Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 63, 2000, стор. 26–31

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 63, 2000, pp. 26–31

ОБ ОРТОГОНАЛЬНОМ УМНОЖЕНИИ В КОМПЛЕКСНОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

УДК 519.21

Н. Н. ВАХАНИЯ, Н. П. КАНДЕЛАКИ

Резюме. Рассматриваются вопросы, связанные с ортогональным умножением в комплексных гильбертовых пространствах. Доказывается, в частности, существование ортогонального произведения и несуществование нормализованного варианта такого произведения в комплексном случае. Работа мотивирована задачами теории гауссовских случайных векторов со значениями в гильбертовых пространствах. Здесь обсуждаются алгебраические предпосылки для комплексного варианта вероятностных задач, изученных авторами ранее для вещественного случая.

Мы с большим удовлетворением и искренней благодарностью вспоминаем прочитанные у нас, в Тбилиси, много лет назад лекции Анатолия Владимировича Скорохода по математическим основаниям теории случайных процессов, стимулировавшие наш интерес к теории вероятностных распределений в линейных пространствах.

Надеемся, что алгебраические мотивы нашего сообщения гармонируют с широтой математических интересов и вкусов Анатолия Владимировича.

Всюду в настоящей работе H будет обозначать вещественное или комплексное гильбертово пространство. Если мы хотим подчеркнуть, что H вещественно, будем писать H_0 вместо H. Скалярное произведение элементов $x, y \in H$ будем обозначать $(x|y)$.

Ортогональным произведением в H называется билинейное отображение $p\colon H \times H \to H$, удовлетворяющее условию

$$\|p(x,y)\| = \|x\| \cdot \|y\| \tag{1}$$

для всех $x, y \in H$. Следовательно, если в H существует ортогональное произведение, то H является алгеброй (над полем вещественных или комплексных чисел, соответственно) и операция умножения в ней не имеет делителей нуля. В работах А. Гурвица и И. Радона, выполненных независимо и почти одновременно около ста лет назад, было показано, что ортогональное произведение в вещественном конечномерном гильбертовом пространстве размерности n существует в том и только том случае, если $n = 1, 2, 4$ или 8 и эти произведения имеют единицы. Примерно через четверть века те же самые авторы получили, опять независимо друг от друга, решение более общей задачи. Именно, для каждого натурального числа n они нашли максимальное k для которого существует ортогональное умножение из $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ в $\mathbf{R}^n$, т.е., такая билинейная функция $p\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$, которая удовлетворяет условию (1) для всех $x \in \mathbf{R}^n$ и $y \in \mathbf{R}^k$. Эта задача была легко сведена к задаче нахождения максимального числа ортогональных матриц порядка n, удовлетворяющих условиям

$$A_j^2 = -I, \qquad A_j A_l = -A_l A_j, \qquad l \neq j, \tag{2}$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 11E39, 15A99, 60B11.

и было найдено максимальное число таких матриц (комплексных или вещественных); здесь и всюду ниже I обозначает единичную матрицу.

Исходной мотивацией для указанных исследований были актуальные к тому времени важные задачи алгебры и дифференциальной геометрии. Доказательства А. Гурвица и И. Радона, основанные на матричных вычислениях, носят весьма технический характер. В 1942 году была опубликована статья Б. Экмана, в которой для решения матричных уравнений (2) был предложен совершенно новый подход, основанный на теории представлений конечных групп. Этим подходом Б. Экману удалось получить изящные доказательства результатов А. Гурвица и И. Радона, а также рассмотреть близкий вариант с унитарными матрицами и исследовать новые алгебраические и топологические аспекты указанного направления, например связь с периодичностью Ботта в теории гомологии и K-теории (см. обзорную статью [1]).

В настоящей работе рассматриваются вопросы, связанные с ортогональным умножением в бесконечномерном комплексном гильбертовом пространстве. Эта работа примыкает к прежним статьям авторов [2–4], в которых были найдены условия почти наверное ортогональности случайных векторов со значениями в вещественном гильбертовом пространстве H_0, а также была решена "обобщенная задача Гурвица–Радона–Экмана", к которой нас привела задача нахождения максимального числа попарно п.н. ортогональных случайных векторов со значениями в H_0. Настоящая работа также мотивирована задачами теории вероятностных распределений в линейных пространствах, связанными в основном с гауссовскими мерами в комплексных гильбертовых пространствах. Здесь обсуждаются алгебраические предпосылки для исследования комплексного варианта задач, изученных ранее в указанных выше работах авторов.

