Теорія Ймовір. та Матем. Статист.
Вип. 71, 2004, стор. 49–56

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 71, 2004, pp. 49–56

ВИКОРИСТАННЯ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ СТРУКТУРИ ЛАНЦЮГА МАРКОВА ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ЗСУВУ СИСТЕМ ОБСЛУГОВУВАННЯ

УДК 519.21

О. А. ВОЙНА ТА Е. ЧАПЛЯ

Анотація. В роботі розглядається задача оцінювання параметрів зсуву системи обслуговування $M/M/1/0$ за деформованими спостереженнями часових інтервалів між змінами її станів. При цьому інформація про те, в якому стані знаходиться система, відсутня. Досліджені також асимптотичні властивості запропонованих оцінок.

Розглянемо систему обслуговування $M/M/1/0$, що складається з одного обслуговуючого приладу з інтенсивністю обслуговування ν, на вхід якого надходить найпростіший потік вимог з інтенсивністю λ. Нехай $s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots$ — послідовні моменти, коли вимоги надходять до системи або покидають її, причому інформація про те, є s_k, $k = 0, 1, \ldots$, моментом надходження вимоги до системи, чи моментом, коли обслужена вимога залишає систему, чи може моментом втрати вимоги внаслідок переповнення системи, відсутня. Позначимо через $\mu(t)$, $t \geq 0$, випадковий процес, що описує кількість вимог в системі в момент часу t. Введемо випадковий процес $x(k)$, $k = 0, 1, \ldots$, наступним чином

$$x(k) = \mu(s_k), \qquad k = 0, 1, \ldots. \tag{1}$$

Припустимо, що система спостерігається на проміжку часу $[0, T]$, причому вектор спостережень

$$\bar{\xi}_T = \left\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{K(T)}, \xi'_{K(T)}\right\}$$

являє собою часовий ряд спостережень інтервалів

$$\tau_k = s_k - s_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \qquad s_0 = 0,$$

з деяким запізненням. Запізнення θ_μ залежить від стану μ, в якому система перебуває в момент часу s_k. Іншими словами, якщо

$$K(T) = \max\{k, s_k \leq T\},$$

то

$$\xi_k = \tau_k + \theta_{x(k-1)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, K(T), \qquad \xi'_{K(T)} = T - s_{K(T)} + \theta_{x(K(T))}.$$

Підкреслимо при цьому, що стани системи $\mu(t)$ не можна спостерігати, а отже значення вектору $\{x(0), x(1), \ldots, x(K(T))\}$ невідомі. Необхідно, припускаючи, що параметри (λ, ν) системи обслуговування відомі, оцінити за частковими деформованими спостереженнями $\bar{\xi}_T$ невідомі значення $\theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ вектору параметрів зсуву. Варто підкреслити, що відсутність повної статистичної інформації про досліджувану систему робить практично неможливим безпосереднє використання класичних методів оцінювання (наприклад, методу максимальної правдоподібності). В [1, 2] йшлося про

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 62M05, 60J27; Secondary 60J99, 93E11.

можливість застосування для оцінювання вектору параметрів зсуву $\theta^0 = \{\theta_0^0, \theta_1^0\}$ запропонованого в [3] методу, що базується на використанні структури кореляційної залежності між послідовними станами ланцюга Маркова. В даній роботі сформульовано та доведено відповідні твердження.

Припустимо для простоти, що оцінювання повинно бути проведено на підставі вектора спостережень $\bar{\xi}_N = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$ заданої розмірності N, та дослідимо властивості отриманих оцінок, коли N необмежено зростає. При цьому отримані результати можуть бути легко переформульовані для випадку, коли система спостерігається на фіксованому заданому проміжку часу $[0, T]$, що необмежено зростає, і вектор спостережень $\bar{\xi}_T = \left\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{K(T)}, \xi'_{K(T)}\right\}$ має випадкову розмірність $K(T) + 1$.

