Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 63, 2000, стор. 21–25

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 63, 2000, pp. 21–25

ПРО ФУНКЦІОНАЛЬНУ ГРАНИЧНУ ТЕОРЕМУ ДЛЯ ЧАСОВИХ РЯДІВ ДРОБОВИХ ПРОЦЕСІВ

УДК 519.21

В. В. БУЛДИГІН ТА А. Б. ІЛЬЄНКО

Резюме. В роботі для часових рядів дробових процесів встановлюється функціональна гранична теорема в просторі функцій без розривів другого роду.

Нехай на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$ задано стохастично неперервний однорідний випадковий процес з незалежними приростами $(\zeta(s), s \in \mathbf{R})$; $\zeta(0) = 0$. Для спрощення вважаємо цей процес центрованим та (якщо не вказано протилежне) позбавленим гауссівської компоненти. Оскільки процес є однорідним, його міра Леві набуває вигляду

$$\Pi(s, dx) = |s|\Pi(dx),$$

де $\Pi(dx)$ — σ-скінченна міра, яку визначено на борелівських множинах дійсної прямої $\mathbf{R}$. Для кожного натурального p позначимо

$$\Pi_p = \int_{-\infty}^{\infty} x^p \, \Pi(dx), \qquad \overline{\Pi}_p = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p \, \Pi(dx)$$

і вважатимемо надалі, що $\Pi_2 < \infty$.

Розглянемо стаціонарний дробовий процес $(\theta(t), t \in \mathbf{R})$, де

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-s) \, d\zeta(s), \tag{1}$$

і інтеграл розуміється як інтеграл за процесом з ортогональними приростами. Цей процес визначений коректно для будь-якої функції відгуку $g \in L_2(\mathbf{R})$ (див., наприклад, [1]). Дробові процеси та деякі їх властивості розглянуті, наприклад, в [2].

Нехай

$$\Theta_n = (\Theta_n(t), t \in [0,1]), \qquad n \geq 1,$$

де

$$\Theta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} \theta(kh),$$

а $h > 0$ — фіксована стала. В роботі вивчається збіжність за розподілом випадкових процесів Θ_n при $n \to \infty$ до вінерівського процесу в просторі $D[0,1]$ функцій без розривів другого роду з топологією Скорохода [3], [4]. Аналогічні задачи для строго стаціонарних процесів в термінах перемішування розглядалися, наприклад, в [5].

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60F17; Secondary 60G10.

Характеристична функція скінченновимірних розподілів процесу $\Theta_n(t)$ має вигляд:

$$\begin{aligned}
&\varphi_n(t_1,\dots,t_m;\lambda_1,\dots,\lambda_m)\\
&= \exp\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Bigg\{\exp\left(\frac{ix}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\sum_{k=0}^{[nt_i]-1}g(s+kh)\right)\\
&\qquad -1-\frac{ix}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\sum_{k=0}^{[nt_i]-1}g(s+kh)\Bigg\}\,ds\,\Pi(dx),\\
&\qquad t_1,\dots,t_m\in[0,1],\ \lambda_1,\dots,\lambda_m\in\mathbf{R}.
\end{aligned}\tag{2}$$

Це співвідношення може бути легко одержано з леми 5.2.1 в [2]. З формули (2) просто одержується вигляд корреляційної функції процесу $\Theta_n(t)$:

$$R_n(t_1,t_2)=\mathsf{E}\,\Theta_n(t_1)\Theta_n(t_2)=\frac{\Pi_2}{n}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{[nt_1]-1}g(s+kh)\right]\left[\sum_{k=0}^{[nt_2]-1}g(s+kh)\right]ds. \tag{3}$$

Позначимо

$$G(s)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}g(s+kh),\qquad \overline{G}(s)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|g(s+kh)|,\qquad s\in\mathbf{R},$$

якщо останній ряд збігається.

Теорема 1. *Нехай виконані умови*

1) $\Pi_4<\infty$,
2) $g\in L_1(\mathbf{R})$,
3) $\sup_{s\in\mathbf{R}}\overline{G}(s)<\infty$,
4) $G(s)\neq 0$ *на множині додатної міри Лебега.*

Тоді процеси Θ_n збігаються за розподілом до процесу $\Pi_2^{1/2}\mathcal{I}w$ в просторі $D[0,1]$ при $n\to\infty$, де $\mathcal{I}=\int_{-\infty}^{\infty}g(s)G(s)\,ds$, а $w=(w(t),t\in[0,1])$ — стандартний вінерівський процес.

Для доведення теореми знадобиться наступне твердження.

