Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 71, 2004, стор. 15–21

Teor. Imovir. ta Matem. Statyst.
No. 71, 2004, pp. 15–21

ОЦІНКА ЙМОВІРНОСТІ ВТРАТИ У СИСТЕМІ ОБСЛУГОВУВАННЯ ТИПУ $MAP/G/m/0$ ЗА УМОВИ МАЛОГО НАВАНТАЖЕННЯ

УДК 519.21

Д. БАУМ ТА І. М. КОВАЛЕНКО

Анотація. *Розглянуто систему обслуговування з відмовами при загальному розподілі часу обслуговування та вхідному потоці типу MAP з фазовим процесом, що приймає значення з довільного вимірного простору. Вивчено поведінку ймовірності відмови за умови, що середній час обслуговування прямує до нуля та виконується деяка додаткова умова. Зокрема віднайдено умови, за яких справджується асимптотична нечутливість імовірності відмови до форми розподілу часу обслуговування.*

1. Вступні зауваження

За останні 15–20 років набули широкого розвитку алгебраїчні методи теорії систем обслуговування. З одного боку, застосування цих методів відповідає потребам аналізу реальних систем — головним чином комп'ютерних та телекомунікаційних мереж, — з іншого боку, воно стало можливим завдяки розширенню можливостей обчислювальної техніки. Значно розширився клас моделей потоків випадкових подій, уживаних у теоретичних дослідженнях та інженерних розрахунках; див. [1]–[4]. Найбільш уживаною є модель MAP (марковського вхідного потоку), в якій події потоку (вимоги) відбуваються залежно від стану певного марковського "фазового" процесу або при зміні станів цього процесу. Слушно зауважити, що, з формальної точки зору, згадані, та й багато інших моделей, значно перевершуються моделлю процесів, однорідних за другою компонентою [5].

Для багатьох задач системного аналізу має значення модель обслуговування в умовах малого навантаження. Якщо зосередитись на системах зі втратами, то являє інтерес аналіз імовірності втрати вимоги в умовах малого навантаження; див. [6] та [7].

Особливий інтерес являє питання про нечутливість імовірності втрати вимоги до форми розподілу часу обслуговування, якщо відоме середнє значення цього часу. Аналізові цього питання стосовно широкого класу систем та мереж обслуговування присвячено роботи [8]–[12]. До речі, у статті [8] встановлено, що нечутливість (альтернативний термін — інваріантність) у моделі $MAP/G/m/0$ виповнюється лише у випадку, коли вхідний потік є потоком Пуассона.

У деяких роботах останніх років було помічено, що системи, для яких нечутливість не виповнюється, набувають такої властивості в умовах малого навантаження (light traffic); див. роботу [6] та цитовану в ній літературу. Саме цій властивості у випадку системи типу $MAP/G/m/0$ і присвячено нашу роботу.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60K25.

Роботу над статтею другого автора частково підтримав фонд DLR (проект ADLON, Університет м. Трір, Німеччина).

2. Система обслуговування та її основні характеристики

2.1. Фазовий процес. Нехай E — повний метричний простір. $\Im$ — σ-алгебра його підмножин, $P(u,\cdot)$ — марковська перехідна функція, що являє собою ймовірносну міру при будь-якому $u \in E$ та борелівську функцію змінної u.

Розглянемо процес фазових переходів $(U_n, n \geq 0)$ як ланцюг Маркова, для якого $P(u,\cdot)$ є марковською перехідною функцією. Позначимо через $\pi_0 = \pi_0(\cdot)$ (початковий) розподіл U_0: $\pi_n = \pi_n(\cdot)$ — розподіл U_n, тобто,

$$\pi_n = \int_E \pi_0(du) P_n(u,\cdot),$$

де $P_n(u,\cdot)$ — n-крокова перехідна функція; $P_1(u,\cdot) = P(u,\cdot)$;

$$P_{n+1}(u,\cdot) = \int P(u,dv) P_n(v,\cdot), \qquad n \geq 1.$$

Припущення 1. Послідовність (U_n) стаціонарна. Це означає, що $\pi_n = \pi$, $n \geq 0$, де π — розподіл на $(E, \Im)$.