Насколько нам известно, в бесконечномерном случае вопрос о существовании бесконечного множества ортогональных решений системы (2) и, соответственно, ортогонального умножения был впервые рассмотрен в работе [5]. В этой работе доказано, что в вещественном бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H_0 существует счетная последовательность (A_j) ортогональных операторов, удовлетворяющих условиям (2). В [4] дано упрощенное доказательство этого факта с явным указанием соответствующих операторов. Для полноты изложения мы приведем это простое доказательство и выпишем ортогональное произведение, соответствующее данной последовательности операторов (A_j). В заключительной части настоящей работы мы используем этот результат. Напомним сначала, что оператор $A\colon H_0 \to H_0$ называется ортогональным, если $A^*A = I$, т.е., A является изометрическим и $\operatorname{ran} A = H_0$, т.е., существует обратный оператор A^{-1} и $A^* = A^{-1}$, где A^* — оператор, сопряженный к A и $\operatorname{ran} A$ — область значений оператора A. Очевидно, что ортогональный оператор удовлетворяет условию $A^2 = -I$ в том и только том случае, если $A^* = -A$.

Обозначим через Δ_j матрицу порядка 2^j, все элементы которой равны нулю, кроме элементов второй (неглавной) диагонали, а они равны $+1$ в верхней половине и -1 в нижней половине. Пусть далее A_j обозначает бесконечную блочно-диагональную матрицу с одинаковыми матрицами Δ_j на главной диагонали. Возьмем теперь произвольный ортонормированный базис (e_n) пространства H_0 и обозначим той же буквой A_j линейный оператор, стандартным образом определяемый матрицей A_j. Последовательность этих операторов удовлетворяет условиям (2). В самом деле, ортогональность операторов A_j и условие $A_j^2 = -I$ $(j = 1, 2, \dots)$ очевидны так как этими свойствами обладают конечномерные матрицы Δ_j. Условие $A_jA_l = -A_lA_j$ $(l \neq j)$ также нетрудно проверить (подробнее см. в [4]).

Легко проверить непосредственно, что последовательность операторов $A_1, A_2, \dots$ определяет ортогональное умножение в H_0 равенством $x \cdot y = p(x, y)$, где

$$p_(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} (y|e_j) A_{j-1} x, \qquad A_0 = I, \ x, y \in H_0. \tag{3}$$

Замечание 1. Ортогональное произведение (3) нормализовано. Это означает, что для этого проиэведения существует одностороняя (в нашем случае, правая) единица, роль которой очевидно играет вектор e_1, т.е. $x \cdot e_1 = x$ для любого $x \in H_0$. Нетрудно показать, что для ортогонального произведения вида (3) правая единица единственна и левая единица не существует.

Нормализованные ортогональные произведения p в H_0 тесно связаны с ортогональными операторами со свойствами (2). Матрицы с такими свойствами Б. Экман называет матрицами Гурвица–Радона. Соответствующие им операторы в H или H_0 естественно назвать так же. Любое нормализованное p в H_0 можно записать в виде (3) с некоторой последовательностью (A_j) операторов Гурвица–Радона. В самом деле, не ограничивая общности будем считать, что существует правая единица e. Пусть (e_n) — произвольный такой ортонормированный базис в H_0, что $e_1 = e$. Легко проверить, что операторы $A_0 = I$, $A_j = p(\cdot, e_{j+1})$, $j = 1, 2, \dots$, ортогональны и удовлетворяют условиям (2) и p записывается в виде (3). Ясно, что дополняя одностороню единицу различными способами до ортонормированного базиса, получим различные последовательности операторов Гурвица–Радона, связанные с данным ортогональным произведением. Ниже мы увидим, что в бесконечномерном H_0 существуют и ненормализованные ортогональные произведения. Они не связаны непосредственно с операторами Гурвица–Радона.

Теперь мы хотим доказать существование ортогонального произведения в комплексном случае. Пусть H — комплексное гильбертово пространство. Скалярное произведение в H можно очевидно записать в виде

$$(x|y) = (x|y)_0 + i(x|iy)_0,$$

где i — мнимая единица и $(x|y)_0 = \mathrm{Re}(x, y)$.

