Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 63, 2000, стор. 13–20

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 63, 2000, pp. 13–20

НЕСМЕЩЕННОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ТОЧНОСТИ ЦИФРОВЫХ ДИСКРЕТНО РАСКРАШЕННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 519.21

Ю. К. БЕЛЯЕВ

Резюме. Рассматривается задача получения несмещенных оценок, характеризующих точность соответствия полученных изображений идеально точным, ненаблюдаемым изображениям. Предполагается, что изображения состоят из большого числа элементов — пикселов. При раскраске пикселов наблюдаемого изображения используются классификаторы, для которых известны вероятности ошибочного выбора цвета. Полученные изображения могут быть улучшены путем перекраски, допускающей несмещенное оценивание соответствия перекрашенного изображения идеальному изображению.

1. Введение

В связи с развитием информационных технологий получения изображений актуальными являются задачи разработки методов оценки соответствия полученных изображений реальным объектам. При получении изображений могут использоваться данные, полученные с применением разнообразных методов измерения. При этом типичными являются изображения, которые существенно отличаются от наблюдаемых "невооруженным глазом". Примером могут служить карты местности, показывающие загрязнение вредными веществами, изображения внутренних органов пациентов. Оценка точности полученных изображений является сложной задачей, универсальное решение которой вряд ли возможно. Идея предлагаемого в этой статье подхода возникла у автора в связи с его исследованиями по выборочным методам контроля качества промышленной продукции, [1, 2, 3]. Результаты этих исследований докладывались автором в 70-х годах в Киеве на семинаре, руководимым А. В. Скороходом и В. С. Королюком.

При построении математических моделей контроля качества одной из основных идей является понятие идеального стандартного изделия, т.е. изделия, удовлетворяющего по своим параметрам всем требованиям стандарта. В таком случае предметом оценки является соответствие изготовленных изделий заданным ограничениям (допускам) на основные параметры. При контроле мы как бы сравниваем каждое изделие с идеальными стандартными изделиями. Возникает идея ввести понятие идеального изображения абсолютно точно отображающего свойства объекта исследований. В таком случае задача оценки точности полученных изображений была бы существенно проще. Мы могли бы рассчитывать различные показатели уклонений полученного изображения от идеального. Возможен ли такой подход, ведь идеальное изображение не наблюдаемо? При определенных условиях возможно использование статистических методов (несмещенного) оценивания уклонений полученного изображения от идеального ненаблюдаемого изображения. Однако задача

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 62F10, 62G09.

Работа поддержана грантами the Bank of Sweden Tercentenary Foundation и MISTRA, the Swedish Foundation of Strategic Environmental Research.

сравнения изображений существенно сложнее задачи контроля качества продукции. В этой работе даны условия, при которых возможно сравнение полученного изображения с идеальным. Скорее всего результаты такого сравнения выявят наличие существенных уклонений полученного изображения от идеального. В таком случае надо искать методы преобразования полученного изображения, которые сохраняют возможность оценивания уклонений преобразованного изображения от идеального изображения. Если оценки показывают уменьшение уклонений, то трансформированное изображение можно рассматривать как более точную аппроксимацию идеального изображения. Возможно потребуется получить еще одну или более аппроксимаций, уменьшающих уклонения. В статье рассматриваются изображения, получаемые с использованием конечного числа различных цветов. Примером таких изображений являются дискретно раскрашенные карты [6].