2.2. Часи перебування у станах. Задамо фазовий процес $U(t)$, $t \geq 0$, як півмарковський процес з моментами переходів $0 = T_0, T_1, T_2, \ldots$ та зміною станів, що їх визначає (U_n). Таким чином, для довільного $n \geq 0$ маємо

$$U(t) = U_n \quad \text{при } T_n \leq t < T_{n+1};$$

отже $U(t)$ неперервна зправа з імовірністю 1. Часи перебування у станах $T_{n+1} - T_n$ визначаються рекурентно; якщо $U_n = u$, то, незалежно від попередньої історії, $T_{n+1} - T_n$ — експоненціально розподілена випадкова величина з параметром $\lambda(u)$, де $\lambda(u)$ — борелівська функція від $u \in E$. Переходи (U_n) незалежні від часів перебування у станах; таким чином

$$\mathsf{P}\{U_{n+1} \in \cdot \mid \text{попередня історія}; U_n = u\} = P(u,\cdot).$$

2.3. Вхідний потік. Припустимо, що

$$P(u,\cdot) = F(u,\cdot) + G(u,\cdot),$$

де F та G — невід'ємні міри на $(E, \Im)$ при довільному u та являють собою борелівські функції $u \in E$. Вважатимемо, що переходи типу F асоціюються з надходженням вимог, тоді як при переходах типу G вимоги не надходять. У строгому формулюванні вхідний потік вимог визначається наступними умовами.

1. Жодна вимога не надходить поза послідовністю $(T_n, n \geq 1)$ моментів часу.
2. У будь-який момент T_n надходить не більше однієї вимоги.
3. Нехай I_n — індикатор події {надходження вимоги в момент T_n}. Тоді

$$\mathsf{P}\{I_n = I; U_n \in \cdot \mid U_{n-1} = u; \text{попередня історія}\} = F(u,\cdot);$$
$$\mathsf{P}\{I_n = 0; U_n \in \cdot \mid U_{n-1} = u; \text{попередня історія}\} = G(u,\cdot).$$

Якщо послідовності (U_n) і (T_n) відомі, то вхідний потік визначається послідовністю незалежних випробувань (I_n).

Припущення 2. Існують такі позитивні константи $\underline{\lambda}$ та $\overline{\lambda}$, що

$$\underline{\lambda} \leq \lambda(u) \leq \overline{\lambda}, \qquad u \in E.$$

2.4. Система обслуговування типу $MAP/G/m/0$. Згідно з класифікацією Кендала, в цьому коді "0" означає відсутність можливості очікування вимог; m — число каналів, GI означає, що часи обслуговування — незалежні випадкові величини Y_n з функцією розподілу $B_\tau(x) = 1 - B_\tau^c(x)$ та скінченним середнім $\tau > 0$.

Ми розглядаємо цю систему обслуговування при малому навантаженні (light traffic) у трикутній схемі, зосереджуючись на поведінці ймовірності відмови при $\tau \to 0$.

Вхідний потік вважатимемо незалежним від τ. Вираз "трикутна схема", запозичений з теорії граничних розподілів сум незалежних випадкових величин, у даному контексті означає, що розподіл $B_\tau(x)$ може досить складно залежати від τ; точні умови наведено у п. 4.

Нарешті, перше "G" у коді системи у нашій статті означає потік, що задовольняє вказаним вище умовам.

