Ю. В. КОЗАЧЕНКО, доц., А. Ю. СЕНЧЕНКОВА, студ.
Киевский университет

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ВЫБОРОЧНОЙ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Пусть $\xi(t)$ — произвольный случайный процесс. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть для процесса $\xi(t)$ выполнены условия теоремы о непрерывности выборочных функций [1] и, кроме того, для всех t, $t \leqslant t^* \leqslant t+h$, $t+h$ из отрезка $[0, 1]$

$$P\left\{\left|\xi(t+h)-\xi(t)-\frac{1}{h}\xi(t^*+h^2)+\frac{1}{h}\xi(t^*)\right| \geqslant g_1(h)\right\} \leqslant q_1(h),$$

где $g_1(h)$ и $q_1(h)$ четные функции от h, невозрастающие при $h \downarrow 0$.

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2^n} g_1(2^{-2^n}) < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2^n} q_1(2^{-2^n}) < \infty.$$

Тогда $\xi(t)$ эквивалентен процессу $\eta(t)$, который с вероятностью 1 имеет непрерывные выборочные производные на $[0, 1]$.

Доказательство. Воспользуемся методом аппроксимации процесса $\xi(t)$ процессом, траектории которого состоят из прямолинейных отрезков, а именно, для любого натурального n положим $t_{n,r} = \frac{r}{2^{2^n}}$, $r = 0, 1, \ldots, 2^{2^n}$,

$$\xi_n(t) = \xi(t_{n,r}) + 2^{2^n}(t - t_{n,r})[\xi(t_{n,r+1}) - \xi(t_{n,r})]$$

при $t_{n,r} \leqslant t \leqslant t_{n,r+1}$.

Тогда $\xi_n(t)$ непрерывны вместе со своими производными всюду за исключением $t = t_{n,r}$, где мы определим $\xi'_n(t)$ как производную слева для $r = 1, 2, \ldots, 2^{2^n}$ и справа для $r = 0$. Теперь $\xi'_n(t)$ определены для всех $t \in [0, 1]$ и имеют разрывы в точках $t = t_{n,r}$, $r =$

$= 1, 2, \ldots, 2^{2^n} - 1$. Находим $\xi_n'(t)$ для $t_{n,r} \leqslant t \leqslant t_{n,r+1}$:

$$\xi_n'(t) = 2^{2^n} [\xi(t_{n,r+1}) - \xi(t_{n,r})].$$

Рассмотрим $\xi_{n+1}(t)$. Точками разрыва $\xi_{n+1}'(t)$ будут $t_{n+1,r} = \frac{r}{2^{2^{n+1}}}$, $r = 0, 1, \ldots, 2^{2^{n+1}}$.

Рассмотрим $|\xi_{n+1}'(t) - \xi_n'(t)|$. Пусть

$$t_{n+1, 2^{2^n} r+m} < t \leqslant t_{n+1, 2^{2^n} r+m+1}, \quad m = 0, 1, \ldots, 2^{2^n} - 1,$$

$$|\xi_{n+1}'(t) - \xi_n'(t)| = |2^{2^{n+1}} \xi(t_{n+1, 2^{2^n} r+m+1}) - 2^{2^{n+1}} \xi(t_{n+1, 2^{2^n} r+m}) -$$

$$- 2^{2^n} \xi(t_{n,r+1}) + 2^{2^n} \xi(t_{n,r})| = 2^{2^n} |\xi(t_{n,r+1}) - \xi(t_{n,r}) -$$

$$- 2^{2^n} \xi(t_{n+1, 2^{2^n} r+m+1}) + 2^{2^n} \xi(t_{n+1, 2^{2^n} r+m})|.$$

$$\mathbf{P}\{\max_{t_{n,r} < t \leqslant t_{n,r+1}} |\xi_{n+1}'(t) - \xi_n'(t)| \geqslant 2^{2^n} g_1(2^{-2^n})\} \leqslant 2^{2^n} q_1(2^{-2^n}).$$

При $r = 0$ такое же неравенство имеет место и для левого конца $t = 0$. Для максимума на всем отрезке $[0, 1]$ получаем оценку

$$\mathbf{P}\{\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\xi_{n+1}'(t) - \xi_n'(t)| \geqslant 2^{2^n} g_1(2^{-2^n})\} \leqslant 2^{2^n} q_1(2^{-2^n}).$$

Так как $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2^n} q_1(2^{-2^n}) < \infty$, то, как и в работе [1], получаем, что с вероятностью единица $\xi_n'(t)$ сходится равномерно по $t \in [0, 1]$. В точках разрыва $t = t_{n,r}$, $r = 1, 2, \ldots, 2^{2^n} - 1$ имеем

$$|\Delta \xi_n'(t_{n,r})| = |2^{2^{n+1}} [\xi(t_{n+1, 2^{2^n} r+1}) - \xi(t_{n+1, 2^{2^n} r})] - 2^{2^n} [\xi(t_{n,r}) -$$

$$- \xi(t_{n,r-1})]|,$$

где $\Delta \xi_n'(t)$ — скачок производной в точке t.