2. Постановка задачи и основные условия

Цифровое изображение состоит из большого числа элементов, так называемых пикселов. Каждый пиксел (pixel) отображается на экране или печатается на бумаге в виде квадрата, закрашенного определенным цветом. Допустим, что используется лишь конечное множество цветов $\mathcal{K}$, которые мы занумеруем целыми числами, $\mathcal{K} = \{1, 2, \dots, k_0\}$. Получаемые при этом изображения называются дискретно раскрашенными. Каждый пиксел задается тройкой чисел $\{i, j, c\}$, в которой i и j определяют положение пиксела, а c его цвет. Соседями (i, j)-пиксела $\{i, j, c_0\}$ являются пикселы: $\{i+1, j, c_u\}$, $\{i, j+1, c_r\}$, $\{i-1, j, c_d\}$ и $\{i, j-1, c_l\}$, расположенные соответственно сверху, справа, снизу и слева от центрального пиксела. Кратко такую конфигурацию пикселов назовем крестообразной. Ей соответствует набор координат $\mathcal{N}_c(i, j) = \{(i, j), (i+1, j), (i, j+1), (i-1, j), (i, j-1)\}$. Можно рассматривать и другие более сложные конфигурации пикселов, соседних с (i, j)-пикселом. Формально, идеальное изображение определяется списком

$$\{\{1, 1, c(1, 1)\}, \dots, \{n_x, n_y, c(n_x, n_y)\}\}.$$

Обозначим $c^\bullet(i, j)$ цвет (i, j)-пиксела, полученного в результате обработки некоторых статистических данных $\mathbf{z}(i, j) = \{\mathbf{x}(i, j), \mathbf{y}(i, j)\}$, полученных в результате наблюдений. Первая аппроксимация идеального изображения задается списком

$$\{\{1, 1, c^\bullet(1, 1)\}, \dots, \{n_x, n_y, c^\bullet(n_x, n_y)\}\}.$$

Мы ограничимся рассмотрением случая, когда каждое значение $c^\bullet(i, j)$ получается с использованием одного из методов классификации данных

$$\mathbf{z}(\mathcal{N}(i, j)) = \{\mathbf{z}(i', j') \colon (i', j') \in \mathcal{N}(i, j)\},$$

относящихся к конфигурации, определяемой некоторым списком координат $\mathcal{N}(i, j)$. Аналогично записываем $\mathbf{x}(\mathcal{N}(i, j)) = \{\mathbf{x}(i', j') \colon (i', j') \in \mathcal{N}(i, j)\}$. Пусть часть данных $\mathbf{x}(\mathcal{N}(i, j))$ определяет условные вероятности классификации $p_{kl}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i, j)))$, т.е., вероятности получения $c^\bullet(i, j) = l$ тогда, когда истинное значение $c(i, j) = k$, $k, l \in \mathcal{K}$. Полезно допустить возможность отсрочки классификации, формально полагая $l = \varnothing$ в тех случаях, когда велика вероятность ошибочной классификации. Далее мы будем использовать заглавные буквы для выделения случайных величин. Например, $C^\bullet(i, j)$ обозначает случайную величину, тогда как $c^\bullet(i, j)$ является ее значением.

Сформулируем следующие основные предположения.

Допустим, что для каждого (i, j) выбрана окрестность $\mathcal{N}(i, j)$, $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}(i, j) \colon 1 \le i \le n_x, 1 \le j \le n_y\}$ — множество всех таких окрестностей.

A1. Все результаты классификации $c^\bullet(i, j)$, $1 \le i \le n_x$, $1 \le j \le n_y$, являются значениями условно независимых случайных величин $C^\bullet(i, j)$ при условии задания значений $\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j))$. Условные распределения $C^\bullet(i,j)$ определяются только значениями $c(i,j)$ и $\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j))$.

Если окрестности являются одноточечными, $\mathcal{N}(i,j) = (i,j)$, то при выполнения условия **A1** $C^\bullet(i,j)$ являются условно независимыми при задании значений $\mathbf{x}(i,j)$. Если $\mathcal{N}(i,j) = \mathcal{N}_c(i,j)$, то значения $C^\bullet(i_1,j_1)$ и $C^\bullet(i_2,j_2)$ будут условно независимыми при задании значений цвета и $\mathbf{x}(i',j')$ на $\mathcal{N}_c(i_1,j_1)\cup\mathcal{N}_c(i_2,j_2)$. Если все значения $\mathbf{x}(i,j)$, $1\le i\le n_x$, $1\le j\le n_y$, известны, то условная вероятность