3. Ймовірність відмови

Позначимо через $J_{n\tau}$ індикатор події

$$\{\text{у момент } T_n \text{ надійшла вимога; ця вимога втрачена}\}.$$

Далі покладемо

$$N_n = I_1 + \cdots + I_n,$$
$$L_{n\tau} = J_{1\tau} + \cdots + J_{n\tau}$$

та

$$Q_{n\tau} = \frac{\mathsf{E}\{L_{n\tau}\}}{\mathsf{E}\{N_n\}}. \tag{1}$$

Зосередимось на поведінці $Q_{n\tau}$ при великих n та малих значеннях τ. Зауважимо, що, завдяки стаціонарності (U_n),

$$\mathsf{E}\{I_n\} = \int_E \pi(du)F(u,E).$$

Відкинемо тривіальний випадок, коли це число є нулем; таким чином,

$$\mathsf{E}\{N_n\} = n\int_E \pi(du)F(u,E) \tag{2}$$

зростає лінійно в залежності від n.

Тепер розглянемо $J_{n\tau}$. Для того, щоб у момент T_n відбулася відмова, мусить принаймні наступити ланцюжок з $m+1$ таких подій:

> у деякі m попередніх моментів переходу, скажімо $T_{n_1},\ldots,T_{n_m}$, та в момент T_n надходять деякі вимоги; інтервали обслуговування перших m вимог із цього числа покривають момент T_n.

Розглянемо послідовності натуральних чисел

$$\bar{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_{m+1}),$$

де

$$1 = s_1 < s_2 < \cdots < s_{m+1} = l+1.$$

Назвемо такі послідовності $(l, m+1)$-*ланцюжками*. Відмова в момент T_n через $(l,m+1)$-*ланцюжок* $\bar{s}$ означає, що деякі вимоги надійшли в моменти $T_{n_1},\ldots,T_{n_m},T_n$, де $n_1 = n-l$, $n_2 = n-l+s_2-1$, …, $n_m = n-l+s_m-1$ і крім того $Y_{n_i} > T_n - T_{n_i}$, $1 \le i \le m$. Позначимо через r мінімальне значення l, для якого ймовірність деякого $(l, m+1)$-ланцюжка позитивна.

Пояснимо це означення по-іншому. Нехай у деякий момент T_n до системи надійшла вимога. Тоді наступні m вимог можуть надійти не раніше моменту T_{n+r}, тобто принаймні через r переходів фазового процесу. Далі позначимо через Γ_0 множину $(r, m+1)$-ланцюжків. Відзначимо такі властивості ланцюжків даної множини:

1. Відмови n-й вимозі через різні $(r, m+1)$-ланцюжки — несумісні події.
2. У проміжках між моментами $T_{n_1},\ldots,T_{n_m},T_n$ до системи не надходить жодна вимога.

Далі визначимо *вагу* $(r, m+1)$-ланцюжка $\bar{s}$ формулою

$$w(\bar{s}) = \frac{1}{(s_2 - s_1 - 1)! \dots (s_{m+1} - s_m - 1)!} \underbrace{\int \dots \int}_{E^{r+1}} \int \dots \int \lambda(u_1) \dots \lambda(u_r)\, \pi(du_0) \times \left(\prod_{j=1}^{m+1} F\left(u_{s_j - 1}, du_{s_j}\right) \right) \left(\prod_{i \notin \{s_1, \dots, s_{m+1}\}, 2 \le i \le r} G(u_{i-1}, du_i) \right). \tag{3}$$

Внаслідок припущення 2 маємо

$$w(\bar{s}) \ge c(\bar{s}) \underline{\lambda}^r, \qquad \bar{s} \in \Gamma_0, \tag{4}$$

для деяких сталих $c(\bar{s}) > 0$.

