где $g(x) = -f(x)$, а $\sum_{k=1}^{N} g(k) > 0$; если $d \neq 1$ — наибольший общий делитель чисел f_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$, то

$$P\left\{\sum_{l=0}^{n} f(S_l + x) = k\right\} = P\left\{\sum_{l=0}^{n} h(S_l + x) = \frac{k}{d}\right\},$$

где $h(x) = \frac{f(x)}{d}$ и $h(k)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ — взаимно простые числа.

Асимптотическое разложение распределения

$$P_{n,x}(k) = P\left\{\sum_{l=0}^{n} f(S_l + x) = k\right\}$$

будем искать при $k = 0(\sqrt{n})$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi_{\lambda,z}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k P\left\{\sum_{l=0}^{m} f(S_l + x) = k\right\}, \tag{1}$$

где $|\lambda| < 1$, $|z| = 1$.

Используя формулу полной вероятности, можно показать, что $\varphi_{\lambda,z}(x)$ удовлетворяет следующим разностным уравнениям:

$$\varphi_{\lambda,z}(x) - z^{f(x)} = \frac{\lambda z^{f(x)}}{2}\varphi_{\lambda,z}(x-1) + \frac{\lambda z^{f(x)}}{2}\varphi_{\lambda,z}(x+1)$$

$$\text{при } x = 1, 2, \ldots, N, \tag{2}$$

$$\varphi_{\lambda,z}(x) - 1 = \frac{\lambda}{2}\varphi_{\lambda,z}(x-1) + \frac{\lambda}{2}\varphi_{\lambda,z}(x+1) \text{ при } x \neq 1, 2, \ldots, N. \tag{3}$$

Используя решение (3), получим такую систему уравнений относительно $\varphi_{\lambda,z}(x)$ $(x = 1, 2, \ldots, N)$:

$$\varphi_{\lambda,z}(1)\left(1 - \frac{z^{f_1}(1 - \sqrt{1-\lambda^2})}{2}\right) - \frac{z^{f_1}\lambda}{2}\varphi_{\lambda,z}(2) = \frac{z^{f_1}(1 - \lambda + \sqrt{1-\lambda^2})}{2(1-\lambda)},$$

$$-\frac{\lambda z^{f_2}}{2}\varphi_{\lambda,z}(1) + \varphi_{\lambda,z}(2) - \frac{\lambda z^{f_2}}{2}\varphi_{\lambda,z}(3) = z^{f_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{\lambda z^{f_{N-1}}}{2}\varphi_{\lambda,z}(N-2) + \varphi_{\lambda,z}(N-1) - \frac{\lambda z^{f_{N-1}}}{2}\varphi_{\lambda,z}(N) = z^{f_{N-1}}, \tag{4}$$

$$-\frac{\lambda z^{f_N}}{2}\varphi_{\lambda,z}(N-1)+\varphi_{\lambda,z}(N)\left(1-\frac{z^{f_N}(1-\sqrt{1-\lambda^2})}{2}\right)=$$

$$=\frac{z^{f_N}(1-\lambda+\sqrt{1-\lambda^2})}{2(1-\lambda)}.$$

По правилу Крамера находим, что

$$\varphi_{\lambda,z}(N)=\frac{D_1(\lambda,z)}{D_2(\lambda,z)},\tag{5}$$

где

$$D_1(\lambda,z)=\begin{vmatrix}
1-\frac{z^{f_1}(1-\sqrt{1-\lambda^2})}{2} & -\frac{\lambda z^{f_1}}{2} & 0 & \ldots & \frac{z^{f_1}(1-\lambda+\sqrt{1-\lambda^2})}{2(1-\lambda)}\\
-\frac{\lambda z^{f_2}}{2} & 1 & -\frac{\lambda z^{f_2}}{2} & \ldots & z^{f_2}\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
0 \;\ldots & \frac{z^{f_{N-1}}\lambda}{2} & 1 & & z^{f_{N-1}}\\
0 \;\ldots & 0 & -\frac{z^{f_N}\lambda}{2} & & \frac{z^{f_N}(1-\lambda+\sqrt{1-\lambda^2})}{2(1-\lambda)}
\end{vmatrix}.$$

