Теор. ймовірност. та матем. статист.
Вип. 65, 2001, стор. 104–109

Teor. Ĭmovirnost. ta Matem. Statyst.
No. 65, 2001, pp. 104–109

ЛОГАРИФМІЧНА ОЦІНКА ЗНИЗУ МАТЕМАТИЧНОГО СПОДІВАННЯ ЧАСУ БЕЗВІДМОВНОЇ РОБОТИ ВИСОКОНАДІЙНОЇ СИСТЕМИ ІЗ ЗАХИСТОМ У НЕСТАЦІОНАРНОМУ РЕЖИМІ

УДК 519.21

О. О. КУШНІР

Резюме. Отримана кількісна оцінка знизу математичного сподівання часу безвідмовної роботи високонадійної системи із захистом через верхню оцінку функції розподілу цієї випадкової величини у випадку існування експоненціальних моментів вихідних функцій розподілу.

У статті [1] методом складання та аналізу інтегральних рівнянь отримані граничні теореми про експоненціальну асимптотику функції розподілу часу безвідмовної роботи системи із захистом. Метою даної роботи є отримання якомога точнішої оцінки математичного сподівання цієї випадкової величини за рахунок накладання жорстких умов на вихідні функції розподілу (зокрема, існування експоненціальних моментів). При цьому були викортстані результати праць [1]–[7].

Розглянемо три послідовності невід'ємних, незалежних у сукупності випадкових величин $(\xi_n)_{n\geq 1}$, $(\eta_n)_{n\geq 1}$ та $(\zeta_n)_{n\geq 1}$ з функціями розподілу $\mathsf{P}\{\xi_n < x\} = F(x)$, $\mathsf{P}\{\eta_n < x\} = G(x)$ та $\mathsf{P}\{\zeta_n < x\} = J(x)$ для всіх $n \geq 1$, а також моменти часу $T_1 = 0$, $S_0 = -s$ $(s > 0)$; для всіх $n \geq 1$ позначимо $\acute{T}_n = T_n + \zeta_n$, $T_{n+1} = \acute{T}_n + \eta_n$, $S_n = S_{n-1} + \xi_n$.

Нехай τ — це момент першого попадання послідовності $(S_k)_{k\geq 1}$ у відрізки альтернуючого процесу $[T_n, \acute{T}_n]$, $n \geq 1$, тобто

$$\tau = \inf_{k\geq 1} \left\{ S_k \colon S_k \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [T_n, \acute{T}_n] \right\}.$$

Позначимо $b_s = \mathsf{E}(\tau \,/\, S_0 = -s)$ — умовне математичне сподівання випадкової величини τ за умови $S_0 = -s$ $(s > 0)$; $\varphi_s(x) = \mathsf{P}\{\tau < x \,/\, S_0 = -s\}$ — умовна функція розподілу.

У даній роботі оцінюється знизу b_s. Ця оцінка буде асимптотично точною при фіксованих F, G і

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{E}\,\zeta_1 = \int_0^{+\infty} (1 - J(x))\,dx \to 0.$$

Крім α для оцінки b_s будемо використовувати ще такі позначення:

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{E}\,\xi_1 = \int_0^{+\infty} (1 - F(x))\,dx,$$

$$m \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{E}\,\eta_1 = \int_0^{+\infty} (1 - G(x))\,dx,$$

1991 *AMS Mathematics Subject Classification.* Primary 60K10; Secondary 90B25.

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{E}(\xi_1 \wedge \zeta_1) = \int_0^{+\infty} (1 - F(x))(1 - J(x))\, dx \le \alpha$$

(тут і далі $\wedge$ означає мінімум чисел),

$$\varkappa \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\mathsf{E}(\eta_1))^{-2}\, \mathsf{E}\left(\eta_1^2\right) = m^{-2} \int_0^{+\infty} x(1 - G(x))\, dx,$$

$$Q_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} e^{\sigma x}\, dG(x),$$

$$l = l(F) = \sup_{y>0} \sup_{s>0} \left(\frac{1}{y} R_s(y)\right),$$

де $R_s(y)$ — ймовірність попадання хоча б одного моменту відновлення у проміжок $[0, y)$ за умови, що процес відновлення стартує з моменту часу $S_0 = -s$, тобто

$$R_s(y) = \mathsf{P}\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{-s + \sum_{i=1}^{n} \xi_i\right\} \cap [0, y) \ne \varnothing\right\},$$

