О СУЩЕСТВОВАНИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОДНИМ КЛАССОМ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе [1] рассмотрена задача управления случайным процессом, определяемым системой стохастических дифференциальных уравнений

$$d\xi(t) = \alpha(t, \xi(s), s \leqslant t)\, du(t) + \beta(t, \xi(s), B(s), s \leqslant t)\, dB(t), \qquad (1)$$
$$t \geqslant 0,$$

где B — процесс броуновского движения и управление u представляет собой стохастический процесс, удовлетворяющий определенным условиям.

Задача заключается в том, чтобы минимизировать выражение

$$M\Phi[\xi(\cdot), u(\cdot)],$$

где $\Phi[f(\cdot), h(\cdot)]$ — некоторый функционал, зависящий от всех значений функций $f(t)$ и $h(t)$ на отрезке $t \in [0, \infty)$.

В работе [1] доказана теорема о существовании минимума для неотрицательных полунепрерывных функционалов $\Phi(f, h)$ на любом L-компактном классе определенных допустимых управлений.

Цель настоящей работы — доказать аналогичный результат для более общего стохастического дифференциального уравнения вида

$$d\xi(t) = \alpha_0(t, \theta_t\xi)\, dt + \alpha_1(t, \theta_t\xi)\, du(t) + \beta(t, \theta_t\xi, dt), \quad t \geqslant 0. \qquad (2)$$

Разъясним смысл уравнения (2) и введем нужные предположения.

Пусть $\{\Omega, \mathfrak{S}, P\}$ — фиксированное вероятностное пространство, H_0 — «пространство начальных значений», — множество функций $\varphi = \varphi(s)$, $-\infty < s \leqslant 0$ со значениями в конечномерном линейном пространстве X, ограниченных и непрерывных справа при $s < 0$, имеющих пределы слева при $s \leqslant 0$, и удовлетворяющих условию

$$\|\varphi\|^2 = \int_{-\infty}^{0} |\varphi(s)|^2 K(ds) < \infty.$$

Здесь $K(A)$ — некоторая конечная мера на борелевских множествах полупрямой $(-\infty, 0]$, $K = K(-\infty, 0] < \infty$.

Пусть $\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$ — монотонно неубывающее семейство σ-алгебр, $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{S}$. Под $\beta(t, \varphi, h)$ будем понимать некоторую случайную функцию аргументов $t \geqslant 0$, $h \geqslant 0$, $\varphi \in H_0$ со значениями в X. При этом предполагаем, что при фиксированном ω с вероятностью 1 функция $\beta(t, \varphi, h)$ измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}_0 \times \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борелевских множеств полупрямой $[0, \infty)$, а $\mathfrak{C}_0$ — минимальная σ-алгебра, содержащая цилиндрические множества пространства H_0.

Далее, предполагаем, что:

а) случайный вектор $\beta(t, \varphi, h)$ $\mathfrak{F}_{t+h}$-измерим;

б) моменты второго порядка вектора $\beta(t, \psi, h)$ конечны и для каждого $T > 0$ существует постоянная $L = L(T)$, не зависящая от случая, такая, что при $t \in [0, T]$

$$|\mathbf{M}\{\beta(t, \varphi, h)/\mathfrak{F}_t\}| \leqslant L(1 + \|\varphi\|)h, \tag{3}$$

$$\mathbf{M}\{|\beta(t, \varphi, h)|^2/\mathfrak{F}_t\} \leqslant L(1 + \|\varphi\|^2)h; \tag{4}$$

в) для каждого $T > 0$, $N > 0$ существует постоянная $C_N = C_N(T)$, не зависящая от случая и такая, что для всех φ_1, φ_2, $\|\varphi_i\| \leqslant N$, $t \in [0, T]$

$$|\mathbf{M}\{[\beta(t, \varphi_1, h) - \beta(t, \varphi_2, h)]/\mathfrak{F}_t\}| \leqslant C_N \|\varphi_1 - \varphi_2\| h, \tag{5}$$

$$\mathbf{M}\{|\beta(t, \varphi_1, h) - \beta(t, \varphi_2, h)|^2/\mathfrak{F}_t\} \leqslant C_N \|\varphi_1 - \varphi_2\|^2 h. \tag{6}$$

О случайной функции $\alpha_i(t, \varphi)$ $(i = 0, 1)$ предположим, что она принимает значения в X, $t \geqslant 0$, $\varphi \in H_0$ и:

г) вектор $\alpha_i(t, \varphi)$ $\mathfrak{F}_t$-измерим, для каждого $T > 0$ существует постоянная $L = L(T)$, а для каждых $T > 0$, $N > 0$ — такая постоянная $C_N = C_N(T)$, что

$$\begin{gathered} |\alpha_i(t, \varphi)| \leqslant L(1 + \|\varphi\|), \\ |\alpha_i(t, \varphi_1) - \alpha_i(t, \varphi_2)| \leqslant C_N \|\varphi_1 - \varphi_2\|, \end{gathered} \tag{7}$$

если $\|\varphi_i\| \leqslant N$, $i = 0,1$; $t \in [0, T]$.