Сумісна щільність імовірності приростів $T_{n_2} - T_{n_1}, \dots, T_n - T_{n_m}$, з урахуванням ваги ланцюжка $\bar{s}$, мажорується виразом

$$w(\bar{s}) t_1^{s_2 - s_1 - 1} (t_2 - t_1)^{s_3 - s_2 - 1} \dots (t_m - t_{m-1})^{s_{m+1} - s_m - 1}.$$

Таким чином, ймовірність відмови у момент T_n через $(r, m+1)$-ланцюжок $\bar{s}$ обмежена виразом

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\{J_{n\tau}; \bar{s}\} &\le w(\bar{s}) \underbrace{\int \dots \int}_{0 < t_1 < \dots < t_m} \int \dots \int t_1^{s_2 - s_1 - 1} (t_2 - t_1)^{s_3 - s_2 - 1} \dots (t_m - t_{m-1})^{s_{m+1} - s_m - 1} \\ &\qquad \times B_\tau^c(t_m) B_\tau^c(t_m - t_1) B_\tau^c(t_m - t_2) \dots B_\tau^c(t_m - t_{m-1})\, dt_1 \dots dt_m \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \bar{J}_{0\tau}(\bar{s}). \end{aligned} \tag{5}$$

Розгляньмо моменти

$$\alpha_{k\tau} = \int_0^\infty x^k \, dB_\tau(x).$$

Теорема 1. *Якщо*

$$\alpha_{r-m+2} = O\left(\tau^{r-m+2}\right), \tag{6}$$

то

$$\mathsf{E}\{L_n\} \sim n \sum_{s \in \Gamma_0} \bar{J}_{0\tau}(\bar{s}) \tag{7}$$

при $n \to \infty$, $\tau \to 0$. (Доданки цієї суми означено формулою (5).)

Доведення. Нехай Γ_1 — множина всіх $(l, m+1)$-ланцюжків з $l > r$. Тоді $\mathsf{E}\{J_{n\tau}; \Gamma_1\}$ не перевищує ймовірності, що деякі вимоги надійдуть у моменти $T_{n_1}, \dots, T_{n_m}$ та T_n, де $n_1 < \dots < n_m < n$, $n - n_1 > r$ і, крім того, $Y_{n_i} > T_n - T_{n_i}$, $1 \le i \le m$, де Y_{n_i} — відповідні часи обслуговування. Ця ймовірність мажорується виразом

$$\mathsf{P}\{Z_1 + \dots + Z_m > r; Z_i > 0, 1 \le i \le m\},$$

де Z_i — незалежні випадкові величини з розподілом

$$\mathsf{P}\{Z_1 = k\} = \int_0^\infty e^{-\bar{\lambda} x} \frac{(\bar{\lambda} x)^k}{k!} \, dB_\tau(x).$$

Маємо таку оцінку

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}\{Z_1 + \dots + Z_m > r; Z_i > 0, 1 \le i \le m\} \\ &\quad \le m\, \mathsf{P}\{Z_1 > z - m + 1; Z_2 > 0, \dots, Z_m > 0\} \\ &\qquad + \sum_{\substack{1 \le i_1, \dots, i_m \le r - m + 1, \\ i_1 + \dots + i_m > r}} \mathsf{P}\{Z_1 = i_1, \dots, Z_m = i_m\} \end{aligned} \tag{8}$$

$$< m\tau^{m-1}\frac{\alpha_{r-m+2}}{(r-m+2)!} + \sum_{\substack{1\le i_1,\dots,i_m\le r-m+1,\\ i_1+\dots+i_m>r}} \frac{\alpha_{i_1}}{i_1!}\dots\frac{\alpha_{i_m}}{i_m!}$$
$$= O\left(\alpha_{r-m+2}^{(r+1)/(r-m+2)}\right).$$

Отже,

$$\mathsf{E}\{J_{n\tau};\Gamma_1\} = O\left(\alpha_{r-m+2}^{(r+1)/(r-m+2)}\right). \qquad (9)$$

