Ю. М. РЫЖОВ, доц.
Киевский университет

ОДНА ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть $\mathfrak{F}_t$, $t \in [0,T]$ — семейство σ-алгебр и $\mathfrak{F}_{t_1} \subset \mathfrak{F}_{t_2}$, при $t_1 \leqslant t_2$, а $w(t)$ — процесс броуновского движения, причем величины $w(t)$ $\mathfrak{F}_t$-измеримы при каждом t, а приращения $w(u) - w(v)$ не зависят от $\mathfrak{F}_t$ при всех $t \leqslant v \leqslant u$. Будем рассматривать стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\xi(t) = a(t,\xi(t))\,dt + \sigma(t,\xi(t))\,dw(t) \tag{1}$$

или в интегральном виде

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s,\xi(s))\,ds + \int_0^t \sigma(s,\xi(s))\,dw(s), \tag{2}$$

где функции $a(t,x)$ и $\sigma(t,x)$ определены на $[0,T] \times (-\infty, \infty)$, $\mathfrak{F}_t$-измеримы при каждом t и всех $x \in (-\infty, \infty)$.

Теоремы существования и единственности решения такого уравнения доказывались в предложении, что коэффициенты $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ удовлетворяют (локальному) условию Липшица

$$|a(t,x) - a(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leqslant C|x-y|, \tag{3}$$

где C — постоянная, не зависящая от t и от случая.

В предлагаемой заметке получена теорема существования и единственности для уравнения (1) в случае, когда $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ случайны, а C в условии (3) зависит от t и как функция t есть непрерывный с вероятностью 1 процесс, $\mathfrak{F}_t$-измеримый при каждом t.

Теорема 1. Пусть коэффициенты $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ удовлетворяют условиям:

1) $a(t,x)$ и $\sigma(t,x)$ определены на $[0,T] \times (-\infty, \infty)$, измеримы по (t,x) и $\mathfrak{F}_t$-измеримы при каждом t и любом $x \in (-\infty, \infty)$;

2) существует непрерывный с вероятностью 1 процесс $C(t)$, $\mathfrak{F}_t$-измеримый при каждом t и такой, что

$$|a(t,x)|^2 + |\sigma(s,x)|^2 \leqslant C(t)(1 + |x|^2), \tag{а}$$

$$|a(t,x) - a(t,y)|^2 + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 \leqslant C(t)|x-y|^2; \tag{б}$$

3) начальное условие $\xi(0)$ не зависит от $w(t)$, $t \in [0,T]$.

Тогда существует непрерывное с вероятностью 1 решение $\xi(t)$ уравнения (1), и если $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ суть два непрерывных с вероятностью 1 решения уравнения (1) с одним и тем же начальным условием $\xi(0)$, то

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\in[0,T]}|\xi_1(t)-\xi_2(t)|>0\}=0.$$

Доказательство. Заметим, что так же, как и в обычном случае, неравенство (a) можно заменить на

$$|a(t,x)|^2+|\sigma(t,x)|^2\leqslant C(t),$$

(см. [2] гл. 5, теорема 4 и замечание к ней), что мы и сделаем. Далее нам понадобятся некоторые леммы.

Пусть τ_N-момент первого выхода процесса $C(t)$ на уровень $C(t)=N$, $t\in[0,T]$, т. е.

$$\tau_N=\sup\{s:\sup_{u\in[0,s]}C(u)\leqslant N\}.$$

Положим

$$a_N(t,x)=\begin{cases}a(t,x), & t<\tau_N,\\ a(\tau_N,x), & t\geqslant\tau_N,\end{cases}$$

$$\sigma_N(t,x)=\begin{cases}\sigma(t,x), & t<\tau_N,\\ \sigma(\tau_N,x), & t\geqslant\tau_N.\end{cases}$$

Лемма 1. Если выполнены условия теоремы 1, то существует единственное непрерывное с вероятностью 1 решение уравнения

$$d\xi_N(t)=a_N(t,\xi_N(t))\,dt+\sigma_N(t,\xi_N(t))\,dw(t) \tag{4}$$

с начальным условием $\xi_N(t)=\xi(0)$ при $t=0$.

Доказательство. Коэффициенты $a_N(t,x)$ и $\sigma_N(t,x)$ удовлетворяют условиям

$$|a_N(t,x)|^2+|\sigma_N(t,x)|^2\leqslant N,$$

$$|a_N(t,x)-a_N(t,y)|^2+|\sigma_N(t,x)-\sigma_N(t,y)|^2\leqslant N|x-y|^2$$

с вероятностью 1. Поэтому если существуют два непрерывных с вероятностью 1 решения $\xi_N^1(t)$ и $\xi_N^2(t)$ уравнения (4), то можно записать

$$\mathbf{M}|\xi_N^{(1)}(t)-\xi_N^{(2)}(t)|^2=\mathbf{M}\{\int_0^t[a_N(s,\xi_N^{(1)}(s))-a_N(s,\xi_N^{(2)}(s))]\,ds+$$

$$+\int_0^t [\sigma_N(s,\xi_N^{(1)}(s)) - \sigma_N(s,\xi_N^{(2)}(s))]\,dw(s)\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2(T+1)N\int_0^t \mathbf{M}\,|\,\xi_N^{(1)}(s) - \xi_N^{(2)}(s)\,|^2\,ds.$$

Из этого соотношения обычным путем получим единственность решения уравнения (4) при любом фиксированном $t \in [0, T]$ (см. например [1]). Аналогичные рассуждения позволяют доказать и существование решения.