$$\begin{aligned}\mathsf{P}[C^\bullet(i_1,j_1) = l_1, C^\bullet(i_2,j_2) = l_2 \mid c(i_h,j_h) = k_h, \mathbf{x}(\mathcal{N}), h = 1,2]\\ = \prod_{h=1,2} \mathsf{P}[C^\bullet(i_h,j_h) = l_h \mid c(i_h,j_h) = k_h, x(\mathcal{N}(i_h,j_h))]\\ = p_{k_1,l_1}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i_1,j_1)))p_{k_2,l_2}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i_2,j_2))).\end{aligned}$$

Оценивание вероятностей классификации $p_{kl}(\cdot)$ является самостоятельной, сложной статистической задачей. В некоторых приложениях эта задача решается с использованием точной информации об истинных значениях $c(i,j)$ для небольшой доли пикселов. Не отвлекаясь от основной задачи оценивания точности изображений мы введем следующие допущения.

A2. Вероятности классификации $p_{kl}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j)))$, $k\in\mathcal{K}$, $l\in\mathcal{K}\cup\varnothing$, являются известными функциями наблюдений $\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j))$.

Матрица вероятностей возможных классификаций $\mathbb{P}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j))) = (p_{kl}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j))))$ для (i,j)-пиксела имеет k_0 строк и k_0+1 столбец. Исключая по одной строке из транспонированной матрицы вероятностей классификации $\mathbb{P}^T(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j)))$, получим $k+1$ квадратных матриц $\mathbb{P}_h(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j)))$, $h\in\mathcal{K}\cup\varnothing$, размера $k_0\times k_0$. $\mathbb{P}_\varnothing(\cdot)$ соответствует исключению последней строки из матрицы $\mathbb{P}^T(\cdot)$. Следующее условие дает возможность получить необходимые нам несмещенные оценки.

A3. Матрицы вероятностей классификации $\mathbb{P}_h(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j)))$, $h\in\mathcal{K}\cup\varnothing$, при любых наблюденных значениях $\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j))$ имеют ранг k_0.

При выполнении условия **A3** существуют матрицы $\mathbb{P}_h^{-1}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j))) = (p_h^{lk}(\mathcal{N}(i,j)))$. Условие **A3** можно ослабить до требования ранга k_0 только у матриц $\mathbb{P}_\varnothing(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j)))$, $1\le i\le n_x$, $1\le j\le n_y$. Следующий пример иллюстрирует значение условия **A3**.

Пусть истинное изображение получено с использованием пикселов только двух цветов: белого и черного, $\mathcal{K} = \{1,2\}$. При отложенной классификации пикселы заполняются серым цветом. В этом случае $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{1\varnothing}\\ p_{21} & p_{22} & p_{2\varnothing}\end{pmatrix}$. Для краткости записи мы опускаем аргументы $\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j))$. В этом случае имеем $\mathbb{P}_\varnothing = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21}\\ p_{12} & p_{22}\end{pmatrix}$. Допустим, что ранг матрицы $\mathbb{P}_\varnothing$ меньше $k=2$. Тогда ее детерминант $d(\varnothing) = p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21} = 0$ и $q := p_{11}/p_{12} = p_{21}/p_{22}$. Если $q=0$, то мы имеем вырожденный случай, при котором $c^\bullet(i,j) = 2$. Если же $q>0$, то

$$\frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}} = \frac{p_{21}}{p_{21}+p_{22}} = \frac{q}{1+q},$$

т.е., условные вероятности классификации не зависят от того каким является истинное значение $c(i,j)$. Использовать такую классификацию нельзя.

