А. В. ИВАНОВ, студ.
Киевский университет

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОЦЕНОК НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ В СЛУЧАЕ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

В настоящей заметке приведены условия асимптотической нормальности состоятельных оценок наименьших квадратов нелинейно входящих параметров функции регрессии.

Пусть $[0, \Delta, 2\Delta, \ldots, n\Delta = T]$ — разбиение интервала $[0, T]$. Рассмотрим регрессию

$$x_{kn} = g(t_k^{(n)}, \alpha) + \varepsilon_{kn}, \quad k = \overline{1, n},$$

$$g \in C([0, T] \times \Omega), \quad \Omega \subset R^p, \quad t_k^{(n)} \in [(k-1)\Delta, k\Delta),$$

ε_{kn} — независимые одинаково распределенные случайные величины, $M\varepsilon_{kn} = 0$, $M\varepsilon_{kn}^2 = \sigma^2$, $M\varepsilon_{kn}^4 < \infty$.

Теорема 1. Допустим, что:

1) существует $\delta > 0$, компактное множество $K \subset \Omega$, такое, что истинное значение параметра $\alpha^0 \in K$ и неравенство

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[g(t_k^{(n)}, \alpha) - g(t_k^{(n)}, \alpha^0)]^2 \geqslant 4\sigma^2 + \delta$$

имеет место для $\alpha \notin K$ и всех $n > n_0$;

2) $\int\limits_0^T [g(t, \alpha) - g(t, \beta)]^2 > 0$ для всех $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in K$.

Тогда оценка наименьших квадратов $\hat{\alpha}$ является состоятельной оценкой α^0.

Теорема доказывается аналогично теореме 2 работы [1].

Предположим, что $\hat{\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha^0$ по вероятности, α^0 — внутренняя точка Ω, $g \in C^3(U_{\alpha^0,\varepsilon})$,

$$U_{\alpha^0,\varepsilon} = \{\alpha : \|\alpha - \alpha^0\| < \varepsilon\}.$$

Теорема 2. Пусть $\frac{\partial}{\partial\alpha_i} g(t, \alpha)$, $\frac{\partial^2}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j} g(t, \alpha)$, $\frac{\partial^3}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j\partial\alpha_m} \times$ $\times\, g(t, \alpha)$, $i, j, m = \overline{1, p}$, непрерывны на $[0, T] \times U_{\alpha^0,\varepsilon}$. Тогда случайная величина $\sqrt{n}(\hat{\alpha} - \alpha^0)$ асимптотически имеет нормальное распределение $N(0, \sigma^2 D_T^{-1})$,

$$D_T = \left[\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial \alpha_i} g(t, \alpha^0) \frac{\partial}{\partial \alpha_j} g(t, \alpha^0)\, dt \right]_{i,j=1}^{p}.$$

Доказательство использует те же стандартные приемы, с помощью которых устанавливается асимптотическая нормальность оценок максимального правдоподобия [2].

Теорема 3. Пусть y_{kn}, $k = \overline{1, n}$, — независимые p-мерные случайные величины с нулевым вектором средних и дисперсионной матрицей $D^2(y_{kn}) = D_{kn}$. Допустим, что $\sum_{k=1}^{n} D_{kn} \xrightarrow[n \to \infty]{} D$, и для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\{\|y\| > \varepsilon\}} \|y\|^2 dF_{kn}(y) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

$F_{kn}(y)$ — функция распределения случайной величины y_{kn}. Тогда $\sum_{k=1}^{n} y_{kn}$ асимптотически распределена нормально $N(0, D)$.

Более простой вариант этой теоремы сформулирован в работе [3]. Рассмотрим регрессию вида $x(t) = g(t, \alpha) + \varepsilon(t)$, $t \in [0, T]$, $g \in C([0, \infty) \times \Omega)$, $\Omega \subset R^p$, $\varepsilon(t)$ — случайный процесс.

Условия состоятельности оценок наименьших квадратов $\hat{\alpha}$ для одного класса процессов $\varepsilon(t)$ получены в работе [4].