Получаем следующую оценку для скачка производной

$$\mathbf{P}\{|\Delta \xi_n'(t_{n,r})| \geqslant 2^{2^n} g_1(2^{-2^n})\} \leqslant q_1(2^{-2^n}).$$

Для максимального скачка по всем $t_{n,r}$ получаем

$$\mathbf{P}\{\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\Delta \xi_n'(t)| \geqslant 2^{2^n} g_1(2^{-2^n})\} \leqslant (2^{2^n} - 1) q_1(2^{-2^n}).$$

Из сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2^n} q_1 (2^{-2^n})$ следует, что $\Delta\xi'_n(t) \to 0$ с вероятностью единица.

Определим теперь процесс $\eta_n(t)$ равенством $\eta_n(t) = \xi_n(t)$ всюду за исключением $|t - t_{n,r}| < 2^{-2^{n^2}}$, $r = 1, 2, \ldots, 2^{2^n} - 1$. В исключенных интервалах определим $\eta_n(t)$ так, чтобы он имел непрерывную производную $\eta'_n(t)$, принимающую на этих интервалах значения, лежащие между значениями $\xi'_n(t)$ непосредственно слева и справа от $t_{n,r}$. Это можно сделать, например, подобрав подходящую дугу гиперболы на каждом из исключенных интервалах.

Для всех $t \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$|\eta'_n(t) - \xi'_n(t)| \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\Delta\xi'_n(t)|.$$

Отсюда следует, что с вероятностью единица $\eta'_n(t) - \xi'_n(t) \to 0$ и, таким образом, η'_n сходится равномерно, по $t \in [0, 1]$. Так как $\eta'_n(t)$ непрерывны, предельная функция $\eta'(t)$ непрерывна на $[0, 1]$. С другой стороны, при $|t - t_{n,r}| < 2^{-2^{n^2}}$

$$|\eta_n(t) - \xi_n(t)| \leqslant \int_{t_{n,r} - 2^{-2^{n^2}}}^{t} |\eta'_n(s) - \xi'_n(s)|\, ds \leqslant 2^{1-2^{n^2}} |\Delta\xi'_n(t_{n,r})|$$

и, следовательно для всего отрезка $[0,1]$

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\eta_n(t) - \xi_n(t)| < 2^{1-2^{n^2}} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\Delta\xi'_n(t)|,$$

так что с вероятностью единица $\eta_n(t) - \xi_n(t) \to 0$ и $\eta_n(t) \to \eta(t)$. Как показано в работе [1], $\xi_n(t) \to \xi(t)$ с вероятностью единица, следовательно, с вероятностью единица, $\eta(t) = \xi(t)$. Из теоремы о равномерной сходимости следует, что с вероятностью единица непрерывная функция $\eta'(t)$ является производной функции $\eta(t)$. Теорема доказана.

Пусть $\xi(t)$ — нормальный случайный процесс с математическим ожиданием $m(t) = M\xi(t)$ и ковариационной функцией

$$r(t, u) = M[(\xi(t) - m(t))(\xi(u) - m(u))].$$

Теорема 2. Пусть $m(t)$ имеет непрерывную производную $m'(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, а $r(t, u)$ — непрерывную смешанную вторую производную $r_{11}(t, u) \doteq \frac{\partial^2 r(t, u)}{\partial t \partial u}$ при $0 \leqslant t, \ u \leqslant T$, удовлетворяющую для некоторых постоянных $C > 0$, $a > 1$ и всех достаточно малых h условию

$$\Delta_h \Delta_h r_{11}(t, t) \leqslant \frac{C}{|\ln|h||^a}. \qquad (1)$$

Тогда процесс $\xi(t)$ эквивалентен процессу $\eta(t)$, имеющему с вероятностью единица непрерывную выборочную производную на $[0, T]$.

Для простоты можно предполагать, что среднее значение процесса равно нулю.

Доказательство.

$$B = M\left(\xi(t+h) - \xi(t) - \frac{1}{h}\xi(t^* + h^2) + \frac{1}{h}\xi(t^*)\right|^2 =$$

$$= r(t+h, t+h) + r(t, t) + \frac{1}{h^2} r(t^* + h^2, t^* + h^2) +$$

$$+ \frac{1}{h^2} r(t^*, t^*) - 2r(t+h, t) - \frac{2}{h} r(t+h, t^* + h^2) +$$

$$+ \frac{2}{h} r(t+h, t^*) + \frac{2}{h} r(t, t^* + h^2) - \frac{2}{h} r(t, t^*) - \frac{2}{h^2} r(t^* + h^2, t^*).$$

Применив теорему о среднем значении, получим

$$B = hr_{10}(t + \theta h, t + h) - hr_{10}(t + \theta h, t) - r_{10}(t + \theta h, t^* + h^2) -$$

$$- hr_{10}(t^* + \theta h^2, t + h) + hr_{10}(t^* + \theta h^2, t) + r_{10}(t + \theta h, t^*) +$$

$$+ r_{10}(t^* + \theta h^2, t^* + h^2) - r_{10}(t^* + \theta h^2, t^*), \quad 0 < \theta < 1,$$

где $r_{10}(t, u) = \frac{\partial r(t, u)}{\partial t}$ и $r_{10}(t, u) = r_{01}(u, t)$.