Лемма 2. Пусть $N_1 < N_2 < \infty$, а $\xi_{N_i}(t)$ суть решения уравнений

$$d\xi_{N_i}(t) = a_{N_i}(t,\xi_{N_i}(t))\,dt + \sigma_{N_i}(t,\xi_{N_i}(t))\,dw(t)$$

с одним и тем же начальным условием $\xi_{N_i}(t) = \xi(0)$ при $t = 0$, $i = 1,2$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant \tau_{N_1}} |\,\xi_{N_1}(t) - \xi_{N_2}(t)\,| > 0\} = 0.$$

Доказательство. Обозначим

$$\varphi_N(t) = \begin{cases} 1, & t < \tau_N, \\ 0, & t \geqslant \tau_N. \end{cases}$$

Тогда

$$\mathbf{M}\varphi_{N_1}(t)\,|\,\xi_{N_1}(t) - \xi_{N_2}(t)\,|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\mathbf{M}\{\varphi_{N_1}(t)\int_0^t [a_{N_1}(s,\xi_{N_1}(s)) - a_{N_2}(s,\xi_{N_2}(s))]\,ds\}^2 +$$

$$+ 2\mathbf{M}\{\varphi_{N_1}(t)\int_0^t [\sigma_{N_1}(s,\xi_{N_1}(s)) - \sigma_{N_2}(s,\xi_{N_2}(s))]\,dw(s)\}^2.$$

Так как из $\varphi_{N_1}(t) = 1$ следует $\varphi_{N_1}(s) = 1$ при $s \leqslant t$, а также $a_{N_1}(s,x) = a_{N_2}(s,x)$, $\sigma_{N_1}(s,x) = \sigma_{N_2}(s,x)$ при всех $s \leqslant t$ и $x \in (-\infty,\infty)$, то

$$\mathbf{M}\varphi_{N_1}(t)\,|\,\xi_{N_1}(t) - \xi_{N_2}(t)\,|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\mathbf{M}\{\int_0^t \varphi_{N_1}(s)[a_{N_1}(s,\xi_{N_1}(s)) - a_{N_1}(s,\xi_{N_2}(s))]\,ds\}^2 +$$

$$+ 2\mathbf{M}\{\int_0^t \varphi_{N_1}(s)[\sigma_{N_1}(s,\xi_{N_1}(s)) - \sigma_{N_1}(s,\xi_{N_2}(s))]\,dw(s)\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2N_1(T+1)\int_0^t \mathbf{M}\varphi_{N_1}(s)\,|\,\xi_{N_1}(s) - \xi_{N_2}(s)\,|^2\,ds.$$

Отсюда легко получить

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant\tau_{N_1}}|\xi_{N_1}(t)-\xi_{N_2}(t)|>0\}=0.$$

Вернемся к доказательству теоремы. По лемме 2 процессы $\xi_{N_1}(t)$ и $\xi_{N_2}(t)$ совпадают с вероятностью 1 до тех пор, пока процесс $C(t)$ не пересечет впервые уровень $C(t)=N_1$. Поэтому

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\in[0,T]}|\xi_{N_1}(t)-\xi_{N_2}(t)|>0\}\leqslant\mathbf{P}\{\sup_{t\in[0,T]}C(t)>N_1\},$$

и из непрерывности с вероятностью 1 процесса $C(t)$ получим

$$\lim_{N_2\geqslant N_1\to\infty}\mathbf{P}\{\sup_{t\in[0,T]}|\xi_{N_1}(t)-\xi_{N_2}(t)|>0\}=0.$$

Таким образом, процессы $\xi_N(t)$ при $N\to\infty$ сходятся с вероятностью 1 и равномерно по t к некоторому процессу $\xi(t)$. Поскольку процессы $\xi(t)$ непрерывны с вероятностью 1, а сходимость равномерна, то и процесс $\xi(t)$ будет непрерывным с вероятностью 1. Переходя к пределу при $N\to\infty$ в (4), получаем, что процесс $\xi(t)$ удовлетворяет уравнению (1). Существование решения доказано.

Для доказательства единственности рассмотрим

$$\mathbf{M}\varphi_N(t)|\xi_1(t)-\xi_2(t)|^2,$$

где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — два непрерывных с вероятностью 1 решения уравнения (1).