3. Несмещенные оценки чисел правильно и ошибочно классифицированных пикселов и фрагментов изображений

Сравнение идеального изображения, в котором раскраска пикселов задается ненаблюдаемыми значениями $c(i,j)$, с приближенным изображением с полученными значениями $c^\bullet(i,j)$, можно делать различными способами. Самым простым было бы сравнение пар $\{c(i,j), c^\bullet(i,j)\}$. Если $c(i,j) = c^\bullet(i,j)$, то раскраска сделана правильно, если же $c(i,j) \neq c^\bullet(i,j)$, то раскраска (i,j)-пиксела приближенного изображения сделана ошибочно. Пусть $I(A) = 1$, если событие A выполнено и $I(A) = 0$, если не выполнено. Число пар $\{c(i,j), c^\bullet(i,j)\} = \{k, l\}$ представимо суммой индикаторных функций

$$n^\bullet_{kl} := \sum_{(i,j)} I(c(i,j) = k) I(c^\bullet(i,j) = l), \tag{1}$$

где сумма берется по всем позициям (i,j), составляющим изображение. Чем больше числа кросс-классификации $n^\bullet_{kl}$, $k \neq l$, тем хуже соответствует приближенное изображение идеальному изображению. Числа $n^\bullet_{kl}$, $k \in \mathcal{K}$, $l \in \mathcal{K} \cup \varnothing$, не наблюдаются. Однако существуют несмещенные оценки этих чисел. Для получения более полной характеризации соответствия идеального и приближенного изображений можно сравнивать соответствие небольших фрагментов идеального и приближенного изображений. В качестве примера рассмотрим крестообразные окрестности идеального изображения, соответствующих угловому фрагменту на позиции (i,j)

$$\mathcal{A}_{k_1,k_2} = \{c(i,j) = c(i+1,j) = c(i,j+1) = k_1, c(i-1,j) = c(i,j-1) = k_2\}, \tag{2}$$

$k_1 \neq k_2$. Для приближенного изображения определим $\mathcal{A}^\bullet_{k_1,k_2}(i,j)$ аналогичным образом, заменив в (2) c на $c^\bullet$. Конфигурации отличные от $\mathcal{A}^\bullet_{k_1,k_2}(i,j)$, обозначим $\mathcal{A}^{\bullet c}_{k_1,k_2}(i,j)$. Число позиций (i,j), на которых идеальное изображение имеет угловой фрагмент $\mathcal{A}_{k_1,k_2}(i,j)$, тогда как приближенное изображение имеет другую крестообразную конфигурацию, записывается в виде суммы индикаторов

$$n^\bullet\left(\mathcal{A}_{k_1,k_2}, \mathcal{A}^{\bullet c}_{k_1,k_2}\right) = \sum_{(i,j)} I(\mathcal{A}_{k_1,k_2}(i,j))(1 - I(\mathcal{A}^\bullet_{k_1,k_2}(i,j))). \tag{3}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} I(\mathcal{A}_{k_1,k_2}(i,j)) = I(c(i,j) = k_1) I(c(i+1,j) = k_1) \\ \times I(c(i,j+1) = k_1) I(c(i-1,j) = k_2) I(c(i,j-1) = k_2). \end{aligned}$$

Индикатор $I(\mathcal{A}^\bullet_{k_1,k_2}(i,j))$ задается аналогичным произведением с заменой c на $c^\bullet$. Подобным образом можно определить фрагменты изображения соответствующие его особым деталям, таким как границы между множествами с разными цветами, "линейные" объекты (дороги, кровеносные сосуды). Для получения несмещенных оценок сумм индикаторов (1) и (2) надо найти несмещенные оценки индикаторов $I(c(i,j) = k)$, $k \in \mathcal{K}$.