Рассмотрим пространство D (D_T) всех функций со значениями в X, определенных на $[0, \infty)$ $([0, T])$, не имеющих разрывов второго рода и непрерывных справа в каждой точке $[0, \infty)$ $([0, T])$. В D введем метрику

$$\rho_D(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{r_D^n(x, y)}{1 + r_D^n(x, y)}, \tag{8}$$

где $r_D^T(x, y)$ $(T > 0)$ — метрика Скорохода в пространстве D_T функций без разрывов второго рода, заданных на отрезке $[0, T]$ (см. [3]).

Введем класс допустимых управлений U. Управление $u(t)$, $t \geqslant 0$ назовем допустимым, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) случайный процесс $u(t)$ подчинен потоку σ-алгебр $\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$ и его выборочные функции с вероятностью 1 принадлежат D;

$$
\begin{aligned}
&2)\ |\mathbf{M}\{[u(t+\Delta t)-u(t)]/\mathfrak{F}_t\}| \leqslant \Delta t, \\
&\mathbf{M}\{|u(t+\Delta t)-u(t)|^2/\mathfrak{F}_t\} \leqslant \Delta t.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Определим семейство операторов θ_t следующим образом: если $f(z)$ — функция, определенная при $z=(-\infty, t]$, то положим $\theta_t f(s) = f(t+s)$ при $s \leqslant 0$.

Решением стохастического уравнения (2) при заданном начальном условии $\xi(s)=\varphi(s)$ при $s \leqslant 0$ назовем случайный процесс $\xi(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, совпадающий с $\varphi(t)$ при $t \leqslant 0$ и такой, что $\xi(t)$ $\mathfrak{F}_t$-измеримо, и

$$
\xi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \alpha_0(s, \Theta_s\xi)\,ds + \int_0^t \alpha_1(s, \Theta_s\xi)\,du(s) + \int_0^t \beta(s, \Theta_s\xi, ds) \tag{10}
$$

с вероятностью 1 при каждом $t \in [0, \infty)$.

Теорема 1. Если случайные функции $\alpha_i(t, \varphi)$ и случайное поле $\beta(t, \varphi, h)$ удовлетворяют ранее сформулированным условиям, $u(t)$ является допустимым управлением и $\varphi(s) \in H_0$, то стохастическое уравнение (2) имеет, и притом единственное, с точностью до стохастической эквивалентности, решение, удовлетворяющее начальному условию $\xi(s) = \varphi(s)$, $s \leqslant 0$. При этом выборочные функции $\xi(t)$ с вероятностью 1 не имеют разрывов второго рода и непрерывны справа.

Доказательство этой теоремы вытекает из теоремы 1, доказанной в работе [2].

Как показывает проверка, условия указанной теоремы выполняются для стохастического дифференциального уравнения (2) при сделанных предположениях относительно коэффициентов этого уравнения и управления $u(t)$.

Если уравнение (2) удовлетворяет условиям теоремы 1 и начальное условие $\varphi \in H_0$ — фиксированное, то его решение индуцирует в D_T некоторую меру, обозначим ее через $\mu_{\varphi\gamma T}$, где γ обозначает случайное поле

$$
\gamma = \gamma(t, \varphi, h) = \alpha_0(t, \varphi)h + \alpha_1(t, \varphi)[u(t+h)-u(t)] + \beta(t, \varphi, h). \tag{11}
$$

Через $\Pi\{L, C_N\}$ обозначим класс всех случайных полей (11), удовлетворяющих условиям теоремы существования и единственности с фиксированным семейством констант L, C_N. Тогда справедлива следующая теорема, вытекающая из теоремы, доказанной в работе И. И. Гихмана [2].