константи c і γ, що також залежать від F, визначаються з умови

$$\sup_{t>0} \left(\delta(t) - ce^{-\gamma t}\right) \le 0,$$

де $\delta(t) = \sup_{s \ge t} \sup_{\mathcal{B} \in \mathbf{B}^+} \left|\hat{R}_s(\mathcal{B}) - \hat{R}(\mathcal{B})\right|$, $\mathbf{B}^+$ — звуження борелівської σ-алгебри на $(0, +\infty)$, $\hat{R}_s$ і $\hat{R}$ — міри Лебега–Стілтьєса, породжені функціями R_s та R відповідно;

$$R(x) \stackrel{\text{def}}{\equiv} \overline{\lim}_{s \to \infty} R_s(x).$$

Теорема 1. *Нехай випадкова величина ξ_n має обмежену щільність $f(x)$, яка збігається до нуля на нескінченності, $F(+0) = 0$, $G(+0) = 0$, $Q_\sigma < +\infty$, існує $\sigma_0 > 0$ таке, що $\int_0^{+\infty} e^{\sigma_0 s} f(s)\, ds < +\infty$. Тоді*

$$b_s \ge \frac{m(\mu - \varepsilon)}{\varepsilon}(1 - h(1 - \ln h)), \tag{1}$$

де $h = h_1 \wedge 1$,

$$\begin{aligned} h_1 = \frac{\alpha}{m} & \min_{z \ge \sqrt{\alpha\sigma/Q_\sigma}} \left(1 + 2A \ln z + \frac{1}{z^2} + 2B\left(\frac{1}{z} + \frac{\exp(z)}{z^2}\right)\right) \\ & + \frac{l\alpha}{m\gamma} \ln \frac{m\gamma}{l\alpha} + \frac{\varepsilon}{m\mu\gamma} \ln \frac{m\mu\gamma}{\varepsilon} + \frac{1 + \ln c}{m\gamma}\left(l\alpha + \frac{\varepsilon}{\mu}\right) + \frac{\varepsilon}{\mu}\left(1 + \frac{1}{m\sigma} \ln \frac{Q_\sigma}{\sigma}\right) \\ & + 2\varkappa\left(l\alpha + \frac{2\varepsilon}{\mu}\right), \end{aligned}$$

де $A = \varepsilon/(\alpha\mu\sigma)$, $B = \varkappa m\sigma$.

Зауваження 1. Згідно роботам [2, 3] при виконанні умов теореми існують числа $\gamma = \gamma(F) < +\infty$ та $c = c(F) < +\infty$ такі, що для всіх $t > 0$ виконується нерівність

$$\delta(t) \le ce^{-\gamma t}. \tag{2}$$

Зауваження 2. При виконанні умов теореми $l = l(F) \le \sup_{x>0} h(x) < +\infty$, де $h(x)$ — щільність відновлення, яка відповідає функції відновлення $H = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}$ (тут $F^{0*} = \chi = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0, \\ 1, & \text{якщо } x > 0, \end{cases}$ $F^{1*} = F$, $F^{(n+1)*}(x) = \int_0^x F^{n*}(x - y)\, dF(y)$, $h = f * H$).

Зауваження 3. У формулі для h_1 мінімум по z досягається, коли z є додатним розв'язком рівняння

$$Az^2 = 1 + B(z + e^z(2 - z)), \tag{3}$$

якщо він більший від $\sqrt{\alpha\sigma/Q_\sigma}$, і при $z = \sqrt{\alpha\sigma/Q_\sigma}$ у протилежному випадку. Рівняння (3) має тільки один додатній розв'язок.

Зауваження 4. Оцінка в теоремі будувалася у припущенні $\alpha = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$. Зокрема, це припущення виконується, якщо F — фіксована функція розподілу, а ζ_1 збігається до нуля за Хінчином [4, с. 48], як це випливає з наступного твердження.