Мы рассмотрим простейший случай сравнения всех пар пикселов $\{i, j, c(i,j)\}$ и $\{i, j, c^\bullet(i,j)\}$. Беря математическое ожидание от обеих частей тождества

$$I(C^\bullet(i,j) = l) = \sum_{k \in \mathcal{K}} I(c(i,j) = k) I(C^\bullet(i,j) = l), \tag{4}$$

и используя условия **A1** и **A2**, получаем соотношение

$$\mathsf{E}[I(C^\bullet(i,j) = l)] = \sum_{k \in \mathcal{K}} I(c(i,j) = k) p_{kl}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j))). \tag{5}$$

Поскольку $l \in \mathcal{K} \cup \varnothing$, то мы имеем $k_0 + 1$ соотношений, задаваемых (5). Убрав усреднение индикаторов $I(C^\bullet(i,j) = l)$ для каждой позиции (i,j) получаем следующую систему из $(k_0 + 1)$ уравнений, линейных относительно k_0 неизвестных $\hat{I}(c(i,j) = k)$

$$I(C^\bullet(i,j) = l) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \hat{I}(c(i,j) = k) p_{kl}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j))), \qquad l \in \mathcal{K} \cup \varnothing. \tag{6}$$

Условие **A3** гарантирует существование единственного решения при исключении одного из уравнений системы (6). Исключив h-е уравнение в системе (6), получим оценки индикаторов

$$\hat{I}_h(c(i,j)=k) = \sum_{l\in\mathcal{K}\cup\varnothing\setminus h} p_h^{lk}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j)))I(C^\bullet(i,j)=l), \qquad k\in\mathcal{K}. \tag{7}$$

Непосредственная проверка показывает их несмещенность

$$\mathsf{E}\left[\hat{I}_h(c(i,j)=k)\right] = I(c(i,j)=k), \qquad k\in\mathcal{K}. \tag{8}$$

В случае, когда классификация не может быть отложена система (6) содержит k_0 уравнений. Тогда решением являются несмещенные оценки (7) с $h=\varnothing$. Эти оценки имеют минимальные дисперсии. В общем случае можно использовать взвешенные несмещенные оценки

$$\hat{I}_{\mathbf{w}_k}(c(i,j)=k) = \sum_{h\in\mathcal{K}\cup\varnothing} w_{kh}\hat{I}_h(c(i,j)=k), \tag{9}$$

$\mathbf{w}_k=(w_{k\varnothing},w_{kk_0},\ldots,w_{k1})$, $w_{k_1,k_2}\geq 0$, $w_{k\varnothing}+w_{kk_0}+\cdots+w_{k1}=1$, $k\in\mathcal{K}$. Пусть $N_{kl}^\bullet$ есть случайное число пикселов, у которых $c(i,j)=k$ в идеальном изображении и $C^\bullet(i,j)=b$ в приближенном изображении. Аналогично соотношению (1) имеем

$$N_{kl}^\bullet := \sum_{(i,j)} I(c(i,j)=k)I(C^\bullet(i,j)=l). \tag{10}$$

Из (7) и (9) получаем, что несмещенной оценкой для случайной величины $N_{kl}^\bullet$ является

$$\hat{N}_{kl}^\bullet := \sum_{(i,j)} \hat{I}_{\mathbf{w}_k}(c(i,j)=k)p_{kl}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j))). \tag{11}$$

Несмещенность означает, что

$$\mathsf{E}\left[\hat{N}_{kl}^\bullet - N_{kl}^\bullet\right] = 0, \qquad k\in\mathcal{K},\ l\in\mathcal{K}\cup\varnothing.$$

Общее число пикселов $N=\sum_{k\in\mathcal{K},l\in\mathcal{K}\cup\varnothing}N_{kl}$ велико и для стандартных изображений достигает нескольких миллионов, поэтому возможно использование ассимптотических методов теории вероятностей и математиской статистики для выяснения точности несмещенных оценок (11). Нормированные уклонения несмещенных оценок $\hat{N}_{kl}$ можно записать в виде сумм