Теорема 2. Семейство мер $\mu_{\varphi\gamma T}$ на $\{D_T, \mathfrak{C}_T\}$ (где $\mathfrak{C}_T$ — минимальная σ-алгебра, содержащая все цилиндрические множества пространства D_T), порождаемых решениями стохастических уравнений (2), в котором $\varphi \in H_0$, $\|\varphi\| \leqslant N_0$ и $\gamma \in \Pi(L, C_N)$, N_0, L и C_N ($N > 0$) произвольны, но фиксированы, — слабо компактно.

Теперь можно привести теорему о существовании оптимального управления решением стохастического дифференциального уравнения (2), обобщающую теорему, доказанную в работе [1].

Теорема 3. Пусть $\Phi(x, y)$ — неотрицательный, конечный полунепрерывный снизу функционал на пространстве $D \times D$, $\xi(t) = \xi(t, u)$ — решение стохастического дифференциального уравнения (2), удовлетворяющее условиям теоремы 1.

Тогда в классе допустимых управлений существует такое управление u_0, что МФ $[\xi(t, u), u]$ достигает минимума при $u = u_0$.

В общих чертах, доказательство этой теоремы состоит в следующем.

Пусть $\inf\limits_{u \in U} \text{М}\Phi(\xi, u) = c$. На основании теоремы 2 и компактности множества мер, соответствующих допустимым управлениям, можно утверждать, что для каждого $T > 0$ из последовательностей мер $\mu^{(n)}_{\varphi\gamma T}$ на D_T, соответствующих (ξ_n, u_n), можно выделить подпоследовательность $\mu^{(n_k)}_{\varphi\gamma T}$, соответствующую (ξ_{n_k}, u_{n_k}), слабо сходящуюся к $\mu^{(0)}_{\varphi\gamma T}$ на D_T. С помощью диагонального процесса построим последовательность $(\xi_{n'_k}, u_{n'_k})$ такую, что $\mu^{(n'_k)}_{\gamma\varphi T}$ слабо сходится к $\mu^{(0)}_{\varphi\gamma T}$ на D_T для всех значений T ($T = 1, 2, \ldots$). Из теоремы Скорохода [3] следует, что можно построить новое вероятностное пространство $\{\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{S}}, \tilde{P}\}$ и на нем определить случайные функции $\tilde{\alpha}_0(t, \varphi)$, $\tilde{\alpha}_1(t, \varphi)$, $\tilde{\beta}(t, \varphi, h)$, стохастически эквивалентные функциям $\alpha_0(t, \varphi)$, $\alpha_1(t, \varphi)$, $\beta(t, \varphi, h)$, так, чтобы с вероятностью 1 $(\tilde{\xi}_{n_k}(\cdot), u_{n_k}(\cdot)) \to (\tilde{\xi}_0(\cdot), u_0(\cdot))$ в смысле сходимости по метрике в пространстве $D \times D$, где $\tilde{\xi}_n(\cdot)$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$d\tilde{\xi}_n = \tilde{\alpha}_0(t, \Theta_t\tilde{\xi}_n)\,dt + \alpha_1(t, \Theta_t\tilde{\xi}_n)\,du_n(t) + \tilde{\beta}(t, \Theta_t\tilde{\xi}_n, dt).$$

Так как функционал $\Phi(x, y)$ полунепрерывен снизу, то

$$\underline{\lim}\, \Phi(\tilde{\xi}_{n_k}, u_{n_k}) \geqslant \Phi(\tilde{\xi}_0, u_0).$$

По лемме Фату

$$\text{М}\Phi(\tilde{\xi}_0, u_0) \leqslant \text{М}\,\underline{\lim}\, \Phi(\tilde{\xi}_{n_k}, u_{n_k}) \leqslant \underline{\lim}\, \text{М}\Phi(\tilde{\xi}_{n_k}, u_{n_k}) = c,$$

что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Флеминг В. Х., Нисио М. О существовании оптимальных стохастических управлений.— Сб. перевод.: Математика, 12:3, 1968.
2. Гихман И. И. О слабой компактности множества мер, соответствующих решениям стохастических дифференциальных уравнений. — В сб.: Математич. физика. К., «Наукова думка», 1970.
3. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.
4. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. К., «Наукова думка», 1968.

A. P. Gatun

ON EXISTENCE OF OPTIMUM CONTROL FOR ONE CLASS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Summary

The optimum control existence theorem for stochastic differential equation

$$d\xi(t) = \alpha_0(t, \theta_t\xi)\,dt + \alpha_1(t, \theta_t\xi)\,du(t) + \beta(t, \theta_t\xi, dt);\quad t \geqslant 0$$

is proved.

Поступила в редколлегию 31.VIII 1970.