Покажемо, що ця величина є малою відносно $\sum_{\bar{s}\in\Gamma_0}\bar{J}_m(\bar{s})$. Для цього встановимо нижню оцінку $\bar{J}_m(\bar{s})$. Для будь-якого $a>\tau/3$

$$\tau = \left(\int_0^{\tau/3}+\int_{\tau/3}^{a}+\int_a^\infty\right)B_\tau^c(x)\,dx \le \frac{\tau}{3}+\left(a-\frac{\tau}{3}\right)B_\tau^c\left(\frac{\tau}{3}\right)+\frac{\alpha_{r-m+2}}{(r-m+2)a^{r-m+1}}.$$

Прирівнявши третій доданок до $\tau/3$, дістанемо нерівність

$$B^c\left(\frac{\tau}{3}\right) \ge \left(3\left(\frac{3}{(r-m+1)}\frac{\alpha_{r-m+2}}{\tau^{r-m+2}}\right)^{1/r-m+1}-1\right)^{-1} \ge c_0>0. \qquad (10)$$

Підставивши її в (5), дістанемо нижню оцінку

$$\bar{J}_{0\tau}(\bar{s}) \ge w(\bar{s})c_0^m$$
$$\times \underset{0<t_1<\dots<t_m<\tau/3}{\int\dots\int\quad\int\dots\int} t_1^{s_2-s_1-1}\dots(t_m-t_{m-1})^{s_m-s_{m-1}-1}\,dt_1\dots dt_m \qquad (11)$$
$$\ge c_1\tau^r,$$

де $c_1>0$. Порівнявши її з (9), отримаємо, що за умови (6)

$$\mathsf{E}\{J_{n\tau};\Gamma_1\} = o\left(\sum_{\bar{s}\in\Gamma_0}\bar{J}_{0\tau}(\bar{s})\right) \qquad (12)$$

при $\tau\to 0$.

Для отримання нижньої оцінки $\mathsf{E}\{J_\tau\}$ зауважимо, що

$$\mathsf{E}\{J_\tau\} \ge \sum_{\bar{s}\in\Gamma_0}\underline{J}_{0\tau}(\bar{s}), \qquad (13)$$

де $\underline{J}_{0\tau}(\bar{s})$ визначається тим самим інтегралом, що й $\bar{J}_{0\tau}(\bar{s})$ (див. (5)) з множником $e^{-\bar{\lambda}t_m}$ під знаком інтеграла та множником $(1-\bar{\lambda}\tau)$ перед інтегралом. Легко довести, що

$$\sum_{\bar{s}\in\Gamma_0}\bar{J}_{0\tau}(\bar{s}) - \sum_{\bar{s}\in\Gamma_0}\underline{J}_{0\tau}(\bar{s}) = O\left(\alpha_{r-m+2}^{(r+1)/(r-m+2)}\right) = O\left(\tau^{r+1}\right) \quad \text{при } \tau\to 0. \qquad (14)$$

З (12), (13) та (14) дістаємо (7). □

4. Нечутливість при малому навантаженні

Нечутливість при малому навантаженні в даному випадку має такий сенс. Нехай $B_\tau^1(x)$ та $B_\tau^2(x)$ — будь-які дві параметричні множини функцій розподілу часу обслуговування, що задовольняють умовам

$$\int_0^\infty B_\tau^{1c}(x)\,dx = \int_0^\infty B_\tau^{2c}(x)\,dx = \tau$$

та

$$\int_0^\infty x^{r-m+2}\,dB_\tau^i(x) = O\left(\tau^{r-m+2}\right), \qquad i=1,2,$$

при $\tau \to 0$, де r означено у п. 3. Тоді

$$\frac{Q^1_{n\tau}}{Q^2_{n\tau}} \to 1 \quad \text{при } n \to \infty,\ \tau \to 0, \tag{15}$$

де $Q^i_{n\tau}$ — значення $Q_{n\tau}$ (див. (1)), що відповідає $B_\tau = B^i_\tau$, $i = 1, 2$.

