В. Л. ГИРКО, асс.
Киевский университет

УТОЧНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ДЕТЕРМИНАНТА И ПЕРМАНЕНТА

В статье уточняются предельные теоремы для случайных детерминанта и перманента, полученные автором [1, 2].

Пусть $A_n = (\xi_{kl})$, $D_n = (c_{kl})$ — квадратные матрицы n-го порядка, A_{kl} — алгебраическое дополнение элемента ξ_{kl} матрицы A_n, A^{kl} — перманент матрицы, полученной из A_n вычеркиванием k-й строчки и l-го столбика.

Теорема 1. Если случайные величины ξ_{kl}, $k, l = 1, 2, \ldots$ независимы и распределены по устойчивому симметричному закону с характеристическими функциями

$$f(t; \alpha, c_{kl}) = \mathbf{M} \exp(it\xi_{kl}) = \exp(-c_{kl} |t|^{\alpha_k}),$$

$$c_{kl} \geqslant 0, \ \delta < \alpha_k \leqslant 2, \ \delta > 0$$

и $\operatorname{per} D_n > 0$, то с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} (\ln |\det A_n| - \mathbf{M} \ln |\det A_n|) = 0, \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} (\ln |\operatorname{per} A_n| - \mathbf{M} \ln |\operatorname{per} A_n|) = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим

$$\mathbf{M}_{(k)} \ln |\det A_n| = \gamma_n, \ k = \overline{1, n}; \ \gamma_0 = \ln |\det A_n|,$$

где индекс (k) означает, что математическое ожидание берется только по первым k вектор-строчкам матрицы при фиксированных остальных.

Тогда

$$\frac{1}{n} (\ln |\det A_n| - \mathbf{M} \ln |\det A_n|) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\gamma_{k-1} - \gamma_k).$$

Легко видеть, используя условные математические ожидания, что

$$\mathbf{M} (\gamma_{k-1} - \gamma_k)(\gamma_{l-1} - \gamma_l) = 0, \ k \neq l.$$

Поэтому

$$P\left\{\left|\frac{\gamma_0-\gamma_n}{n}\right|\geqslant\frac{1}{r}\right\}\leqslant\left(\frac{r}{n}\right)^4\sum_{k,l=1}^{n}\sqrt{\mathbf{M}(\gamma_{k-1}-\gamma_k)^4\,\mathbf{M}(\gamma_{l-1}-\gamma_l)^4},\ r>0,$$

Так как

$$\mathbf{M}_{(k-1)}\ln\beta_k=\mathbf{M}_{(k)}\ln\beta_k,$$

где

$$\beta_k^{-\alpha_k}=\sum_{l=1}^{n}c_{kl}\,|A_{kl}|^{\alpha_k}\ \text{и}\ \operatorname{per}D_n>0,$$

то

$$\mathbf{M}(\gamma_{k-1}-\gamma_k)^4=\mathbf{M}\,[\mathbf{M}_{(k-1)}\ln|\beta_k\det A_n|-\mathbf{M}_{(k)}\ln|\beta_k\det A_n|]^4.$$

Из [2] следует, что случайная величина $\eta(\alpha_k)=\beta_k\det A_n$ распределена по устойчивому закону с характеристической функцией $f(t;\alpha_k,1)$ и

$$\mathbf{M}\ln^4|\eta(\alpha_k)|\leqslant d(\delta)<\infty.$$

Поэтому

$$\mathbf{M}(\gamma_{k-1}-\gamma_k)^4\leqslant 16\mathbf{M}\ln^4|\eta(\alpha_k)|.$$

Отсюда следует, что

$$P\left\{\left|\frac{\gamma_0-\gamma_n}{n}\right|\geqslant\frac{1}{r}\right\}\leqslant r^4n^{-2}16d(\delta).$$