Повторным применением к полученному выражению теоремы о среднем значении получаем

$$B = h^2 r_{11}(t + \theta h, t + \gamma h) - h^2 r_{11}(t + \theta h, t^* + \gamma h^2) + h^2 r_{11}(t^* +$$

$$+ \theta h^2, t^* + \gamma h^2) - h^2 r_{11}(t^* + \theta h^2, t + \gamma h), \quad 0 < \gamma < 1.$$

Отсюда, используя (1), получаем

$$B = h^2 \Delta_{t - t^* + \theta h(1-h)} \Delta_{t - t^* + \gamma h(1-h)} r_{11}(t^* + \theta h^2, t^* + \gamma h^2) \leqslant$$

$$\leqslant [\Delta_{t - t^* + \gamma h(1-h)} \Delta_{t - t^* + \gamma h(1-h)} r_{11}(t^* + \theta h^2, t^* + \theta h^2)]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times [\Delta_{t - t^* + \gamma h(1-h)} \Delta_{t - t^* + \gamma h(1-h)} r_{11}(t^* + \gamma h^2, t^* + \gamma h^2)]^{\frac{1}{2}} h^2 \leqslant h^2 C \times$$

$$\times |\ln|t - t^* + \gamma h(1-h)||^{-\frac{a}{2}} |\ln|t - t^* + \theta h(1-h)||^{-\frac{a}{2}}.$$

Рассмотрим теперь неравенство $t < t^* < t + h$. Отсюда

$$|t - t^* + \gamma h(1 - h)| \leqslant 2|h|.$$

Аналогично $|t - t^* + \theta h(1 - h)| \leqslant 2|h|$, поэтому

$$M\left|\xi(t+h) - \xi(t) - \frac{1}{h}\xi(t^* + h^2) + \frac{1}{h}\xi(t^*)\right|^2 \leqslant \frac{Ch^2}{|\ln 2|h||^a}. \quad (2)$$

Для нормальных процессов справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\left\{\left|\xi(t+h) - \xi(t) - \frac{1}{h}\xi(t^* + h^2) + \frac{1}{h}\xi(t^*)\right| \geqslant g_1(h)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\sigma_h}{g_1(h)\sqrt{2h}} e^{-\frac{g_1^2(h)}{2\sigma_h^2}},$$

$$\sigma_h^2 = M(\xi(t+h) - \xi(t) - \frac{1}{h}\xi(t^* + h^2) + \frac{1}{h}\xi(t^*))^2.$$

Пусть

$$g_1(h) = \frac{|h|}{[(|\ln|\ln|h||| - \ln\ln 2)/\ln 2]^{1+\varepsilon}},$$

где $\varepsilon > 0$.

Так как ряды $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2^n} g_1(2^{-2^n})$ и $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2^n} \frac{2\sigma_{2^{-2^n}} e^{-\frac{g_1^2(2^{-2^n})}{2\sigma^2_{2^{-2^n}}}}}{g_1(2^{-2^n})\sqrt{2\pi}}$ сходятся, то теорема 2 следует из теоремы 1.

Замечание. Из теоремы 2 следуют известные условия выборочной дифференцируемости нормальных стационарных процессов [2].

Субгауссовские случайные процессы рассматривались в работе [3]. Справедлива (в обозначениях [3]) теорема.

Теорема 3. Если субгауссовский процесс удовлетворяет условию

$$\tau^{*2}\left(\xi(t+h) - \xi(t) - \frac{1}{h}\xi(t^* + h^2) + \frac{1}{h}\xi(t^*)\right) \leqslant \frac{ch^2}{|\ln|h||^a}$$

для любого $a > 1$, $C > 0$, то $\zeta(t)$ эквивалентен процессу, имеющему с вероятностью единица непрерывные выборочные производные.

Теорему легко доказать, используя некоторые неравенства для субгауссовских процессов из [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Leadbetter M., Weissner Edward W. On continuty and other analytic properties of stochastic process Sample function.— Proc. Amer. Math. Soc., 22, 1, 1969, 291—294.

2. Б е л я е в Ю. К. Локальные свойства выборочных функций стационарных гауссовских процессов.—Теория вероятн. и ее примен., **5**, 1, 1968, 128—131.
3. К о з а ч е н к о Ю. В. Локальные свойства выборочных функций одного класса случайных процессов.— Теория вероятн. и мат. статист., 1, 1970, 109—116.

Yu. V. Kozachenko, A. Yu. Senchenkova

SUFFICIENT CONDITIONS OF SAMPLE DIFFERENTIABILITY OF RANDOM PROCESSES

S u m m a r y

Sufficient conditions of sample differentiability of random processes with probability one are obtained.

Поступила в редколлегию 22.VI 1971.