Предположим, что $p = 1$, $\hat{\alpha} \xrightarrow[T \to \infty]{} \alpha^0$ по вероятности,

$$\alpha^0 \in \operatorname{Int} \Omega, \quad g \in C^3(U_{\alpha^0, \varepsilon}),$$

$$\frac{d^j}{d\alpha^j} g(t, \alpha) \in C([0, \infty) \times U_{\alpha^0, \varepsilon}), \quad j = 1, 2, 3.$$

Теорема 4. Пусть $\varepsilon(t)$ — вещественный гауссовский строго стационарный эргодический процесс с непрерывной корреляционной функцией $r(t)$. Пусть также

$$\int_0^T |r(t)|\, dt < \infty, \quad \int_0^T r(t)\, dt = \gamma > 0;$$

$$\frac{d}{d\alpha} g(t, \alpha^0) \xrightarrow[t \to \infty]{} c(\alpha^0), \quad 0 < |c(\alpha^0)| < \infty;$$

для $\alpha \in U_{\alpha^0,\varepsilon}$, $T > T_0$

$$\frac{1}{T}\int_0^T [g(t,\alpha)-g(t,\alpha^0)]^2\,dt \leqslant M_1 < \infty;$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{d^j}{d\alpha^j}\,g(t,\alpha)\right]^2 dt \leqslant M_2 < \infty, \quad j = 2,3.$$

Тогда величина $\sqrt{T}\,(\hat{\alpha}-\alpha^0)$ асимптотически распределена нормально $N\left(0, \dfrac{2\gamma}{c^2(\alpha^0)}\right)$.

Теорема аналогична теореме 2 и устанавливается такими же рассуждениями (см. также [4]).

Пусть

$$x_k = g(k,\alpha) + \varepsilon_k, \quad k = \overline{1,n},$$

ε_k — независимые одинаково распределенные случайные величины, $M\varepsilon_k = 0$, $M\varepsilon_k^2 = \sigma^2$.

Условия состоятельности оценки наименьших квадратов α в этой ситуации получены в работе [1].

Предположим, как и выше, что $\hat{\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha^0$ по вероятности, $\alpha^0 \in \operatorname{Int}\Omega$, $g \in C^3(U_{\alpha^0,\varepsilon})$, $k = 1,2,\ldots$.

Теорема 5. Пусть:

1) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{\partial}{\partial\alpha_j}\,g(k,\alpha^0)\right]^2 > 0$ для $n > n_0$, $j = \overline{1,p}$;

2) $$D_n = \left\| \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial\alpha_i}g(k,\alpha^0)\,\dfrac{\partial}{\partial\alpha_j}g(k,\alpha^0)}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{\partial}{\partial\alpha_i}g(k,\alpha^0)\right]^2\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{\partial}{\partial\alpha_j}g(k,\alpha^0)\right]^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right\|_{i,j=1}^{p} \xrightarrow[n\to\infty]{} D;$$

3) $$\frac{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\dfrac{\partial}{\partial\alpha_j}\,g(x,\alpha^0)\right|}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{\partial}{\partial\alpha_j}g(k,\alpha^0)\right]^2\right]^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad j = \overline{1,p};$$

для $\alpha \in U_{\alpha^0,\varepsilon}$ и всех $n > n_0$

4) $$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}[g(k,\alpha)-g(k,\alpha^0)]^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{\partial}{\partial\alpha_j}\,g(k,\alpha^0)\right]^2} \leqslant R_0 < \infty, \quad j = \overline{1,p};$$

5) $$\frac{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_i} g(k, \alpha)\right]^2}{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_j} g(k, \alpha^0)\right]^2} \leqslant R_1 < \infty,$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j} g(k, \alpha)\right]^2}{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_i} g(k, \alpha^0)\right]^2} \leqslant R_2 < \infty,$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial^3}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j\partial\alpha_m} g(k, \alpha)\right]^2}{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_j} g(k, \alpha^0)\right]^2} \leqslant R_3 < \infty, \quad i, j, m = \overline{1, p}.$$

При выполнении условий 1) — 5) величина $I_n^{\frac{1}{2}}(\hat{\alpha} - \alpha^0)$ асимптотически распределена нормально $N(0, \sigma^2 D^{-1})$,

$$I_n = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1} g(k, \alpha^0)\right]^2 & & & 0 \\ & \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_2} g(k, \alpha^0)\right]^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_p} g(k, \alpha^0)\right]^2 \end{vmatrix}.$$

Теорема доказывается аналогично теореме 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Malinvaud E. The consistency of nonlinear regressions.— The annals of Mathematical Statistics, 1970, **41**, No 3.
2. Уилкс С. Математическая статистика. М., «Наука», 1967.
3. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применения. М., «Наука», 1968.
4. Иванов А. В. Состоятельность оценок нелинейной регрессии.— Теор. вероят. и матем. статистика, вып. 6, 1972.

A. V. Ivanov

ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF LEAST SQUARES ESTIMATION IN THE NONLINEAR REGRESSION CASE

Summary

The asymptotic behaviour of least squares estimation is studied in the nonlinear regression case.

Поступила в редколлегию 23.V 1971.