Теорема 2. *За умов теореми 1 величина $Q_{n\tau}$ нечутлива при малому навантаженні (light traffic insensitive) до форми $B_\tau(x)$ тоді і тільки тоді, коли $r = m$.*

Доведення. 1. *Достатність.* Якщо $r = m$, то існує єдиний $(r, m+1)$-ланцюжок

$$\bar{s} = (1, 2, \ldots, m+1).$$

З (5) дістаємо

$$w^{-1}(\bar{s})\bar{J}_{0r}(\bar{s}) = \underset{0<t_1<\cdots<t_m}{\int\cdots\int} \int\cdots\int B^c_\tau(t_m)B^c_\tau(t_m - t_1)\ldots B^c_\tau(t_m - t_{m-1})\,dt_1\ldots dt_m$$
$$= \frac{1}{m!}\left(\int_0^\infty B^c_\tau(x)\,dx\right)^m = \frac{\tau^m}{m!}.$$

Отже, нечутливість при малому навантаженні справджується.

2. *Необхідність.* Припустимо, що $r > m$. Покладемо

$$B^c_\tau(x) = \theta e^{-\theta x/\tau},$$

де $\theta \in (0, 1]$ — параметр. Тоді для будь-якого ланцюжка $\bar{s} \in \Gamma_0$ маємо

$$w^{-1}(\bar{s})\bar{J}_{0r}(\bar{s}) = \theta^m \underset{0<t_1<\cdots<t_m}{\int\cdots\int} \int\cdots\int t_1^{s_2-s_1-1}\ldots t_m^{r-s_m-1}e^{-\theta R(t_1,\ldots,t_m)/\tau}\,dt_1\ldots dt_m,$$

де $R(t_1, \ldots, t_m)$ — лінійна функція. За допомогою заміни змінних $t_i = \tau y_i/\theta$ цей інтеграл зводиться до виразу

$$\frac{\tau^r}{\theta^{r-m}}\cdot\text{const}.$$

Таким чином, у даному випадку нечутливість при малому навантаженні виключена. □

5. Доповнення

5.1. Нестаціонарний фазовий процес. У цьому пункті приймемо всі вказані вище припущення, крім стаціонарності послідовності (U_n). Натомість припустимо, що існує стаціонарний розподіл π цієї послідовності, до якого розподіл $\pi_n = (\mathsf{P}\{U_n \in \cdot\})$ збігається при $n \to \infty$. Ми розглядаємо два типи збіжності:

(A) $\|\pi_n - \pi\| \to 0$ при $n \to \infty$, тобто повна варіація цієї різниці прямує до нуля;

(B) $\pi_n \xrightarrow{w} \pi$ при $n \to \infty$, де $\xrightarrow{w}$ означає слабку збіжність, і, крім того, функції $F(u, \cdot)$, $G(u, \cdot)$ та $\lambda(u)$ неперервні по u.

В обох випадках (A) та (B) виконується таке співвідношення: для цілого числа $n(\tau)$, що залежить від середнього часу обслуговування τ,

$$Q_{n\tau} \sim \frac{\sum_{\bar{s}\in\Gamma_0}\bar{J}_{0r}(\bar{s})}{\int_E \pi(du)F(u, E)} \quad \text{при } \tau \to 0,\ n > n(\tau). \tag{16}$$

Рівномірну збіжність типу

$$\frac{Q_{n\tau}}{\text{права частина (16)}} \to 1$$

при $n \to \infty$, $\tau \to 0$ в розглядуваному нестаціонарному випадку гарантувати не можна.

5.2. **Частотний підхід.** Замість відношення (1), пов'язаного з числом n переходів фазового процесу, можна виходити з іншого визначення ймовірності відмови, а саме

$$Q_\tau(t) = \frac{\mathsf{E}\{L_\tau(t)\}}{\mathsf{E}\{N(t)\}}, \tag{17}$$

де $N(t)$ — число вимог в інтервалі часу $(0,t)$, $L_\tau(t)$ — число відмов у цьому ж інтервалі. Формулювання відповідних результатів цілком подібне до тих, що пов'язані з $Q_{n\tau}$; у будь-якому випадку для довільного $\tau > 0$ маємо

$$\frac{Q_\tau(t)}{Q_{n\tau}} \to 1 \quad \text{при } t \to \infty,\ n \to \infty.$$

Подяка. Автори вдячні рецензентові за зауваження, що сприяли покращенню стилю статті.