Лема 1. *Якщо послідовність випадкових величин із функціями розподілу J_n збігається до нуля за Хінчином ($J_n \xrightarrow{\mathrm{x}} 0, n \to \infty$), тобто для будь-якого $h > 0$*

$$\int_h^{+\infty} (1 - J_n(x))\,dx = o(\alpha_n), \qquad n \to \infty,$$

де

$$\alpha_n = \int_0^{+\infty} (1 - J_n(x))\,dx,$$

то $\alpha_n \to 0$, $n \to \infty$, і для будь-якої функції розподілу F, що задовольняє умову $F(+0) = 0$,

$$\varepsilon_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_0^{+\infty} (1 - F(x))(1 - J_n(x))\,dx \sim \alpha_n, \qquad n \to \infty.$$

Для доведення теореми використаємо наступне твердження.

Лема 2. *Нехай для функції розподілу $\varphi(x)$ невід'ємної випадкової величини τ виконується нерівність*

$$\varphi(x) \le 1 - \exp\{-\lambda x\} + h,$$

де $h \in (0, 1]$. Тоді для математичного сподівання $b = \mathsf{E}\tau$ виконується нерівність

$$b \ge \frac{1}{\lambda}(1 - h(1 - \ln h)).$$

Доведення леми 1. Якщо $J_n \xrightarrow{\mathrm{x}} 0$, $n \to \infty$, то для будь-якого $h > 0$

$$\alpha_n \sim \int_0^h (1 - J_n(x))\,dx \le h.$$

Це можливо тільки у випадку, коли $\alpha_n \to 0$, $n \to \infty$. Тепер розглянемо нерівності

$$1 \le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\varepsilon_n} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\int_0^h (1 - J_n(x))\,dx}{\varepsilon_n} \le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\int_0^h (1 - J_n(x))\,dx}{\int_0^h (1 - F(x))(1 - J_n(x))\,dx} \le \frac{1}{1 - F(h)}.$$

Оскільки $F(0+) = 0$, то $\varepsilon_n \sim \alpha_n$, $n \to \infty$.

Лема 1 доведена. □

Доведення леми 2.

$$b = \int_0^{\infty} (1 - \varphi(x))\,dx \ge \int_0^{-\ln h/\lambda} (1 - \varphi(x))\,dx = \int_0^{-\ln h/\lambda} (e^{-\lambda x} - h)\,dx = \frac{1 - h + h\ln h}{\lambda},$$

що й потрібно було довести. □

Доведення зауваження 2. Ймовірність настання хоча б однієї події потоку в проміжку $[t, t + y)$ не перевищує математичного сподівання кількості подій цього потоку в даному проміжку, тобто для всіх додатних t і y

$$R_t(y) \le H(t + y) - H(t) \le y \sup_{x \in [t, t+y)} h(x).$$

Таким чином,

$$l \le \sup_{x>0} h(x).$$

При виконанні умов теореми, згідно з [5, с. 205],

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = 1/\mu,$$

а на обмеженому проміжку

$$\sup_{x\in[0,T]} h(x) \le H(T)\cdot M,$$

де

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\ge 0} f(x) < +\infty$$

за умовою.

Отже, щільність відновлення h обмежена на $(0,+\infty)$, що й потрібно було довести. □

Доведення теореми. За нерівностями (31), (37) статті [1] для довільного $T \ge 0$

$$\varphi_s(x) \le \tilde\varphi(x) + \mathbf{H}G(T)\sup_{t\ge s}\int_0^\infty R_t(y)\,dJ(y) + \delta(T), \tag{4}$$

де $\tilde\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{\equiv} \lim_{s\to\infty}\varphi_s(x)$ (при виконанні умов теореми ця границя існує),

$$\mathbf{H}G = \sum_{n=0}^{\infty} G^{n*}.$$

Для $\delta(T)$ виконується нерівність(2), а для $\mathbf{H}G(T)$ — нерівність Дейлі [6]

$$\mathbf{H}G(T) \le 2\varkappa + T/m. \tag{5}$$

Згідно з означенням константи l

$$R_t(y) \le ly,$$

тому

$$\sup_{t\ge s}\int_0^\infty R_t(y)\,dJ(y) \le l\alpha. \tag{6}$$

Підставивши (2), (5) і (6) у (4), дістанемо

$$\varphi_s(x) \le \tilde\varphi(x) + 2\varkappa l\alpha + \alpha lT/m + ce^{-\gamma T}. \tag{7}$$

