Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 63, 2000, стор. 163–167

Teor. Imovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 63, 2000, pp. 163–167

ДЕЯКІ СТАТИСТИЧНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ВИПАДКОВОГО ПОЛЯ УІТЛА

УДК 519.21

М. Й. ЯДРЕНКО

Резюме. Розглядається задача екстраполяції в центрі сфери та задача оцінювання невідомого середнього значення для випадкового поля Уітла, яке спостерігається на сфері.

Випадковим полем Уітла ми будемо називати випадкове поле $\xi(x)$ на $\mathbf{R}^n$, яке задовольняє стохастичному рівнянню в частинних похідних

$$\nabla^2\xi(x) - c^2\xi(x) = w'(x), \tag{1}$$

де $w'(x)$ — "білий шум" на $\mathbf{R}^n$ (випадкове поле таке, що $\mathbf{M}\, w'(x)w'(y) = \delta(x-y)$, $\delta(x)$ — дельта-функція Дірака на $\mathbf{R}^n$).

Таке випадкове поле вперше розглядав Уітл в 1954 році [1].

Цікаві зауваження та гіпотези відносно марківських властивостей випадкового поля, яке є розв'язком рівняння (1), висловлював на семінарі в Київському університеті в 1957 році А. В. Скороход (дивіться з цього приводу [2]).

Модель випадкового поля Уітла останнім часом використовується в застосуваннях в геофізиці, гідрології, сейсмології, геології ([3], [4], [5]).

Ми розглянемо для поля Уітла дві статистичні задачі: задачу лінійної екстраполяції в центрі сфери за спостереженнями на сфері та задачу оцінювання невідомого середнього значення.

Випадкове поле Уітла. Математично коректний розгляд рівняння (1) можна провести на основі теорії Іто–Гельфанда узагальнених випадкових полів([6]).

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — ймовірнісний простір, $\mathcal{K}$ — простір Л. Шварца нескінченно диференційовних функцій на $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{K}'$-сукупність узагальнених функцій, заданих на $\mathcal{K}$ (сукупність всіх лінійних функціоналів неперервних в сенсі топології $\mathcal{K}$).

Узагальненим випадковим полем $\xi(\varphi,\omega)$ на $\mathbf{R}^n$ називається відображення

$$\xi(\varphi,\omega)\colon \mathcal{K}\times\Omega \to \mathbf{R}^1$$

таке, що:

1) для кожної функції $\varphi \in \mathcal{K}$ функція $\xi(\varphi,\omega)$ є випадкова величина;
2) з ймовірністю одиниця $\xi(\varphi,\omega) \in \mathcal{K}'$.

Припустимо, що $\mathbf{M}\xi(\varphi,\omega) = 0$, $\mathbf{M}\,|\xi(\varphi,\omega)|^2 < +\infty$ для всіх $\varphi \in \mathcal{K}$. Кореляційним функціоналом випадкового поля $\xi(\varphi,\omega)$ називається білінійний функціонал $B(\varphi_1,\varphi_2) = \mathbf{M}\,\xi(\varphi_1,\omega)\xi(\varphi_2,\omega)$ ($\varphi_1 \in \mathcal{K}$, $\varphi_2 \in \mathcal{K}$). Узагальнене випадкове поле $\xi(\varphi,\omega)$ є однорідним та ізотропним, якщо кореляційний функціонал $B(\varphi_1,\varphi_2)$ інваріантний відносно групи усіх рухів в $\mathbf{R}^n$.

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60G60, 60G12; Secondary 60G20, 60G25.
Key words and phrases. Випадкове поле, поле Уітла, екстраполяція.

"Білим шумом" на $\mathbf{R}^n$ називається узагальнене випадкове поле

$$w'(\varphi,\omega) = (-1)^n \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\, w(dx), \tag{2}$$

де $w(\cdot)$ — вінерівська випадкова міра на $\mathbf{R}^n$ (міра на σ-алгебрі борелівських множин в $\mathbf{R}^n$ така, що $\mathbf{M}\, w(S) = 0$' $\mathbf{M}\, w(S_1)w(S_2) = m(S_1 \cap S_2)$, $m(S)$ — лебегова міра на $\mathbf{R}^n$). Інтеграл в (2) — стохастичний інтеграл по вінерівській мірі.

Теорема 1 [6]. *Узагальнене випадкове поле, яке задовольняє рівнянню* (1), *є однорідним та ізотропним випадковим полем зі спектральною щільністю*

$$\Phi'(\lambda) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \frac{\lambda^{n-1}}{(\lambda^2 + c^2)^2}. \tag{3}$$

Це поле є звичайним випадковим полем лише при $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$. *Кореляційні функції в цих випадках мають відповідно вигляд*:

$$B(r) = \frac{1}{4c^3}(1 + cr)e^{-cr}, \tag{4}$$

$$B(r) = \frac{1}{4\pi c} r K_1(cr), \tag{5}$$

$$B(r) = \frac{1}{8\pi c} e^{-cr}. \tag{6}$$

Загальна формула для кореляційної функції

$$B(r) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^n} \left(\frac{c}{r}\right)^{n/2-2} K_{n/2-2}(cr), \tag{7}$$

де

$$K_\nu(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zch(t)} ch(\nu t)\, dt \tag{8}$$

модифікована функція Беселя третього роду [9].