$$D_2(\lambda,z)=\begin{vmatrix}
1-\frac{z^{f_1}(1-\sqrt{1-\lambda^2})}{2} & -\frac{\lambda z^{f_1}}{2} & 0 & \ldots & 0\\
-\frac{\lambda z^{f_2}}{2} & 1 & -\frac{\lambda z^{f_3}}{2} & \ldots & 0\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
0 \;\ldots & -\frac{\lambda z^{f_{N-1}}}{2} & 1 & & -\frac{\lambda z^{f_{N-1}}}{2}\\
0 \;\ldots & 0 & -\frac{\lambda z^{f_N}}{2} & & 1-\frac{z^{f_N}(1-\sqrt{1-\lambda^2})}{2}
\end{vmatrix}.$$

Тогда

$$P_{n,N}(k)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=1-\frac{1}{n}}\frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{D_1(\lambda,z)}{D_2(\lambda,z)}z^{-(k+1)}\,dz.\tag{6}$$

Здесь по λ интегрируется та ветвь подынтегральной функции, для которой $\arg\sqrt{1-\lambda^2}=0$ при $0<\lambda<1$. Таким образом, получено интегральное представление (6) для распределения $P_{n,N}(k)$.

Займемся исследованием подынтегральной функции $\varphi_{\lambda,z}(N)=\frac{D_1(\lambda,z)}{D_2(\lambda,z)}$. Нас будет интересовать расположение полюсов $z(\lambda)$ функции $\varphi_{\lambda,z}(N)$. Сформулируем теорему Ольги Тауски [3], на которую будут делаться ссылки в процессе дальнейших исследований.

Теорема 1. Пусть $A=(a_{ij})$ — неразложимая квадратная матрица порядка n, такая, что

$$|a_{ii}|\geqslant\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\quad(i=1,2,\ldots,n),$$

причем знак равенства имеет место самое большее в $n-1$ из этих соотношений. Тогда A — неособенная матрица.

Докажем следующее утверждение.

Лемма 1. Уравнение

$$D_2(\pm 1,z)=0 \tag{7}$$

не имеет корней, равных по модулю единице, кроме простого корня $z=1$.

Доказательство. Запишем уравнение (7) в таком виде:

$$|D_2|=\begin{vmatrix} 1-\frac{z^{f_1}}{2} & -\frac{z^{f_1}}{2} & 0 & \ldots & 0\\ -\frac{z^{f_2}}{2} & 1 & -\frac{z^{f_2}}{2} & \ldots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & & -\frac{z^{f_N}}{2} & 1-\frac{z^{f_N}}{2}\end{vmatrix}=0. \tag{8}$$

Очевидно, что матрица D_2 неразложима при $z\neq 0$. Тогда в силу теоремы 1 корнями уравнения (8) могут быть только те z, для которых $z^{f_1}=z^{f_N}=1$. Если $f_1=1$ или $f_N=1$, то лемма доказана. Если же $f_1\neq 1$ и $f_N\neq 1$, то на основании сказанного выше корнями уравнения (8) могут быть только те z, которые одновременно являются корнями следующего уравнения:

$$
\begin{vmatrix}
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-\frac{z^{f_2}}{2} & 1 & -\frac{z^{f_2}}{2} & 0 & \dots & 0 \\
0 & -\frac{z^{f_3}}{2} & 1 & -\frac{z^{f_3}}{2} & \dots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\
0 & \dots & -\frac{z^{f_{N-1}}}{2} & 1 & & -\frac{z^{f_{N-1}}}{2} \\
0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2} & & \frac{1}{2}
\end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix}
1-\frac{z^{f_2}}{2} & -\frac{z^{f_2}}{2} & 0 & \dots & 0 \\
-\frac{z^{f_3}}{2} & 1 & -\frac{z^{f_3}}{2} & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & -\frac{z^{f_{N-2}}}{2} & 1 & -\frac{z^{f_{N-2}}}{2} \\
0 & \dots\ 0 & -\frac{z^{f_{N-1}}}{2} & & 1-\frac{z^{f_{N-1}}}{2}
\end{vmatrix} = 0. \qquad (9)
$$