Покладемо в (7)

$$T = -\frac{1}{\gamma}\ln\frac{\alpha l}{mc\gamma}$$

і отримаємо

$$\varphi_s(x) \le \tilde\varphi(x) + \alpha l\left(2\varkappa + \frac{1+\ln c}{m\gamma}\right) + \frac{\alpha l}{m\gamma}\ln\frac{m\gamma}{\alpha l}. \tag{8}$$

Із формул (19), (41), (38), (15), (31) і (34) статті [1] та нерівності Дейлі (5) випливає, що для будь-яких $Z \ge 0$ і $Y \ge 0$

$$\begin{aligned}\tilde\varphi(x) \le \psi(x) + \delta(Z) + \left(2\varkappa + \frac{Z+Y}{m}\right)\int_0^\infty R(y)\,dJ(y) + 2\varkappa(1 - G*J(Y))\\ + \frac{1}{m}\int_Y^\infty (1 - G*J(Y))\,dy,\end{aligned} \tag{9}$$

де $\psi(x)$ — мінімальний розв'язок рівняння

$$\psi(x) = \int_0^\infty R(x \wedge u)\,dJ(u) + \int_0^\infty (1 - R(u))\,dJ(u) \int_0^{x-u} \psi(x-u-v)\,dG(v).$$

Згідно з [5, т. 12.8]

$$R(y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y (1 - F(u))\,du,$$

тому

$$\int_0^\infty R(y)\,dJ(y) = \varepsilon/\mu \tag{10}$$

за умовою теореми $Q_\sigma < +\infty$. Тоді для всіх $Y > 0$

$$1 - G(Y) \le e^{-\sigma Y}\int_Y^\infty e^{\sigma y}\,dG(y) \le Q_\sigma e^{-\sigma Y}. \tag{11}$$

Проінтегрувавши (11), дістанемо

$$\int_Y^{+\infty} (1 - G(y))\,dy \le \frac{Q_\sigma}{\sigma} e^{-\sigma Y}. \tag{12}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}\int_Y^\infty (G(y) - G * J(y))\,dy &\le \int_0^\infty (G(y) - G * J(y))\,dy \\ &= \int_0^\infty (1 - G * J(y))\,dy - \int_0^\infty (1 - G(y))\,dy \\ &= m + \alpha - m = \alpha,\end{aligned}$$

то

$$\int_Y^\infty (1 - G * J(y))\,dy \le \alpha + \frac{Q_\sigma}{\sigma} e^{-\sigma Y}. \tag{13}$$

Із напівадитивності ймовірності випливає, що для будь-яких $\theta \in (0,1)$

$$1 - G * J(Y) \le 1 - J(\theta Y) + 1 - G((1-\theta)Y). \tag{14}$$

Використавши нерівність Маркова та (11), із (14) отримуємо

$$1 - G * J(Y) \le \frac{\alpha}{\theta Y} + Q_\sigma e^{-\sigma(1-\theta)Y}. \tag{15}$$

Підставивши у (15)

$$\theta = \frac{1}{Y}\sqrt{\frac{\alpha}{Q_\sigma \sigma}}\, e^{\sigma Y/2},$$

дістанемо

$$1 - G * J(Y) \le \sqrt{\alpha Q_\sigma \sigma}\exp\{-\sigma Y/2\} + Q_\sigma \exp\left\{-\sigma Y + \sqrt{\frac{\alpha\sigma}{Q_\sigma}}\, e^{\sigma Y/2}\right\}. \tag{16}$$

Підставивши у (9)

$$Z = -\frac{1}{\gamma}\ln\frac{\varepsilon}{m\mu c\gamma}, \qquad Y = \frac{1}{\sigma}\ln\frac{z^2 Q_\sigma}{\alpha\sigma},$$