Напомним, что изометрический оператор B в H называется унитарным, если $\operatorname{ran} B = H$, т.е., существует B^{-1} и $B^* = B^{-1}$.

Теорема 1. *В комплексном бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H существует ортогональное произведение.*

Доказательство. Представим множество $\mathcal{N}$ натуральных чисел в виде счетного объединения попарно непересекающихся счетных подмножеств множества $\mathcal{N}$:

$$\mathcal{N} = \bigcup_{p=1}^{\infty} \mathcal{N}_p,$$

где $\mathcal{N}_p = \{n_{p,1}, n_{p,2}, \dots\}$, $n_{p,k} \in \mathcal{N}$, $p, k = 1, 2, \dots$. Следовательно, можем считать, что каждое натуральное число n единственным образом представляется в виде $n = n_{p,k}$ для некоторых $p, k \in \mathcal{N}$. Пусть теперь (e_n) — некоторый ортонормированный базис в H и $e_{p,k}$ обозначает элемент базиса, имеющий номер $n_{p,k}$. Ясно, что двойная последовательность $e_{p,k}$ также есть ортонормированный базис в H. Обозначим через B_p, $p = 1, 2, \dots$, линейный непрерывный (на самом деле — изометрический) оператор в H, задаваемый равенствами

$$B_p e_k = e_{p,k}, \qquad k = 1, 2, \dots . \tag{4}$$

Легко проверить, что сопряженный оператор B_p^* определяется равенствами

$$B_p^* e_{p,k} = e_k, \qquad B_p^* e_{q,k} = 0, \qquad k = 1, 2, \dots, \ p \neq q. \tag{5}$$

Равенства (4) и (5) дают для каждой данной пары натуральных чисел p, q соотношения

$$B_p^* B_q e_k = \delta_{pq} e_k, \qquad k = 1, 2, \dots . \tag{6}$$

которые означают, что операторы B_p изометричны, т.е., $B_p^* B_p = I$ (однако очевидно, что ни один из них не является унитарным). Равенства (6) показывают, кроме того, что выполняются соотношения

$$B_p^* B_q = 0, \quad \text{если } p \neq q. \tag{7}$$

Равенства (7) и (6) покзывают, что для любого элемента $x \in H$ последовательность $B_1 x, B_2 x, \dots$ состоит из попарно взаимно ортогональных векторов, имеющих одинаковую норму, равную $\|x\|$. Следовательно, каков бы ни был ортонормированный базис (f_n) в H формула

$$p(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} (y|f_j) B_j x \tag{8}$$

задает ортогональное произведение в H. $\square$

Замечание 2. В пространстве H стандартным образом определяется операция сопряжения относительно ортонормированного базиса (e_n): если $y \in H$ и $y = \sum y_k e_k$, то сопряженный элемент $\overline{y} \in H$ определяется равенством $\overline{y} = \sum \overline{y}_k e_k$. Следовательно, в комплексном гильбертовом пространстве с каждым ортогональным произведением p естественно связывается эрмитово ортогональное произведение p^*, определяемое равенством $p^*(x, y) = p(x, \overline{y})$, $x, y \in H$. p^* отличается от p только тем, что оно полуторалинейно относительно второго аргумента. Очевидно верно и обратное утверждение и $p(x, y) = p^*(x, \overline{y})$.

Как указано в замечании 1, ортогональное произведение (3) нормализовано. Существуют и ненормализованные ортогональные произведения в вещественных гильбертовых пространствах (например, произведение вида (3) с операторами B_j вместо A_j, построенными по произвольному ортонормированному базису в H_0). Таким образом, в вещественном случае существует нормализованное ортогональное произведение. Приводимая ниже теорема 2 утверждает, что в комплексном случае ситуация другая. Теорема формулируется только для бесконечномерного пространства так как в одномерном случае ортогональное произведение очевидно нормализовано, а в других конечномерных комплексных гильбертовых пространствах ортогональное произведение вообще не существует (см. следствие после доказательства теоремы 2).