Твердження теореми випливає з теореми 11 в [6] (розділ 1, §1) та співвідношень

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\nu+1} J_\nu(at)dt}{(t^2 + \beta^2)^{\mu+1}} = \frac{a^\mu \beta^{\nu-\mu}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} K_{\nu-\mu}(a\beta), \tag{9}$$

$$K_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \qquad K_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \frac{1}{z^3}(1 + z)e^{-z}$$

(див. [9], співвідношення 59 на стор. 110).

Задача лінійної екстраполяцій випадкового поля Уітла за спостереженнями на сфері

Припустимо, що однорідне та ізотропне випадкове поле $\xi(x)$ зі спектральною функцією $\Phi(x)$ спостерігається на сфері $S(r)$ радіуса r.

Має місце твердження

Теорема 2 [6, стор. 146]. *Лінійна оцінка* $\hat{\xi}(0)$ *значення* $\xi(0)$ *має вигляд*

$$\hat{\xi}(0) = \frac{r^{(n-2)/2}}{(2\pi)^{n/2}} \frac{\int_0^{+\infty} \lambda^{(2-n)/2} J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)\, d\Phi(\lambda)}{\int_0^{+\infty} \lambda^{n-2} J^2_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)\, d\Phi(\lambda)} \int_{S_n} \xi(x)\, dm_n, \tag{10}$$

де $m_n(\cdot)$ *— лебегова міра на* S_n. *Середньоквадратична помилка екстраполяції обчислюється за формулою*

$$\sigma^2(0,r) = \Phi(+\infty) - \frac{\left[\int_0^{+\infty} \lambda^{(2-n)/2} J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)\, d\Phi(\lambda)\right]^2}{\int_0^{+\infty} \lambda^{2-n} J^2_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)\, d\Phi(\lambda)}. \tag{11}$$

Використовуючи (10), (11) знайдемо $\hat{\xi}(0)$ та $\sigma^2(0,r)$ для випадкового поля Уітла зі спектральною щільністю (3).

Зазначимо, що справедливі такі твердження.

Лема 1.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{n/2} J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r) d\lambda}{(\lambda^2+c^2)^2} = \frac{1}{2} r c^{n/2-2} K_{n/2-2}(cr). \tag{12}$$

Твердження леми випливає з (9).

Лема 2.

$$\int_0^{+\infty} \frac{J^2_{\frac{n-2}{2}}(cr)\lambda}{(\lambda^2+c^2)^2} d\lambda = \frac{r}{4c} L_n(cr), \tag{13}$$

де

$$L_n(z) = I_{\frac{n-2}{2}}(z) \left\{K_{\frac{n}{2}}(z) + K_{\frac{n-4}{2}}(z)\right\} - K_{\frac{n-2}{2}}(z) \left\{I_{\frac{n}{2}}(z) + I_{\frac{n-4}{2}}(z)\right\}. \tag{14}$$

Доведення. Для доведення (13) використаємо співвідношення:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\nu-\mu+1}}{t^2+\beta^2} J_\mu(bt) J_\nu(at)\, dt = \beta^{\nu-\mu} I_\mu(b\beta) K_\nu(a\beta) \tag{15}$$

(співвідношення 57 з [9], ст. 110) при $\beta =$ c, $\mu = \nu = (n-2)/2$.

Будемо мати

$$\int_0^{+\infty} \frac{\lambda J^2_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)}{\lambda^2+c^2}\, d\lambda = I_{\frac{n-2}{2}}(cr) K_{\frac{n-2}{2}}(cr). \tag{16}$$

Продиференціюємо обидві частини (16) по c. Одержимо

$$\begin{aligned} -2c\int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{(\lambda^2+c^2)^2} J^2_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r) d\lambda &= \left[I_{\frac{n-2}{2}}(cr) K_{\frac{n-2}{2}}(cr)\right]' \\ &= r\left\{I'_{\frac{n-2}{2}}(cr) K_{\frac{n-2}{2}}(cr) + I_{\frac{n-2}{2}}(cr) K'_{\frac{n-2}{2}}(cr)\right\}. \end{aligned} \tag{17}$$

Використовуючи співвідношення

$$I'_\nu(z) = \frac{1}{2}\{I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z)\},$$

$$K'_\nu(z) = \frac{1}{2}\{K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z)\},$$

після деяких перетворень з (17) отримаємо твердження леми 2. □

Теорема 3. *Якщо випадкове поле Уітла* $\xi(x)$ *спостерігається на поверхні кулі з радіусом* r, *то лінійний прогноз* $\hat{\eta}(0)$ *значення* $\xi(0)$ *з мінімальною середньоквадратичною похибкою має вигляд*

$$\hat{\eta}(0) = \frac{2r^{(n-2)/2}}{(2\pi)^{n/2}} \frac{c^{(n-2)/2} K_{n/2-2}(cr)}{L_n(cr)} \int_{S_n} \xi(x)\, dm_n. \tag{18}$$