Корнями уравнения (9) могут быть только те z, для которых $z^{f_2} = z^{f_{N-1}} = 1$ (в силу вышеупомянутой теоремы) и которые удовлетворяют уравнению

$$
\begin{vmatrix}
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\
-\frac{z^{f_3}}{2} & 1 & -\frac{z^{f_3}}{2} & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0\ \dots & -\frac{z^{f_{N-2}}}{2} & 1 & & -\frac{z^{f_{N-2}}}{2} \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & & \frac{1}{2}
\end{vmatrix} =
$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\frac{z^{l_3}}{2} & -\frac{z^{l_3}}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{z^{l_4}}{2} & 1 & -\frac{z^{l_4}}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & -\frac{z^{l_{N-2}}}{2} & 1-\frac{z^{l_{N-2}}}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

Продолжая этот процесс, мы получим в результате, что корнями уравнения (8) могут быть только те z, лежащие на единичной окружности, для которых выполняется условие

$$z^{l_1} = z^{l_2} = \ldots = z^{l_N} = 1. \tag{10}$$

Так как l_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ — взаимно простые числа, то равенство (10) возможно лишь тогда, когда $z = 1$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что $D'_{2z}(\pm 1, z) \neq 0$ при $z = 1$. Лемма доказана.

Замечание. Если $d \neq 1$ — наибольший общий делитель чисел l_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$, то аналогичными рассуждениями можно доказать, что корнями уравнения (8), модуль которых равен единице, являются только те z, для которых $z^d = 1$. Притом непосредственной проверкой можно убедиться, что эти корни будут простые, если $\sum\limits_{k=1}^{N} l_k \neq 0$.

Лемма 2. Уравнение по z

$$D_2(\lambda, z) = 0 \text{ при } |\lambda| \leqslant 1, \ \lambda \neq \pm 1 \tag{11}$$

не имеет корней, по модулю равных единице.

Для доказательства этого утверждения достаточно показать (в силу теоремы 1), что

$$\left| 1 - \frac{z^{l_j}(1-\sqrt{1-\lambda^2})}{2} \right| > \frac{1}{2} \ (j = 1, N) \text{ при } |\lambda| \leqslant 1, \ \lambda \neq \pm 1, \ |z| = 1. \tag{12}$$

Неравенство (12) справедливо, так как $|1 - \sqrt{1-\lambda^2}| < 1$ при $|\lambda| \leqslant 1$, $\lambda \neq \pm 1$ для выбранной ветви функции $\sqrt{1-\lambda^2}$.

Из утверждения леммы 2 следует, что функция $\varphi_{\lambda,z}(N)$ при $|z| = 1$ если и имеет особые точки λ_k, кроме точек $\lambda = \pm 1$, то они удовлетворяют условию $|\lambda_k| > 1$. Кроме того, если обозначить $\sqrt{1-\lambda^2} = u$, то нетрудно заметить, что $D_2(\sqrt{1+u^2}, z) =$

Р. В. БОЙКО, канд. физ.-мат. наук
Институт математики АН УССР

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛА ОТ ПРОСТЕЙШЕГО СИММЕТРИЧНОГО СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения ± 1 с вероятностью $\frac{1}{2}$. Рассмотрим функционал

$$\eta_{n,x} = \sum_{k=0}^{n} f(S_k + x),$$

где $S_0 = 0$, $S_k = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k$, x — целое число, $f(x)$—финитная функция, определенная в целочисленных точках и принимающая целочисленные значения.

В работах [1, 2] получены асимптотические разложения распределений функционалов $\eta_{n,x}$ для случаев:

а) $f(x) = 0$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 1$;

б) $f(x) = 1$ при $x = 1, 2, \ldots, N$ и $f(x) = 0$ при $x \neq 1, 2, \ldots, N$;

в) $f(x) = 1$ при $x \geqslant 0$ и $f(x) = 0$ при $x < 0$;

г) $f(0) = -1$, $f(1) = 1$ и $f(x) = 0$ при $x \neq 0, 1$.

В настоящей работе ищется асимптотическое разложение распределения функционала $\eta_{n,x}$ при больших n для случая, когда $f(x)$ — финитная функция, принимающая целочисленные значения, и сумма всех значений функции отлична от нуля.