де z — довільне число, при якому $Y \geq 0$, та врахувавши (2), (10), (13) і (16), будемо мати

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(x) \leq \psi(x) + \frac{\varepsilon}{\mu m \gamma}\left(1 + \ln c + \ln\frac{\mu m \gamma}{\varepsilon}\right) + 2\varkappa\frac{\varepsilon}{\mu} + \frac{\varepsilon}{\mu m \sigma}\ln\frac{Q_\sigma}{\sigma} \\ + \frac{\alpha}{m}\min_{z \geq \sqrt{\alpha\sigma/Q_\sigma}}\left(1 + 2\frac{\varepsilon}{\alpha\sigma\mu}\ln z + \frac{1}{z^2} + 2\sigma\varkappa m\left(\frac{1}{z} + \frac{e^z}{z^2}\right)\right).\end{aligned} \tag{17}$$

Позначимо

$$V(t) = \int_0^t (1 - R(x))\,dJ(x) \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon/\mu}, \qquad G(t) = \int_0^\infty R(t \wedge x)\,dJ(x) \cdot \frac{\mu}{\varepsilon}.$$

Очевидно, що $V(t)$ та $G(t)$ є функціями розподілу. Позначимо $W = G * V$. Функцію можна оцінити так:

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{\varepsilon}{\mu}\sum_{n=0}^\infty\left(1 - \frac{\varepsilon}{\mu}\right)^n G * W^{n*} \leq \frac{\varepsilon}{\mu}\sum_{n=0}^\infty\left(1 - \frac{\varepsilon}{\mu}\right)^n W^{n*} \leq \frac{\varepsilon}{\mu}\sum_{n=0}^\infty\left(1 - \frac{\varepsilon}{\mu}\right)^n G^{n*} \\ &= \frac{\varepsilon}{\mu}\chi + \left(1 - \frac{\varepsilon}{\mu}\right)\sum_{n=1}^\infty\frac{\varepsilon}{\mu}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{n-1} G^{n*}.\end{aligned} \tag{18}$$

Згідно з [7, т. 2]

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{\varepsilon}{\mu}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{n-1} G^{n*}(x) \leq 1 - \exp\left\{-\frac{\varepsilon x}{(\mu - \varepsilon)m}\right\} + 2\varkappa\frac{\varepsilon}{\mu - \varepsilon}. \tag{19}$$

Із (18) і (19) при $x \geq 0$ дістанемо

$$\psi(x) \leq \frac{\varepsilon}{\mu} + 1 - \exp\left\{-\frac{\varepsilon x}{(\mu - \varepsilon)m}\right\} + \frac{2\varkappa\varepsilon}{\mu}. \tag{20}$$

Враховуючи лему, і з (8), (17), (20) отримаємо (1).

Теорема доведена. □

Література

1. О. О. Кушнір, *Дослідження високонадійної системи із захистом за допомогою теореми Реньї*, Теор. ймовірност. матем. статист. **55** (1996), 117–124.
2. Н. В. Карташов, *Количественные оценки скорости сходимости в теореме восстановления и их применение в теории массового обслуживания*, Дис. ... канд.физ.мат.наук, Київ, 1978.
3. Н. В. Карташов, *Равномерная асимптотическая теорема восстановления*, Теор. вероятност. применен. **25** (1980), № 3, 597–600.
4. А. Д. Соловьев, *Аналитические методы расчета и оценки надежности*, Вопросы математической теории надежности, "Радио и связь", Москва, 1983, стр. 9–112.
5. И. Н. Коваленко, Н. Ю. Кузнецов, В. М. Шуренков, *Случайные процессы: Справочник* (1983), "Наукова думка", Київ.
6. D. J. Daley, *Tight bounds for the renewal function of a random walk*, Ann. Probab. **8** (1980), № 3, 615–621.
7. Н. В. Карташов, *Неравенства в теореме Реньи*, Теор. вероятност. матем. статист. **45** (1983), 27–33.

33000, Рівне, вул. Соборна, 11, Рівненський Державний технічний університет, кафедра вищої математики

Поточна адреса: 02127, Київ–127, вул. Глушкова, 6, Національний університет ім. Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики

Надійшла 07/12/2000