$$D_{kl}(N) = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\hat{N}_{kl}^\bullet - N_{kl}^\bullet\right) = \sum_{(i,j)} U_{kl}(i,j,\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j))), \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} &U_{kl}(i,j,\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j))) \\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\hat{I}_{\mathbf{w}_k}(c(i,j)=k)p_{kl}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j))) - I(c(i,j)=k)I(C^\bullet(i,j)=l)\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Случайные величины $\{U_{kl}(i,j,\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j)))\}$ являются взаимно независимыми при заданных значениях $\{\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j))\}$ и имеют нулевые средние. Можно доказать, что совместные распределения $\{D_{kl}(N)\}_{k\in\mathcal{K},l\in\mathcal{K}\cup\varnothing}$ слабо сближаются с семейством $k_0\times(k_0+1)$-мерных нормальных распределений при $n\to\infty$. Определение слабого сближения является естественным обобщением слабой сходимости [5, 7, 8]. Используя несмещенные оценки индикаторов (7), можно получить несмещенные оценки дисперсий и ковариаций случайных величин $D_{kl}(N)$. Мы ограничимся случаем использования оценок (7) при $h = \varnothing$. Несмещенными оценками дисперсий $\hat{v}_{kl}^2 = \mathsf{E}[D_{kl}^2(N)]$ являются

$$\hat{v}_{kl}^2(N) = \frac{1}{N}\sum_{(i,j)}\Big(p_{kl}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j))) - 2p_{\varnothing}^{lk}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j)))p_{kl}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j))) + 1\Big) \times p_{kl}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j)))\hat{I}_{\varnothing}(c(i,j) = k). \tag{14}$$

Несмещенными оценками ковариаций $c_{k_1,l_1;k_2,l_2}(N) = \mathsf{E}[D_{k_1,l_1}(N)D_{k_2,l_2}(N)]$ являются

$$\begin{aligned}
&\hat{c}_{k_1,l_1;k_2,l_2}(N) \\
&\quad = \frac{1}{N}\sum_{(i,j)}\Bigg(p_{k_1l_1}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j)))p_{k_2l_2}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j))) \\
&\qquad\qquad \times \sum_{k\in\mathcal{K}}\Big(\sum_{l\in\mathcal{K}} p_{kl}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j)))p_{\varnothing}^{lk_1}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j)))p_{\varnothing}^{lk_2}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j)))\Big) \\
&\qquad\qquad \times \hat{I}_{\varnothing}(c(i,j) = k) \\
&\qquad\quad - p_{k_2l_2}(\mathbf{x}(i,j))p_{\varnothing}^{l_1k_2}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j)))p_{k_1l_1}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j))) \\
&\qquad\qquad \times \hat{I}_{\varnothing}(c(i,j) = k_1) \\
&\qquad\quad - p_{k_1l_1}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j)))p_{\varnothing}^{l_2k_1}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j)))p_{k_2l_2}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j))) \\
&\qquad\qquad \times \hat{I}_{\varnothing}(c(i,j) = k_2) \\
&\qquad\qquad\quad + p_{k_1l_1}(\mathbf{x}(\mathcal{N}(i,j)))\hat{I}_{\varnothing}(c(i,j) = l_1)I(l_1 = l_2)I(k_1 = k_2)\Bigg).
\end{aligned} \tag{15}$$

Полученные результаты можно сформулировать в виде следующего утверждения

Теорема 1. *При выполнении условий* **A1**, **A2** *и* **A3** *несмещенная оценка индикатора* $I(c(i,j) = k)$ *задается выражением* (7), $1 \le i \le n_x$, $1 \le j \le n_y$. *Несмещенные оценки дисперсий* $v_{kl}^2(N)$ *уклонения* $D_{kl}(N)$ *и ковариации* $c_{k_1,l_1;k_2,l_2}(N)$ *пары уклонений* $\{D_{k_1,l_1}(N), D_{k_2,l_2}(N)\}$ *задаются выражениями* (14) *и* (15) *соответственно*, $k, k_1, k_2 \in \mathcal{K}$, $l, l_1, l_2 \in \mathcal{K} \cup \varnothing$.