Література

1. M. Kramer, *Computational method for Markov chains occuring in queueing theory*, Messung, Modelierung und Bewertung von Rechnensystemen (V. Herzog and M. Paterok, ред.), Informatik-Fachberichte 154, Berlin, 1987, стор. 164–175.
2. D. M. Lucantoni, *An Algorithmic Analysis of a Communication Model with Retransmission of Flawed Messages*, London, Pitman, 1983.
3. M. F. Neuts, *The fundamental period of the queue with Markov-modulated arrivals*, Probability, Statistics, and Mathematics (J. W. Anderson, K. B. Athreya, and D. L. Iglehart, ред.), In Honor of Professor Samuel Karlin, Academic Press, New York, 1989, стор. 187–200.
4. M. F. Neuts, *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach*, John Hopkins, Baltimore, 1981.
5. И. И. Ежов, А. В. Скороход, *Марковские процессы, однородные по второй компоненте. I*, Теория вероятностей и ее применения **XIV** (1969), № 1, 3–14; *II*, № 4, 679–692.
6. I. N. Kovalenko, J. B. Atkinson, and K. V. Mykhalevych, *Three cases of light-traffic insensitivity of the loss probability in a $GI/G/m/0$ loss system to the shape of the service time distribution*, Queueing Systems **45** (2003), 245–271.
7. T. Erhardsson, *On the number of lost customers in stationary loss systems in the light traffic case*, KTH, INTERNET, Stockholm (2002), 1–19.
8. V. Klimenok, C. S. Kim, D. Orlovsky, and A. Dudin, *Lack of invariant property of Erlang loss model in case of the MAP input*, QUESTA (подано до друку).
9. Ю. В. Малинковский, *Инвариантность стационарного распределени состояний модифицированных сетей Джексона и Гордона–Ньюэлла*, Автоматика и телемеханика (1998), № 9, 29–36.
10. Ю. В. Малинковский, О. В. Якубович, *Инвариантность в замкнутых сетях с обходами*, Математические методы исследований телекоммуникационных сетей, Материалы 13-й Белорусской зимней школы-семинара по ТМО (Межд. научн. конф. BWWQT-97), Минск, 3–5 февр. 1997 г., БГУ, Минск, 1997, стор. 118–119.
11. Ю. В. Малинковский, О. В. Якубович, *Инвариантность марковских сетей массового обслуживания с обходами узлов заявками и немедленным обслуживанием*, Математические методы исследования систем и сетей массового обслуживания, Материалы 14-й Белорусской зимней школы-семинара по ТМО (Межд. конф. BWWQT-98), Минск, 27–29 янв. 1998 г., БГУ, Минск, 1998, стор. 121–122.
12. А. В. Крыленко, *Инвариантность сетей массового обслуживания с несколькими типами узлов и заявок, немедленным обслуживанием и обходами узлов заявками*, Математические методы исследования систем и сетей массового обслуживания, Материалы 14-й Белорусской зимней школы-семинара по ТМО (Межд. научн. конф. BWWQT-98), Минск, 27–29 янв. 1998 г., БГУ, Минск, 1998, стор. 112–115.

LG Stochastische Modellierung und Rechnernetze, FB4-Abteilung Informatik, Universität Trier, D-54286 Trier, Deutschland

Адреса електронної пошти: baum@info04.uni-trier.de

Україна, Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова, 40

Адреса електронної пошти: kovigo@yandex.ru

Надійшла 29/03/2004