, оскільки $t+\nu > 1$ та при $\nu \ge t$ виконується $\nu(t+\delta)/(t(\nu+\delta)) \ge 1$, то за нерівностями вігнутості та Ляпунова маємо

$$\mathsf{E}\,\|\psi_i\|^{\nu+\delta} \le 2^{\nu+\delta} \cdot \mathsf{E}\,\|T_i\|^{\nu+\delta} \le 2^{\nu+\delta} \cdot \left(\mathsf{E}\,\|T_i\|^{\nu(t+\delta)/t}\right)^{t(\nu+\delta)/(\nu(t+\delta))},$$

тому

$$\begin{aligned} M(\nu,\delta,\psi) &\le \sum_{i=1}^n \left(2^{\nu+\delta}\left(\mathsf{E}\,\|T_i\|^{\nu(t+\delta)/t}\right)^{t(\nu+\delta)/(\nu(t+\delta))}\right)^{\nu/(\nu+\delta)} \\ &= 2^\nu \sum_{i=1}^n \left(\mathsf{E}\,\|T_i\|^{\nu(t+\delta)/t}\right)^{t/(t+\delta)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Оскільки $|T_i| < y$, $\nu(t+\delta)/t - (t+\delta) \ge 0$, то

$$\begin{aligned} M(\nu,\delta,\psi) &\le 2^\nu y^{\nu-t} \sum_{i=1}^n \left(\mathsf{E}\,\|T_i\|^{t+\delta}\right)^{t/(t+\delta)} \\ &\le 2^\nu \cdot (2\,Q)^{\nu/t-1} M(t,\delta,\psi) \le 2^{\nu+\nu/t-1} Q^{\nu/t}. \end{aligned} \tag{12}$$

При $1 \le t \le 2 \le \nu$, покладемо в (12) $\nu = 2$ і отримаємо

$$M(2,\delta,\psi) \le 2^{2+2/t-1} \cdot Q^{2/t}.$$

При $2 \le t \le \nu$ за нерівністю опуклості

$$\begin{aligned} M(2,\delta,\psi) &= \sum_{i=1}^n \left(\mathsf{E}\,\|T_i - \mathsf{E}\,T_i\|^{2+\delta}\right)^{2/(2+\delta)} \\ &\le 4\sum_{i=1}^n \left(\mathsf{E}\,\|T_i\|^{2+\delta}\right)^{2/(2+\delta)} \le 4M(2,\delta,\phi) \le 4\,Q^{2/t}. \end{aligned}$$

Отже, при $\nu \ge 2$ для всіх t, $1 \le t \le \nu$

$$M^{\nu/2}(2,\delta,\psi) \le 2^{\nu+\nu/t-\nu/2} Q^{\nu/t} \le 2^{\nu+\nu/t-1} \cdot Q^{\nu/t}. \tag{13}$$

З нерівностей (12) та (13) за означенням $Q(\nu,\delta,\psi)$ отримаємо

$$Q(\nu,\delta,\psi) \le 2^{\nu+\nu/t-1} \cdot Q^{\nu/t},$$

звідки випливає оцінка для U.
Оскільки $Y_i = 0$ або $\|Y_i\| > y > Q^{1/t}$, то оцінка для V не погіршиться. Тут ми використали умову $t \ge \nu/(2+\delta)$.

Оцінимо $\left(\sum_{i=1}^n \mathsf{E}\,\|\eta_i\|\right)^t$:

$$\sum_{i=1}^n \mathsf{E}\,\|\eta_i\| = \sum_{i=1}^n \mathsf{E}\,\|Y_i - \mathsf{E}\,Y_i\| \le \sum_{i=1}^n 2\ \mathsf{E}\,\|Y_i\| \le 2\,y^{1-t} \sum_{i=1}^n \mathsf{E}\,\|Y_i\|^t \le 2^{1/t} \cdot Q^{1/t},$$

тому

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\,\|\eta_i\|\right)^t \le 2\,Q. \tag{14}$$

Остаточно з нерівностей (1), (2), (3), (8), (9), (10), (14) та $c \ge 1$ отримаємо

$$\mathsf{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \phi_i\right\|^t \le 2^{2t-t/\nu}\cdot c^{t/\nu} Q + 2^{2t+2\nu-2}\cdot\left(2^{\nu-1}+2^{2\nu}\right) c\,Q + 2^{t+\nu-1}\cdot Q \le 2^{2\nu+4t-1}\cdot c\,Q.$$