4. Оценивание точности изображений при переклассификации

Допустим, что имеется определенная априорная информация о нетипичности определенного типа фрагментов для идеального изображения. Наличие большого числа нетипичных фрагментов в приближеном изображении свидетельствует об ошибочной раскраске пикселов. При получении второго приближенного изображения большинство нетипичных фрагментов должно быть преобразовано в какие то другие более типичные фрагменты. Нельзя исключить возможности, что второе приближенное изображение будет менее точным чем первое приближенное изображение. Поэтому желательно использовать такие правила изменения раскраски пикселов, при которых сохраняется возможность получения статистических (несмещенных) оценок величин характеризующих точность соответствия второго приближенного изображения идеальному изображению.

Следующий пример иллюстрирует возможность несмещенного оценивания характеристик точности такого соответствия при определенных правилах раскраски пикселов во втором приближенном изображении. Допустим, что в идеальном изображении нетипичными являются крестообразные фрагменты, в которых центральный пиксел имеет цвет отличный от цвета большинства соседних пикселов. В таких фрагментах представляется целесообразным заменить цвет центрального пиксела на цвет окружающих его пикселов. В итоге получим второе приближенное изображение. Все величины, относящиеся к полученному второму приближенному изображению, будем снабжать двумя жирными точками. Например, $C^{\bullet\bullet}(i,j)$ является случайной величиной, определяющей цвет (i,j)-пиксела. Числа кросс-классификации идеального и второго приближенного изображения задаются в виде суммы индикаторов

$$N_{kl}^{\bullet\bullet} = \sum_{(i,j)} I(c(i,j)=k)I(C^{\bullet\bullet}(i,j)=l), \qquad k \in \mathcal{K},\ l \in \mathcal{K} \cup \varnothing. \tag{16}$$

Введем следующие обозначения: $I_{0l}^{\bullet}(i,j) = I(C^{\bullet}(i,j)=l)$,

$$\begin{aligned} I_{1l}^{\bullet}(i,j) &= I(C^{\bullet}(i+1,j)=l), \qquad & I_{2l}^{\bullet}(i,j) &= I(C^{\bullet}(i,j+1)=l),\\ I_{3l}^{\bullet}(i,j) &= I(C^{\bullet}(i-1,j)=l), \qquad & I_{4l}^{\bullet}(i,j) &= I(C^{\bullet}(i,j-1)=l), \end{aligned}$$

$$I_l^{\bullet\bullet}(i,j) = \left(\prod_{h\in\{1,2,3,4\}} I_{hl}^{\bullet}(i,j) + \sum_{g=1}^{4} \left(\prod_{h\in\{1,2,3,4\}\setminus\{g\}} I_{hl}^{\bullet}(i,j) \right) \left(1 - I_{gl}^{\bullet}(i,j) \right) \right) I(l \neq \varnothing).$$

Имеем $I_l^{\bullet\bullet}(i,j) = 1$, если цвет центрального (i,j)-пиксела во втором приближенном изображении соответствует цвету большинства из соседних пикселов. В противном случае $I_l^{\bullet\bullet}(i,j) = 0$. В этих обозначениях имеем

$$I(C^{\bullet\bullet}(i,j)=l)I(c(i,j)=k) = \Big(I_l^{\bullet\bullet}(i,j) + (1 - I_l^{\bullet\bullet}(i,j)) I_{0l}^{\bullet}(i,j) \Big) I(c(i,j)=k).$$

При выполнении условий **A1**–**A3** получаем несмещенную оценку чисел кросс-классификации, определяемых соотношением (16)

$$\hat{N}_{kl}^{\bullet\bullet} = \sum_{(i,j)} \Big(I(C^{\bullet\bullet}(i,j)=l)I(c(i,j)=k) \Big)^{\wedge},$$