И так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{\left|\frac{\gamma_0-\gamma_n}{n}\right|\geqslant\frac{1}{r}\right\}$ сходится для любого целого положительного r, то отсюда следует (1) [3]. Выражение (2) доказываем аналогично, положив

$$\gamma_k=\mathbf{M}_{(k)}\ln|\operatorname{per}A_n|,\ \ \beta_k^{-\alpha_k}=\sum_{l=1}^{n}c_{kl}\,|A^{kl}|^{\alpha_k}.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если положительные случайные величины ξ_{kl}, $k,l=1,2,\ldots$ независимы и распределены по устойчивому закону с преобразованиями Лапласа

$$\mathbf{M}\exp(-t\xi_{kl})=\exp(-c_{kl}\,|t|^{\alpha_k}),$$

$$c_{kl}\geqslant 0,\ \ \delta<\alpha_k<1,\ \ \delta>0,\ \ t>0$$

и $\operatorname{per}D_n>0$, то с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln|\operatorname{per}A_n|-\mathbf{M}\ln|\operatorname{per}A_n|)=0.$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 3. Если для любого $n = 1, 2, \ldots$ случайные вектор

$$\vec{\xi}_k = (\xi_{k1}, \xi_{k2}, \ldots, \xi_{kn}), \quad k = \overline{1, n}$$

независимы и распределены нормально с нулевыми векторами средних и невырожденными корреляционными матрицами, то с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} (\ln|\det A_n| - \mathbf{M} \ln|\det A_n|) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} (\ln|\operatorname{per} A_n| - \mathbf{M} \ln|\operatorname{per} A_n|) = 0.$$

Доказательство. Покажем, что случайная величина

$$\eta = \beta_k^{-1} \sum_{l=1}^{n} \xi_{kl} A_{kl}$$

распределена нормально, где

$$\beta_k = \sqrt{\sum_{l,p=1}^{n} r_{klp} A_{kl} A_{kp}}, \quad r_{klp} = \mathbf{M}\xi_{kl}\xi_{kp}.$$

Действительно, используя условные математические ожидания, получим

$$\mathbf{M} \exp(it\eta) = \mathbf{M} [\mathbf{M} \exp\{it\eta\}/\xi_{lp};\ p = \overline{1,n};\ l = \overline{1, k-1, k+1, n}] =$$

$$= \mathbf{M} \exp\left\{-\frac{1}{2} t^2 \beta^{-2} \sum_{l,p=1}^{n} r_{klp} A_{kl} A_{kp}\right\} = \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}.$$

Дальше доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Если для любого $n = 1, 2, \ldots$ случайные векторы

$$\vec{\xi}_k = (\xi_{k1}, \xi_{k2}, \ldots, \xi_{kn}), \quad k = \overline{1, n}$$

независимы, случайные величины ξ_{kl}; $k, l = 1, 2, \ldots$ положительны, существуют $\mathbf{M}\xi_{kl} = a_{kl}$ и

$$\mathbf{M} (\ln \xi_{kl} - \ln a_{kl})^2 \leqslant C_k, \quad \lim_{n\to\infty} n^{-2} \sum_{k=1}^{n} C_k = 0,$$

то для всяко о $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \ln \operatorname{per} A_n - \frac{1}{n} \mathbf{M} \ln \operatorname{per} A_n\right| \leqslant \varepsilon\right\} = 1.$$

Доказательство. Обозначим

$$\mathbf{M}_{(k)} \ln \operatorname{per} A_n = \gamma_k, \ k = \overline{1, n}; \ \gamma_0 = \ln \operatorname{per} A_n .$$

Очевидно, что

$$\ln^2 (\beta_k^{-1} \operatorname{per} A_n) \leqslant \left(\beta_k^{-1} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} A^{kl} \ln \frac{\xi_{kl}}{a_{kl}}\right)^2 + 2\beta_k^{-1} \sum_{l=1}^{n} \xi_{kl} A^{kl},$$

$$\beta_k = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} A^{kl} .$$

Отсюда получаем

$$\mathbf{M} (\gamma_{k-1} - \gamma_k)^2 \leqslant 4C_k + 4.$$

Теорема 4 доказана.