Итак, пусть $f(k) = f_k$ при $k = 1, 2, \ldots, N$; $f(k) = 0$ при $k \neq 1, 2, \ldots, N$ и

$$\sum_{k=1}^{N} f(k) = c \neq 0.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $c > 0$ и f_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ — взаимно простые числа.

Действительно, если $c < 0$, то

$$P\left\{\sum_{l=0}^{n} f(S_l + x) = k\right\} = P\left\{\sum_{l=0}^{n} g(S_l + x) = -k\right\},$$

$= D_2(u, z)$ — целый многочлен относительно u и z. Поэтому (см. [4], § 357) в окрестностях точек $\lambda = \pm 1$ корни уравнения $D_2(\lambda, z) = 0$ представляются некоторым числом рядов, которые расположены по возрастающим степеням $\sqrt{1-\lambda^2}$ или $(1-\lambda^2)^{\frac{1}{2p}}$ (p — некоторое положительное число) и могут содержать конечное число членов с отрицательными показателями.

В силу леммы 1 корни $z_1(\lambda)$, $z_2(\lambda)$ (это те корни уравнения $D_2(\lambda, z) = 0$, для которых выполняются условия $z_1(1) = 1$, $z_2(-1) = 1$) представимы в окрестностях точек $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ соответственно в таком виде:

$$z_1(\lambda) = 1 + a_1\sqrt{1-\lambda^2} + a_2(1-\lambda^2) + \ldots + a_m(1-\lambda^2)^{\frac{m}{2}} + \\ + o((1-\lambda^2)^{\frac{m}{2}}),$$

$$z_2(\lambda) = 1 + b_1\sqrt{1-\lambda^2} + b_2(1-\lambda^2) + \ldots \\ \ldots + b_m(1-\lambda^2)^{\frac{m}{2}} + o((1-\lambda^2)^{\frac{m}{2}}).$$

Легко видеть, что $a_j = b_j$ ($j = 1, 2, \ldots$). Несложными вычислениями можно получить

$$a_1 = \frac{1}{c} = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{N} f_k} > 0,$$

поэтому

$$|z_1(\lambda)| \geqslant 1, \quad |z_2(\lambda)| \geqslant 1.$$

Учитывая все выше сказанное, формулу (6) можно записать так:

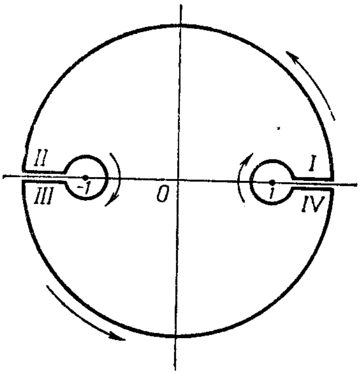
$$P_{n,N}(k) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{D_1(\lambda, z)}{D_2(\lambda, z)}z^{-(k+1)}\,dz,$$

где C_n — новый контур интегрирования (см. рисунок), состоящий из двух окружностей C'_{r_n} и C''_{r_n} радиуса r_n с центрами в точках 1 и -1; окружности C_{ε_n} радиуса $1 + n^{-\frac{2}{3}}$ с центром в точке 0, верхнего I и нижнего IV берегов разреза по действительной оси от $1 + r_n$ до $1 + n^{-\frac{2}{3}}$, верхнего II и нижнего III берегов разреза по действительной оси от $-1 - r_n$ до $-1 - n^{-\frac{2}{3}}$; $\varepsilon_n = O(n^{-\frac{2}{3}})$.

Тогда

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'_{r_n}}\frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{D_1(\lambda, z)}{D_2(\lambda, z)}z^{-(k+1)}\,dz\right| = O\left(e^{-n^{\gamma}}\right),$$

где $0 < \gamma < 1$.



Используя теорему о вычетах, получаем:

$$P_{n,N}(k) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'_{r_n}+C''_{r_n}+\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}}\frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{M}\mathrm{Res}\left[\frac{D_1(\lambda, z)}{D_2(\lambda, z)}z^{-(k+1)}\right]_{z=z_j(\lambda)} + O\left(e^{-n^{\gamma}}\right), \tag{13}$$

где $z_j(\lambda)$ — те корни уравнения $D_2(\lambda, z) = 0$, которые удовлетворяют условию $|z_j(\lambda)| > 1$.