где

$$\begin{aligned} &\Big(I(C^{\bullet\bullet}(i,j)=l)I(c(i,j)=k) \Big)^{\wedge} \\ &\qquad = \left(I_l^{\bullet\bullet}(i,j) + \left(1 - \sum_{l'\in\mathcal{K}} I_{l'}^{\bullet\bullet}(i,j) \right) p_{kl}(\mathcal{N}(\mathbf{x}(i,j))) \right) \hat{I}\mathbf{w}_k(c(i,j)=k) \end{aligned}$$

для $k \in \mathcal{K}$, $l \in \mathcal{K} \cup \varnothing$. Можно показать, что распределения уклонений

$$\left\{ \hat{N}_{kl}^{\bullet\bullet} - N_{kl}^{\bullet\bullet} \right\}_{k\in\mathcal{K},\, l\in\mathcal{K}\cup\varnothing}$$

сближаются с нормальными распределениями. Используя **A1**–**A3**, можно получить несмещенные оценки дисперсий и ковариаций этих уклонений. В связи с громоздкостью таких несмещенных оценок мы не приводим их здесь.

5. Заключение

Наиболее ограничительным в предлагаемом подходе является требование независимости случайных величин $\{C^{\bullet}(i,j)\}_{1\le i\le n_x, 1\le j\le n_y}$ в условии **A1**. Условие **A1** можно ослабить, допуская зависимость $C^{\bullet}(i',j')$ и $C^{\bullet}(i'',j'')$ лишь для близких пикселов. И в таком случае использование метода моментов дает те же несмещенные оценки (7) и (11). Однако существенные трудности возникают при получении аппроксимаций распределений уклонений этих оценок на основе получения формул, аналогичных (14) и (15). Обобщение центральной предельной перевыборочной теоремы для случайных последовательностей работы [4] дает возможность получения аппроксимаций для распределений уклонений оценок (11) в условиях финитной зависимости случайных величин $C^{\bullet}(i,j)$. Здесь следует использовать методы блочных перевыборок.

Численные примеры использования предложенных методов к оценке точности дискретно раскрашенных карт приведены в работе [6]. Там же даны примеры использования перевыборочных методов.

Благодарность. Автор благодарен редколлегии журнала за возможность публикации этой статьи в юбилейном номере журнала, посвященном 70-летию А. В. Скорохода, чей вклад в развитие теории вероятностей трудно переоценить.

Литература

1. Ю. К. Беляев, *Вероятностные методы выборочного контроля*, "Наука", Москва, 1975.
2. ———, *Последующие оценки при выборочном контроле по качественному признаку с ошибками классификации*, Доклады АН СССР **231** (1975), № 3, 521–524.
3. ———, *Статистические методы в теории надежности*, "Знание", Москва, 1978.
4. ———, *Central limit resampling theorems for m-dependent heterogeneous random variables*, Research Report 5, Department of Mathematical Statistics, Umeå University, 1996.
5. ———, *The continuity theorem and its application to resampling from sums of random variables*, Theory of Stochastic Processes **3 (19)** (1997), № 1–2, 100–109.
6. ———, *On the accuracy of discretely colored maps created by classifying remotely sensed data*, Research Report 10, Department of Forest Resource Management and Geomatics, Sweden, 2000.
7. Yu. K. Belyaev and S. Sjöstedt, *Resampling from independent heterogeneous random variables with varying mean values*, Theory of Stochastic Processes **3 (19)** (1997), № 1–2, 121–131.
8. Yu. K. Belyaev and S. Sjöstedt-de Luna, *Weakly approachning sequences of random distributions*, Journal of Applied Probability **37** (2000), 807–822.

Department of Mathematical Statistics, Umeå University, 901 87 Umeå, Sweden
Электронный адрес: yuri.belyaev@matstat.umu.se

Department of Forest Resource Management and Geomatics, Swedish University of Agricultural Sciences, Umeå, 901 83, Sweden
Электронный адрес: yuri.belyaev@resgeom.slu.se

Поступила 10/04/2000