Теорема 2. *В комплексном бесконечномерном гильбертовом пространстве нормализованное ортогональное произведение не существует.*

Доказательство. Пусть p — произвольное ортогональное произведение. Покажем, что не существует ни правая единица, ни левая. Доказательства одинаковы, поэтому достаточно показать, что допущение существования правой единицы приводит к противоречию. Пусть e — правая единица для произведения p, т.е., $p(x, e) = x$ для любых $x \in H$. Ясно, что $\|e\| = 1$. Обозначим через g вектор единичной длины, ортогональный к e. Имеем для любого комплексного числа λ и для любого вектора $x \in H$ равенства

$$p(x, e + \lambda g) = p(x, e) + \lambda p(x, g) = x + \lambda U x, \tag{9}$$

где U — изометрический оператор в силу свойств ортогонального умножения и условия $\|g\| = 1$. Свойство (1) ортогонального умножения, равенство (9) и условие ортогональности векторов единичной нормы e и g дают совместно с условием изометричности оператора U следующее соотношение

$$\operatorname{Re}(x|\lambda U x) = 0, \qquad \lambda \in \mathcal{C}, \ x \in H. \tag{10}$$

Напомним, что при сужении поля скаляров из $\mathcal{C}$ на $\mathcal{R}$ комплексное гильбертово пространство H превращается в вещественное гильбертово пространство H_0 со скалярным произведением $(\cdot|\cdot)_0 = \mathrm{Re}(\cdot|\cdot)$ и той же нормой: $\|x\|^2 = (x|x) = (x|x)_0$. При этом очевидно, что множество $L(H)$ линейных ограниченных операторов в H перейдет в $L(H_0)$. Важно заметить, что в силу равенств

$$(ix|iy)_0 = \mathrm{Re}(ix|iy) = \mathrm{Re}(x|y) = (x|y)_0$$

оператор умножения на i перейдет в ортогональный оператор, который обозначим тем же символом i. Отметим здесь же, что для образов оператора U и оператора умножения на i справедливы соотношения

$$iU = Ui, \qquad i^2 = -I. \tag{11}$$

В самом деле, первое соотношение есть следствие линейности оператора U в H, второе следует из того, что квадрат оператора умножения на i в H есть умножение на -1.

Теперь мы можем закончить доказательство. Соотношение (10) для $\lambda = 1$ и $\lambda = i$ дает равенства

$$(x|Ux)_0 = 0, \qquad (x|iUx)_0 \qquad \text{для всех } x \in H_0,$$

из которых следует, что операторы U и iU в H_0 кососимметрические. Поскольку они, как образы изометрических операторов в H также и изометрические, получаем равенства $U^2 = -I$ и $(iU)^2 = -I$, которые противоречивы так как второе из них дает, в силу (11), что $U^2 = I$.

Теорема доказана. □

Заметим, что с каждым ортогональным произведением p в вещественном или комплексном гильбертовом пространстве H естественно ассоциируются два семейства изометрических операторов $\{p(x,\cdot), x \in H, \|x\| = 1\}$ и $\{p(\cdot, y), y \in H, \|y\| = 1\}$, действующих из H в H. Допустим, что в одном из этих семейств есть унитарный оператор, например, $\{p(x_0,\cdot), x_0 \in H, \|x_0\| = 1\}$. Тогда $p^{-1}(x_0, p(x,y))$, $x, y \in H$, есть очевидно нормализованное ортогональное произведение с левым обратным x_0. Таким образом, теорема 2 показывает, что ни для какого ортогонального произведения в комплексном бесконечномерном гильбертовом пространстве ассоцированные семейства изометрических операторов не содержат ни одного обратимого оператора. Заметим далее, что при доказательстве теремы 2 бесконечномерность пространства не имела значения — мы использовали только то, что существует пара ортогональных элементов в H. Поэтому, учитывая еще и тот факт, что в конечномерном пространстве изометричность равносильна унитарности, получаем следующее утверждение, как следствие рассуждений при доказательстве теоремы 2.

Следствие. *Ни в каком конечномерном комплексном гильбертовом пространстве, кроме одномерного, не существует ортогональное произведение.*

Аналогичным образом можно показать, что ортогональное произведение $\mathcal{C}^n \times \mathcal{C}^k \to \mathcal{C}^n$ не существует ни при каком n, если $k > 1$.