Так же, как и выше, получим

$$\mathbf{M}\varphi_N(t)|\xi_1(t)-\xi_2(t)|^2\leqslant$$

$$\leqslant 2N(T+1)\int_0^t\mathbf{M}\varphi_N(s)|\xi_1(s)-\xi_2(s)|^2\,ds,$$

откуда следует

$$\mathbf{P}\{\sup_{t<\tau_N}|\xi_1(t)-\xi_2(t)|>0\}=0.$$

Но тогда

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\in[0,T]}|\xi_1(t)-\xi_2(t)|>0\}\leqslant\mathbf{P}\{\sup_{t\in[0,T]}C(t)>N\}.$$

Переходя к пределу при $N\to\infty$ и учитывая непрерывность с вероятностью 1 процесса $C(t)$, получаем

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\in[0,T]}|\xi_1(t)-\xi_2(t)|>0\}=0.$$

Теорема доказана.

Заметим, что условие Липшица 2) можно заменить локальным условием Липшица.

Рассмотрим теперь стохастическое уравнение

$$d\zeta(t) = a(t,\zeta(t))\,dt + \sigma(t,\zeta(t))\,d\eta(t), \tag{5}$$

где $\eta(t)$ — случайный процесс, являющийся D-мартингалом, а коэффициенты $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1.

Теорема 2. Пусть $\eta(t), t \in [0, T]$ есть D-мартингал, удовлетворяющий условию

$$\mathbf{M}(|\eta(t) - \eta(s)|^2/\mathfrak{F}_s) = \mathbf{M}\left(\int\limits_s^t \rho(u)\,du/\mathfrak{F}_s\right),$$

где $\rho(u)$ — непрерывная с вероятностью 1 неотрицательная функция, а функции $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1.

Тогда существует решение уравнения (5), и если $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ суть два решения уравнения (5), то

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\in[0,T]} |\zeta_1(t) - \zeta_2(t)| > 0\} = 0.$$

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1 и основано на приводимых ниже леммах. Обозначим

$$\tau_N^0 = \sup\{t : \sup_{s\in(0,t)} C(s) < N, \sup_{s\in(0,t)} \rho(s) < N\},$$

$$a_N(t, x) = \begin{cases} a(t, x), & t < \tau_N^0, \\ a(\tau_N^0, x), & t \geqslant \tau_N^0, \end{cases}$$

$$\sigma_N(t, x) = \begin{cases} \sigma(t, x), & t < \tau_N^0, \\ \sigma(\tau_N^0, x), & t \geqslant \tau_N^0, \end{cases}$$

$$\rho_N(t) = \begin{cases} \rho(t), & t \leqslant \tau_N^0, \\ \rho(\tau_N^0), & t > \tau_N^0. \end{cases}$$

Лемма 3. Если $a(t,x)$ и $\sigma(t,x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, то существует единственное с вероятностью 1 решение $\zeta_N(t)$ уравнения

$$d\zeta_N(t) = a_N(t, \zeta_N(t))\,dt + \sigma_N(t, \zeta_N(t))\,d\eta_N(t), \tag{6}$$

где $\eta_N(t)$ есть D-мартингал, удовлетворяющий условию

$$\mathbf{M}(|\eta_N(t) - \eta_N(s)|^2/\mathfrak{F}_s) = \mathbf{M}\left(\int\limits_s^t \rho_N(u)\,du/\mathfrak{F}_s\right).$$

Лемма 4. Имеет место соотношение

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\in(0,\tau_{N_1}^0)} |\zeta_{N_1}(t) - \zeta_{N_2}(t)| > 0\} = 0, \quad N_1 \leqslant N_2,$$

Теперь легко доказать теорему 2, воспользовавшись непрерывностью с вероятностью 1 функций $C(t)$ и $\rho(t)$. Отметим, что для функций $C(t)$ и $\rho(t)$ можно было требовать лишь ограниченность по вероятности.

Из доказанных выше теорем вытекают результаты работ (3 и 4), касающиеся существования и единственности решений некоторых стохастических дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. К., «Наукова думка», 1968.

2. Скороход А. В. Исследования по теории случайных процессов. Изд-во КГУ, 1961.

3. Сергеева Л. В., Тетерина Н. И. Исследование решения стохастического уравнения со случайными коэффициентами.— Теория вероятностей и математическая статистика, вып. 3, 1970. 141—154.

4. Рыжов Ю. М. О существовании и единственности решения стохастического дифференциального уравнения с дифференциалом по гауссовскому процессу.— Теория вероятностей и математическая статистика, вып. 5, 1971, 107—115.

Yu. M. Ryzhov

AN EXISTENCE AND UNIQUENESS THEOREM FOR STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Summary

The existence and uniqueness of the solution of the stochastic differential equation

$$d\zeta(t) = a(t, \zeta(t))\,dt + \sigma(t, \zeta(t))\,d\eta(t)$$

are proved where coefficients $a(t, x)$ and $\sigma(t, x)$ satisfy the condition

$$|a(t, x) - a(t, y)|^2 + |\sigma(t, x) - \omega(t, y)|^2 \leqslant C(t)\,|x - y|^2,$$

$C(t)$ is continued with probability one random function and $\eta(t)$ is Brownian motion process or D-martingale.

Поступила в редколлегию 16.VI 1971.