Лема 1. *Якщо*

1) $\Pi_2<\infty$

та виконані умови 2)–4) *теореми* 1, *то*

$$\lim_{n\to\infty}R_n(t_1,t_2)=\Pi_2\mathcal{I}^2\min\{t_1,t_2\},\qquad t_1,t_2\in[0,1].$$

Доведення. Внаслідок співвідношення

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(s)G(s)\,ds=\int_0^h G^2(s)\,ds$$

та умови 4) маємо, що $\mathcal{I}>0$ і граничний процес є невиродженим. Далі, нехай $t_1<t_2$. Для кожного $j\geq 1$ позначимо $A_j=\{n\geq 1\colon [nt_1]=j\}$. Легко бачити, що жодна така множина не порожня і потужність кожної з них дорівнює r або $r+1$, де $r=[1/t_1]$. Нехай $n_j^{(l)}, l=1,\dots,r$ — це l-ий за величиною елемент A_j. Так же визначаємо $n_j^{(r+1)}$, якщо потужність A_j дорівнює $r+1$, і покладаємо його рівним $n_j^{(r)}$ в протилежному випадку. Тепер кожне n належить якій-небудь з одержаних

$r+1$ послідовностей, і для кожного $l = 1, \dots, r+1$ величина $[n_j^{(l)} t_1]$ послідовно без повторювань приймає всі значення натурального ряду. Покажемо, що для кожного l

$$\lim_{j\to\infty} R_{n_j^{(l)}}(t_1, t_2) = \Pi_2 \mathcal{I}^2 t_1 .$$

З цього безпосередньо випливає твердження леми. Для фіксованого l покладемо $c_m = [n_j^{(l)} t_2]$, де j обрано таким, що $[n_j^{(l)} t_1] = m$. Легко бачити, що:

C1) $\lim_{m\to\infty}(c_m - m) = \infty$,
C2) $\sup_{m\geq 1}(c_{m+1} - c_m) < \infty$.

З формули (3) випливає, що

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} R_{n_j^{(l)}}(t_1, t_2) &= \Pi_2 t_1 \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} g(s+kh) \sum_{k=0}^{c_m-1} g(s+kh)\, ds \\
&= \Pi_2 t_1 \lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Bigg[\sum_{k=0}^{m} g(s+kh) \sum_{k=0}^{c_{m+1}-1} g(s+kh) \\
&\qquad\qquad - \sum_{k=0}^{m-1} g(s+kh) \sum_{k=0}^{c_m-1} g(s+kh) \Bigg] ds \qquad (4) \\
&= \Pi_2 t_1 \lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \sum_{k=-m}^{c_m-m-1} g(s+kh)\, ds \\
&\quad + \Pi_2 t_1 \lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{c_{m+1}-c_m-1} g(s+kh) \sum_{k=-c_m}^{m-c_m} g(s+kh)\, ds.
\end{aligned}$$

Внаслідок умови 3), властивостей C1) та C2) і теореми Лебега про мажоровану збіжність перший доданок дорівнює $\Pi_2 t_1 \int_{-\infty}^{\infty} g(s)G(s)\, ds$, а другий — нулю. Якщо $t_1 = t_2$, то потрібний результат випливає з (4) при $c_m = m$. Лема доведена. $\square$

Доведення теореми 1. Добре відомо (див., наприклад, [5]), що для доведення збіжності за розподілом послідовності випадкових елементів з D необхідно показати збіжність їх скінченновимірних розподілів та щільність розподілів цієї послідовності в D.

1. Збіжність скінченновимірних розподілів. Згідно з методом Крамера–Уолда достатньо довести, що для будь-яких $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbf{R}$

$$\alpha_1 \Theta_n(t_1) + \dots + \alpha_m \Theta_n(t_m) \xrightarrow{d} \Pi_2^{1/2} \mathcal{I}[\alpha_1 w(t_1) + \dots + \alpha_m w(t_m)], \qquad n \to \infty. \qquad (5)$$

З леми 1 випливає, що дисперсія лівої частини (5) збігається при $n \to \infty$ до дисперсії правої частини. Тому (5) випливає з формули (2) та співвідношення

$$\begin{aligned}
\Bigg| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Bigg[&\exp\left(\frac{ix\lambda}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{k=0}^{[nt_i]-1} g(s+kh) \right) - 1 \\
&- \frac{ix\lambda}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{k=0}^{[nt_i]-1} g(s+kh) \Bigg] ds\, \Pi(dx) \\
&+ \frac{\Pi_2 \lambda^2}{2n} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{k=0}^{[nt_i]-1} g(s+kh) \right]^2 ds \Bigg|
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\overline{\Pi}_3|\lambda|^3 \int_{-\infty}^{\infty} \left|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{k=0}^{[nt_i]-1} g(s+kh)\right|^3 ds}{6n\sqrt{n}}$$
$$\leq \frac{\overline{\Pi}_3|\lambda|^3\|g\|_{L_1(\mathbf{R})}}{6\sqrt{n}} \sup_{s\in\mathbf{R}} \overline{G}^2(s)\cdot\left(\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|\right)^2 \sum_{i=1}^{m}|\alpha_i t_i| \to 0, \qquad n\to\infty.$$