В связи с формулированным только что следствием заметим, что в двумерном комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{C}^2$ существует произведение, индуцированное произведением кватернионов. Оно ассоциативно, некоммутативно, имеет единицу и обладает свойством ортогональности (1) и, следовательно, не имеет делителей нуля. Однако оно не является ортогональным произведением поскольку не обладает свойством билинейности (не является даже полуторалинейным; оно линейно по одному из сомножителей и только вещественно линейно по второму).

В заключение мы рассмотрим один вариант билинейного произведения в комплексном гильбертовом пространстве H, отличный от ортогонального произведения. Пусть, как и выше, (e_n) — некоторый ортонормированный базис в H. Назовем псевдоскалярным (или индефинитным скалярным) произведением относительно данного базиса выражение

$$[x|y] = \sum x_n y_n, \qquad x, y \in H, \tag{12}$$

где x_n и y_n $(n = 1, 2, \dots)$ — координаты элементов x и y в базисе (e_n). Ясно, что $[x|y] = (x|\overline{y})$ ($\overline{y}$ определяется в замечании 2). Любой ограниченный линейный оператор A в H можно стандартным образом представить в виде комплексной матрицы $\|a_{mn}\|$, где $\|a_{mn}\| = (Ae_n|e_m)$. Транспонированная матрица с элементами $a^T_{nm} = a_{mn}$ $(m, n = 1, 2, \dots)$ задает очевидно линейный ограниченный оператор A^T, определяемый равенством $[Ax|y] = [x|A^T y]$, $x, y \in H$ (оператор A^T можно определить также равенством $A^T = \overline{A}^*$, где $\overline{A}x = \overline{A\overline{x}}$). Оператор A в H назовем ортогонально изометрическим, если $A^T A = I$ и ортогональным, если имеет место также и равенство $AA^T = I$, т.е., если $A^T = A^{-1}$.

Пусть теперь A_j $(j = 1, 2, \dots)$ обозначает линейный непрерывный оператор в пространстве H (комплексном) определяемый в данном базисе (e_n) блочно-диагональной матрицей A_j, построенной в начале статьи. Ясно, что операторы A_j $(j = 1, 2, \dots)$ ортогональны и, поскольку все элементы соответствующих матриц вещественные числа $(+1, -1$ или $0)$, они также унитарны. Ясно также, что они удовлетворяют условиям (2). Тем не менее, билинейное отображение $\pi\colon H \times H \to H$, определяемое равенством

$$\pi(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} (y|e_j) A_{j-1} x, \qquad A_0 = I, \; x, y \in H,$$

не удовлетворяет условию (1) в комплексном случае и, следовательно, не является ортогональным произведением. Однако, как нетрудно проверить, оно есть псевдоортогональное произведение в следующем естественном смысле: оно билинейно и $[\pi(x,y)|\pi(x,y)] = [x|x][y|y]$ для всех пар элементов из H. Очевидно это произведение нормализовано (правой единицей является e_1).

Литература

1. B. Eckmann, *Topology, algebra, analysis — relations and missing links*, Notices Amer. Math. Soc. **46** (1999), № 5, 520–527.
2. Н. Н. Вахания, Н. П. Канделаки, *Об ортогональных случайных векторах в гильбертовом пространстве*, ДАН СССР **294** (1987), № 3, 528–531.
3. Н. Н. Вахания, Н. П. Канделаки, *Обобщенные теоремы Гурвица-Радона-Экмана и ортогональные случайные векторы*, ДАН СССР **296** (1987), № 2, 265–266.
4. N. N. Vakhania, *Ortogonal random vectors in Hilbert spaces and a related problem of linear algebra*, Proc. of III Mexican Symposium on Probability and Stochasic Proceses (M. E. Caballero and L. G. Gorostiza, eds.), Mexican Math. Soc., vol. 11, 1994, pp. 13–30.
5. Н. П. Канделаки, И. Н. Карцивадзе, Т. Л. Чантладзе, *Об ортогональном умножении в гильбертовом пространстве*, Труды Тбилисского Ун-та, Серия Мат. Мех. Астр. **179** (1976), 40–57.

Институт вычислительной математики им. Н. И. Мусхелишвили, АН Грузии, ул. Акури, 8а, Тбилиси 93, Грузия

Электронный адрес: vakhania@acnet.ge

Институт вычислительной математики им. Н. И. Мусхелишвили, АН Грузии, ул. Акури, 8а, Тбилиси 93, Грузия

Поступила 06/06/2000