В силу леммы 1

$$\lim_{\lambda\to 1}|z_j(\lambda)| = |z_j(1)| > 1 \text{ при } j = 2, 3, \ldots, M;$$

$$\lim_{\lambda\to -1}|z_j(\lambda)| = |z_j(-1)| > 1 \text{ при } j \neq 2.$$

Поэтому, если положить $r_n = e^{-n}$, будет иметь место такая оценка:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'_{r_n}+C''_{r_n}+\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}}\frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}}\sum_{j=3}^{M}\mathrm{Res}\left[\frac{D_1(\lambda, z)}{D_2(\lambda, z)}z^{-(k+1)}\right]_{z=z_j(\lambda)} +\right.$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'_{r_n}+C''_{r_n}+\mathrm{II}+\mathrm{III}}\frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}}\mathrm{Res}\left[\frac{D_1(\lambda, z)}{D_2(\lambda, z)}z^{-(k+1)}\right]_{z=z_1(\lambda)} +$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'_{r_n}+C''_{r_n}+\mathrm{I}+\mathrm{IV}}\frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}}\mathrm{Res}\left[\frac{D_1(\lambda, z)}{D_2(\lambda, z)}z^{-(k+1)}\right]_{z=z_2(\lambda)}\right| = O\left(e^{-n^{\delta}}\right),$$

$$0 < \delta < 1.$$

Значит,

$$P_{n,N}(k) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{I+IV}} \frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}} \operatorname{Res}\left[\frac{D_1(\lambda, z)}{D_2(\lambda, z)} z^{-(k+1)}\right]_{z=z_1(\lambda)} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{II+III}} \frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}} \operatorname{Res}\left[\frac{D_1(\lambda, z)}{D_2(\lambda, z)} z^{-(k+1)}\right]_{z=z_2(\lambda)} + O(e^{-n^{\delta_1}}) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_1^{1+n^{-\frac{2}{3}}} x^{-(n+1)} \operatorname{Im}\left[\frac{D_1(x, z_1(x))}{D'_{2z}(x, z_1(x))} z_1^{-(k+1)}(x)\right] dx -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1-n^{-\frac{2}{3}}}^{-1} x^{-(n+1)} \operatorname{Im}\left[\frac{D_1(x, z_2(x))}{D'_{2z}(x, z_2(x))} z_2^{-(k+1)}(x)\right] dx + O(e^{-n^{\alpha}}) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_1^{1+n^{-\frac{2}{3}}} x^{-(n+1)} \operatorname{Im}\left[\frac{D_1(x, z_1(x)) + D_1(-x, z_1(x))}{D'_{2z}(x, z_1(x))} z_1^{-(k+1)}(x)\right] \times$$

$$\times\, dx + O(e^{-n^{\alpha}}), \tag{14}$$

где $0 < \alpha, \delta_1 < 1$ ($n+1$ считаем для определенности четным) или после подстановки $x = \sqrt{1+u^2}$:

$$P_{n,N}(k) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\varepsilon'_n} (1+u^2)^{-\frac{n+2}{2}} \times$$

$$\times \operatorname{Im}\left[\frac{\check{D}_1(u, \check{z}_1(u)) + \hat{D}_1(u, \check{z}_1(u))}{\check{D}'_{2z}(u, \check{z}_1(u))} \check{z}_1^{-(k+1)}(u)\right] u\,du + O(e^{-n^{\alpha}}) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\varepsilon'_n} e^{-\frac{n+2}{2}\ln(1+u^2)} u \operatorname{Im}\Big[e^{-(k+1)\ln \check{z}_1(u)} \times$$

$$\times \frac{\check{D}_1(u, \check{z}_1(u)) + \hat{D}_1(u, \check{z}_1(u))}{\check{D}'_{2z}(u, \check{z}_1(u))}\Big] du + O(e^{-n^{\alpha}}), \tag{15}$$

где $\varepsilon'_n = O(n^{-\frac{1}{3}})$, $\check{D}_j(u, \check{z}(u)) = D_j(\sqrt{1+u^2}, z(\sqrt{1+u^2}))$, $j = 1, 2$, $\hat{D}_1(u, \check{z}_1(u)) = D_1(-\sqrt{1+u^2}, z_1(\sqrt{1+u^2}))$.