Лему доведено. □

Зауваження. Якщо відкинути умову $t \ge \nu/(2+\delta)$, то, застосовуючи лему кілька разів, отримаємо наступну оцінку

$$\mathsf{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \phi_i\right\|^t \le 2^{10\nu-5}\cdot c\,Q(t,\delta,\phi).$$

Справді, за індукцією доводимо, що для всіх цілих невід'ємних k, таких що

$$2^{-k}\cdot\nu \ge 1,$$

для довільного центрованого і узгодженого з (F, B) набору векторів η

$$\mathsf{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} \eta_i\right\|^{2^{-k}\cdot\nu}\right) \le 2^D\cdot c\,Q(2^{-k}\cdot\nu,\delta,\eta),$$

де $D = \left(10 - 2^{-k}\cdot 5\right)\nu - k$.

$$\mathsf{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} \phi_i\right\|^t\right) \le 2^D\cdot c\,Q(t,\delta,\phi),$$

де $D = \left(10 - 2^{-K}\cdot 6\right)\nu + 2t - K - 1$, K — таке ціле, що $2^{-K-1}\cdot\nu \le t < 2^{-K}\cdot\nu$. Можна помітити, що $D < 10\nu - 5$.

3. Застосування

Для двох σ-алгебр $\mathcal{F}$ та $\mathcal{G}$ нехай

$$\phi(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \sup\left\{|\mathsf{P}(B\mid A) - \mathsf{P}(B)| \colon A\in\mathcal{F}, B\in\mathcal{G}, \mathsf{P}(A)\ne 0\right\}$$

— коефіцієнт рівномірного перемішування. Нехай задана послідовність $\{\xi_i, i\ge 1\}$ випадкових векторів з гільбертового простору H. Вважаємо, що M_l^k — σ-алгебра, породжена $\xi_l,\ldots,\xi_k$;

$$\phi(n) = \sup_{k\ge 1}\phi\left(M_1^k, M_{k+n}^\infty\right).$$

Для парних j покладемо

$$a(\phi, j) = \sum_{k=0}^{\infty}\phi^{1/j}(k)\,(k+1)^{j-2},$$

$c(j) = j(j-1)\cdot 2^{j-2}\cdot j!$,

$$Q_t(n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}\,\|\xi_k\|^t, & t\le 2,\\ \max\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}\,\|\xi_k\|^t, \left(\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}\,\|\xi_k\|^2\right)^{t/2}\right\}, & t>2.\end{cases}$$

Нехай $t \geq 1$ та $j = \min\{2n: n \in \mathbf{N}, n \geq t/2\}$ (j — найменше парне число, що не менше t). Припустимо, що $a(\phi, j) \leq \infty$. В [1] показано, що

$$\mathsf{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right\|^j \leq c(j)a(\phi, j)Q_j(n),$$

якщо $Q_j(n) < \infty$.

Узагальнена нерівність Розенталя. *Нехай* $(\xi_i, i \geq 1)$ *— послідовність випадкових векторів з сепарабельного гільбертового простору* H. *Нехай* $t \geq 1$ *та* j *— найменше парне число, що не менше* t. *Нехай для* (ξ_i) *виконується умова слабкої залежності* $a(\xi, j) < \infty$. *Нехай всі* ξ_i *інтегровні в* t*-му степені. Тоді для всіх* n

$$\mathsf{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right\|^t \leq C\, c(j)a(\phi, j)Q_t(n),$$

де $C = 2^{6j-1}$.

Ця нерівність випливає з нерівності Розенталя для парних показників степеня та інтерполяційної леми.

Література

1. С. А. Утев, *Неравенства для сумм слабозависимых случайных величин и оценки скорости сходимости в принципе инвариантности*, Труды института математики АН СССР (Сибирское отделение), Предельные теоремы для сумм случайных величин, т. 3, "Наука", Новосибирск, 1984, стр. 50–70.
2. P. Doukhan, *Mixing. Properties and examples*, Springer, New York, 1994.
3. I. Fazekas, A. G. Kukush, T. Tómács, *On the Rosental inequality for mixing fields*, Укр. матем. ж. **52** (2000), № 2, 266–276.

Механіко-математичний факультет, Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

Електронна адреса: shklyar@mail.univ.kiev.ua

Надійшла 01/09/2000