Заметим, что вычисление $\mathbf{M} \ln |\det A_n|$ и $\mathbf{M} \ln |\operatorname{per} A_n|$ представляет собой трудную задачу, поэтому могут быть полезны некоторые оценки. Из [2] следует, что если ξ_{kl}, $k, l = \overline{1,n}$ независимы и распределены по устойчивому закону с характеристическими функциями $f(t; c_{kl}, \alpha_k)$, $c_{kl} \geqslant 0$, $0 < \alpha_k \leqslant 2$ и $\operatorname{per} B_n > 0$, то $\mathbf{M} \ln |\det A_n|$ и $\mathbf{M} \ln |\operatorname{per} A_n|$ существуют и при $\alpha_k = \alpha$, $k = \overline{1, n}$

$$n\mathbf{M} \ln |\eta| + \frac{1}{\alpha} \ln \operatorname{per} D_n \leqslant \mathbf{M} \ln |\det A_n| \leqslant \frac{1}{\sigma} \ln \operatorname{per} B_n + \frac{n}{\sigma} \ln \mathbf{M} |\eta|^\delta,$$

а при $\alpha_k = 2$, $k = \overline{1, n}$

$$-Cn \leqslant \mathbf{M} \ln \frac{\det A_n^2}{\operatorname{per} D_n} \leqslant n \ln 2.$$

Здесь $B_n = (c_{kl}^{\frac{\sigma}{\alpha}})$ — квадратная матрица n-го порядка, η — случайная величина с характеристической функцией $f(t; \alpha, 1)$; $0 < \sigma < \alpha$, C — константа Эйлера. Аналогичные оценки справедливы и для $\operatorname{per} A_n$.

Если же случайные величины ξ_{kl}, $k, l = \overline{1, n}$ независимы, положительны и распределены по устойчивому закону с преобразованиями Лапласа $f(t; \alpha, c_{kl})$, $0 < \alpha < 1$, $t > 0$, $c_{kl} \geqslant 0$; $\operatorname{per} B_n > 0$, то

$$n\mathbf{M} \ln \eta + \frac{1}{\alpha} \ln \operatorname{per} D_n \leqslant \mathbf{M} \ln \operatorname{per} A_n \leqslant \frac{1}{\sigma} \ln \operatorname{per} B_n + \frac{n}{\sigma} \ln \mathbf{M}\eta^\delta,$$

где $\eta \geqslant 0$ — случайная величина с преобразованием Лапласа $f(t; \alpha, 1)$, $0 < \sigma < \alpha$.

Если ξ_{kl}, $k, l = \overline{1, n}$ положительны, случайные векторы $\vec{\xi}_k = (\xi_{k1}, \xi_{k2}, \ldots, \xi_{kn})$, $k = \overline{1, n}$ независимы, существуют $\mathbf{M}\xi_{kl}$, $\mathbf{M} \ln \xi_{kl}$, то

$$\frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n} \mathbf{M}\ln \xi_{kl} \leqslant \mathbf{M}\ln\frac{\operatorname{per} A_n}{n!} \leqslant \ln\frac{\operatorname{per} \mathbf{M}A_n}{n!}.$$

Правая часть неравенства очевидна, а левая следует из неравенства

$$\frac{\operatorname{per} A_n}{n!} \geqslant \sqrt[n]{\prod_{k,l=1}^{n} \xi_{kl}}.$$

Выражаю глубокую благодарность М. И. Ядренко за ценные советы и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1 Гирко В. Л. Предельные теоремы для перманента случайной матрицы. — Теория вероятностей и математическая статистика, вып. 3, 1971.
2 Гирко В. Л. О неравенствах для случайних детерминанта и перманента. — Теория вероятностей и математическая статистика, вып. 4, 1971.
3. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., «Наука», 1965

V. L. Girko

THE DEFINING OF SOME THEOREMS FOR RANDOM DETERMINANT AND PERMANENT

Summary

Some limit theorems like the law of large numbers for random determinant and permanent are obtained.

Поступила в редколлегию 31.VIII 1970.