Используя формулу Тейлора, можно получить такие разложения:

$$\exp\left[-\frac{n+2}{2}\ln(1+u^2)\right]=\exp\left(-\frac{nu^2}{2}\right)(1+O(u^2+u^4n)), \tag{16}$$

$$\exp[-(k+1)\ln\check{z}_1(u)]=\exp\left[-(k+1)\ln\left(1-\frac{iu}{c}+u^2a_2+O(u^3)\right)\right]=$$

$$=\exp\left\{\frac{iku}{c}\right\}\left[1+\frac{iu}{c}-ku^2\left(a_2+\frac{1}{2c}\right)+O(u^2+ku^3)\right], \tag{17}$$

$$\frac{\check{D}_1(u,\check{z}_1(u))+\hat{D}_1(u,\check{z}_1(u))}{\check{D}'_{2z}(u,\check{z}_1(u))}=-\frac{i}{cu}+d_0+O(u), \tag{18}$$

при $0<u<\varepsilon'_n$.

Подставляя разложения (16)—(18) в (15), после несложных преобразований получим

$$P_{n,N}(k)=\frac{1}{\pi c}\int_0^{\varepsilon'_n}e^{-\frac{nu^2}{2}}\left[\cos\frac{ku}{c}+u\,\mathrm{Im}\,e^{\frac{iku}{c}}\left\{d_0+\frac{1}{c^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{iku}{c}\left(a_2+\frac{1}{2c}\right)+O(u^2+ku^3+nu^4)\right\}\right]du+O(e^{-n^\alpha})$$

или после подстановки $u=\frac{x}{\sqrt{n}}$

$$P_{n,N}(k)=\frac{1}{\pi c\sqrt{n}}\int_0^{\varepsilon'_n\sqrt{n}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cos\frac{kx}{c\sqrt{n}}\,dx+\frac{1}{\pi n}\int_0^{\varepsilon'_n\sqrt{n}}e^{-\frac{x^2}{2}}x\,\mathrm{Im}\,e^{\frac{ikx}{c\sqrt{n}}}\times$$

$$\times\left[d_0+\frac{1}{c^2}+\frac{ikx}{c\sqrt{n}}\left(a_2+\frac{1}{2c}\right)+O\left(\frac{1}{n}\left(x^2+\frac{kx^3}{\sqrt{n}}+x^4\right)\right)\right]dx+$$

$$+O(e^{-n^\alpha})=\frac{1}{c}\sqrt{\frac{2}{\pi n}}e^{-\frac{k^2}{2c^2n}}+\frac{1}{\pi n}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}x\,\mathrm{Im}\,e^{\frac{ikx}{c\sqrt{n}}}\times$$

$$\times\left[d_0+\frac{1}{c^2}+\frac{ikx}{c\sqrt{n}}\left(a_2+\frac{1}{2c}\right)\right]dx+o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{19}$$

так как $\varepsilon'_n\sqrt{n}=O(n^{\frac{1}{6}})$.

Формула (19) дает первых два члена асимптотического разложения распределения $P_{n,N}(k)$ при $k=O(\sqrt{n})$.

Привлекая в разложения (16) — (18) члены с более высокими степенями u, аналогично можно получить любое число членов асимптотики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойко Р. В. Об асимптотике распределений некоторых аддитивных функционалов от простейшего случайного блуждания. Канд. дисс., Киев, 1970.
2. Бойко Р. В. Об асимптотике распределения времени пребывания простейшего случайного блуждания на положительной полуоси.— Укр. матем. ж. (в печати).
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1967.
4. Гурса Э. Курс математического анализа, т. 2. ОНТИ — НКТП СССР. М.— Л., 1936.

R. V. BOYKO

ASYMPTOTICAL ANALYSIS OF DISTRIBUTION FUNCTION OF A FUNCTIONAL ON THE SIMPLEST SYMMETRICAL RANDOM WALK

Summary

Asymptotical expansion of distribution function of the finite additive functional on the simplest symmetrical random walk is obtained.

Поступила в редколлегию 17.IV 1971.