Середньоквадратична похибка екстраполяції дорівнює

$$\sigma^2(0,r) = \Phi(+\infty) - \frac{\left[\frac{1}{2} r c^{n/2-2} K_{n/2-2}(cr)\right]^2}{(r/(4c)) L_n(cr)}. \tag{19}$$

При $n = 2$ *та* $n = 3$ *формула* (18) *відповідно приймає вигляд*

$$\hat{\eta}(0) = \frac{K_1(cr)}{K_1(cr)I_0(cr) - K_0(cr)I_1(cr)} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(r,\varphi)\, d\varphi, \tag{20}$$

$$\eta(0) = \frac{2(cr)^2}{e^{cr} - 2cre^{-2cr} - e^{-cr}} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{S_3} \xi(x)\, dm_3. \tag{21}$$

Середньоквадратичні похибки відповідно дорівнюють

$$\sigma^2(0,r) = \frac{1}{4\pi c} \left\{ 1 - \frac{r^2 K_1^2(cr)}{K_1(cr)I_0(cr) - K_0(cr)I_1(cr)} \right\}, \tag{22}$$

$$\sigma^2(0,r) = \frac{1}{8\pi c} \left\{ 1 - \frac{c^2 r^2}{e^{2cr} - 2cr - 1} \right\}. \tag{23}$$

Задача про оцінювання невідомого середнього значення

Нагадаємо такий результат про лінійне оцінювання невідомого середнього значення однорідного та ізотропного випадкового поля.

Теорема 4 [9]. *Нехай випадкове поле*

$$\gamma(x) = a + \eta(x) \tag{24}$$

спостерігається на сфері з радіусом r, *де* $\eta(x)$ — *однорідне та ізотропне випадкове поле з нульовим математичним сподіванням. Серед всіх лінійних незміщених оцінок параметру* a *найменшу дисперсію має оцінка*

$$\hat{a} = \frac{1}{w_n} \int_{S_n} \xi(r,u)\, m_n(du). \tag{25}$$

Дисперсія цієї оцінки дорівнює

$$\mathbf{D}\,\hat{a} = 2^{n-2}\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right) \int_0^{+\infty} (\lambda r)^{2-n} J^2_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r) d\Phi(\lambda). \tag{26}$$

Зауважимо, що (r,u) — сферичні координати точки x, $\Phi(\lambda)$ — спектральна функція множин випадкового поля $\eta(x)$.

Якщо $\eta(x)$ в (24) є випадковим полем Уітла, то маємо такий результат:

Теорема 5. *Дисперсія лінійної незміщеної оцінки невідомого середнього значення випадкового поля Уітла дорівнює*

$$\mathbf{D}\,\hat{a} = \frac{\Gamma(n/2)}{8\pi^{n/2} r^{n-3} c} L_n(cr). \tag{27}$$

Зокрема при $n = 2$ *та* $n = 3$ *отримуємо відповідно*

$$\mathbf{D}\,\hat{a} = \frac{r}{4\pi c}[I_0(cr)K_1(cr) - I_1(cr)K_0(cr)],$$

$$\mathbf{D}\,\hat{a} = \frac{1}{64\pi c^4}\frac{1}{r}\left[1 - e^{-2cr} - 2cre^{-2cr}\right].$$

Література

1. P. Whittle, *On stationary processes in the plane*, Biometrika **41** (1954), 434–449.
2. М. Й. Ядренко, *Изотропные случайные поля марковского типа в эвклидовом и гильбертовом пространстве*, Труды Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике, Ереван, 19–25 сентября 1958 г., Издательство АН Армянской ССР, 1960, стр. 263–279.
3. M. D. Ruiz-Medina and M. J. Valderrama, *Orthogonal representations of random fields and application to geophisics data*, Journal of Applied Probability **34** (1997), 2458–2476.
4. I. Rodriguez-Iturbe and J. M. Mejia, *The design of rainfall networks in time and place*, Water Resources Research **10 (4)** (1974), 713–728.
5. J. Chilis and P. Delfiner, *Geostatics Modeling Spatial Uncertainty*, John Wiley, New York, 1999.
6. М. Й. Ядренко, *Спектральная теория случайных полей*, "Вища школа ", Киев, 1980.
7. И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, *Обобщенные функции*, Некоторые применения гармонического анализа, т. 4, "Физматиз", Москва, 1962.
8. Ю. А. Розанов, *Случайные поля и стохастические уравнения с частными производными*, "Наука", Москва, 1995.
9. Г. Бейтмен, А. Эрдейн, *Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра*, "Наука", Москва, 1966.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, 01033, м. Київ, вул. Володимирська, 64

Електронна адреса: ymi@mechmat.univ.kiev.ua

Надійшла 15/09/1999