2. Щільність. Перевіримо, що при $\gamma = 2$, $\alpha = 2$ і деякому $K > 0$ задовольняється критерій щільності

$$\limsup_{n\to\infty} \mathsf{E}\left\{|\Theta_n(t)-\Theta_n(t_1)|^\gamma |\Theta_n(t_2)-\Theta_n(t)|^\gamma\right\} \leq K|t_2-t_1|^\alpha \tag{6}$$

(див., наприклад, [6]). З формули (2) одержимо:

$$\mathsf{E}\,|\Theta_n(t)-\Theta_n(t_1)|^4 = \frac{\Pi_4}{n^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{[nt]-[nt_1]-1} g(s+kh)\right]^4 ds$$
$$+3\left\{\frac{\Pi_2}{n}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{[nt]-[nt_1]-1} g(s+kh)\right]^2 ds\right\}^2.$$

Інтеграли в правій частині легко оцінити:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{[nt]-[nt_1]-1} g(s+kh)\right]^4 ds \leq \sup_{s\in\mathbf{R}} \overline{G}^2(s)\|g\|^2_{L_2(\mathbf{R})}(n(t-t_1)+1)^2,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{[nt]-[nt_1]-1} g(s+kh)\right]^2 ds \leq \sup_{s\in\mathbf{R}} \overline{G}(s)\|g\|_{L_1(\mathbf{R})}(n(t-t_1)+1).$$

Аналогічно розглядається $\mathsf{E}\,|\Theta_n(t_2)-\Theta_n(t)|^4$. Формулу (6) одержуємо тепер, використовуючи нерівність Коші–Буняковського. Теорема доведена. □

Зауваження 1. Якщо інтеграл в (1) береться за вінерівським процесом $\sigma w(s)$, то дробовий процес буде гауссівським і для нього, звичайно, буде справедливе твердження теореми 1 з заміною $\Pi_2^{1/2}$ на σ. Тому припущення про відсутність гауссівської компоненти у вхідного процесу є несуттєвим.

Зауваження 2. Теорема 1 залишається справедливою і для простору $C[0,1]$ неперервних на $[0,1]$ функцій з рівномірною метрикою, якщо замість Θ_n розглядати процеси $\hat{\Theta}_n = (\hat{\Theta}_n(t), t\in[0,1])$, $n\geq 1$, де

$$\hat{\Theta}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{[nt]}\theta(kh) + (nt-[nt])\frac{1}{\sqrt{n}}\theta(([nt]+1)h).$$

Теорема 1 має аналог для інтегралів

$$\overline{\Theta}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{nt}\theta(u)\,du, \qquad t\in[0,1],\ n\geq 1.$$

Теорема 2. *Нехай виконані умови*

1) $\Pi_4 < \infty$,
2) $g \in L_1(\mathbf{R}) \cap L_2(\mathbf{R})$,
3) $\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,du \neq 0$.

Тоді процеси $\overline{\Theta}_n$ *збігаються за розподілом до* $\Pi_2^{1/2}\mathcal{I}_1 w$ *в просторі* $C[0,1]$ *при* $n \to \infty$, *де* $\mathcal{I}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,du$.

Зауважимо, що для різних типів строго стаціонарних процесів функціональні граничні теореми для інтегралів розглядалися, наприклад, в [5], [7].

Література

1. Г. Крамер, М. Лидбеттер, *Стационарные случайные процессы*, "Мир", Москва, 1969.
2. В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко, *Метрические характеристики случайных величин и процессов*, "ТВіМС", Киев, 1998.
3. А. В. Скороход, *Предельные теоремы для случайных процессов*, Теор. вероятн. применен. **1** (1956), 289–319.
4. А. В. Скороход, *Исследования по теории случайных процессов*, Изд-во Киевск. ун-та, Киев, 1961.
5. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, "Наука", Москва, 1977.
6. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, т. 1, "Наука", Москва, 1971.
7. Д. О. Чикин, *Функциональная предельная теорема для стационарных процессов: мартингальный подход*, Теор. вероятн. применен. **XXXIV** (1989), № 4, 731–741.

Національний технічний університет України, кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей, пр. Перемоги, 37, Київ–56, 252056

Національний технічний університет України, кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей, пр. Перемоги, 37, Київ–56, 252056

Надійшла 15/11/2000