У випадку системи типу $M/M/1/0$ процес $\mu(t)$, $t \geq 0$, (а значить і процес $x(t)$, $t \geq 0$) має два стани, і вектор θ невідомих параметрів зсуву спостережень налічує дві координати

$$\mu(t) \in \{0, 1\}, \qquad \theta = \{\theta_0, \theta_1\}.$$

Отже, нехай $\bar{\xi}_N = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$ — статистичні дані, на основі яких повинні бути побудовані оцікі для невідомих координат вектора θ. При цьому

$$\xi_k = s_k - s_{k-1} + \theta_{x(k-1)}, \qquad k = 1, 2, \dots, N.$$

Введемо статистики

$$q_N^{(1)} = \frac{1}{N-1} \sum_{l=1}^{N-1} \xi_l \xi_{l+1}, \tag{2}$$

$$q_N^{(2)} = \frac{1}{N-2} \sum_{l=1}^{N-2} \xi_l \xi_{l+2}. \tag{3}$$

Лема 1. *Статистика $q_N^{(1)}$ збігається за ймовірністю при $N \to \infty$ до величини Q_1, що визначається наступним чином:*

$$Q_1 = \frac{1}{\lambda + 2\nu} \left(\theta_1 + \frac{1}{\lambda + \nu}\right) \left(2\nu \left(\theta_0 + \frac{1}{\lambda}\right) + \lambda \left(\theta_1 + \frac{1}{\lambda + \nu}\right)\right). \tag{4}$$

Тобто для будь-якого додатного числа $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N \to \infty} \mathsf{P} \left\{\left|q_N^{(1)} - Q_1\right| > \varepsilon\right\} = 0. \tag{5}$$

Статистика $q_N^{(2)}$ збігається за ймовірністю при $N \to \infty$ до величини Q_2, що визначається наступним чином:

$$\begin{aligned} Q_2 = \frac{\nu^2}{(\lambda+\nu)(\lambda+2\nu)} \left(\theta_0 + \frac{1}{\lambda}\right)^2 + \frac{2\lambda\nu}{(\lambda+\nu)(\lambda+2\nu)} + \left(\theta_0 + \frac{1}{\lambda}\right)\left(\theta_1 + \frac{1}{\lambda+\nu}\right) \\ + \frac{\nu^2 + \lambda\nu + \lambda^2}{(\lambda+\nu)(\lambda+2\nu)} \left(\theta_1 + \frac{1}{\lambda+\nu}\right)^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Тобто для будь-якого додатного числа $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N \to \infty} \mathsf{P} \left\{\left|q_N^{(2)} - Q_2\right| > \varepsilon\right\} = 0. \tag{7}$$

Доведення. Використовуючи визначення системи обслуговування $M/M/1/0$, а також властивості неперервних справа ланцюгів Маркова з неперервним часом ([4, с. 214]) переконуємося, що визначений співвідношенням (1) випадковий процес $x(k)$,

$k = 0, 1, \dots,$ є однорідним, ергодичним ланцюгом Маркова з дискретним часом та матрицею перехідних ймовірностей за один крок:

$$P = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\nu}{\lambda+\nu} & \frac{\lambda}{\lambda+\nu} \end{Vmatrix}. \tag{8}$$

Стаціонарний розподіл $\pi = \{\pi_0, \pi_1\}$ ланцюга $x(k)$, $k = 0, 1, \dots,$ визначається співвідношенням

$$\pi_0 = \frac{\nu}{\lambda + 2\nu}, \qquad \pi_1 = \frac{\lambda + \nu}{\lambda + 2\nu}. \tag{9}$$

Припустимо далі, не обмежуючи загальності ([4, с. 201]), що початковий розподіл ланцюга $x(k)$, $k = 0, 1, \dots,$ співпадає з його стаціонарним розподілом, а отже [5] $x(k)$, $k = 0, 1, \dots,$ є стаціонарним в широкому розумінні випадковим процесом з φ-перемішуванням, при цьому існують такі числа $C > 0$ та $0 < \rho < 1$, що коефіцієнт перемішування можна подати у вигляді

$$\varphi(n) = C\rho^n, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Використовуючи структуру чисто розривних ланцюгів Маркова з неперервним часом ([4, с. 230]), легко переконатися, що вектор спостережень $\bar{\xi}_N = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$ можна описати наступним чином:

$$\xi_t \sim \xi^{(t)}(x(t)), \qquad t = 1, 2, \dots, N, \tag{10}$$

де символ "$\sim$" означає стохастичну еквівалентність випадкових величин. При цьому

$$\left\{\xi^{(l)}(x), x \in \{0, 1\}, l = 0, 1, 2, \dots\right\},$$

є сукупністю незалежних від випадкового процесу $x(k)$, $k = 0, 1, \dots,$ випадкових величин, незалежних для різних l, розподіл яких не залежить від l. Крім того,

$$\mathsf{P}\left\{\xi^{(0)}(0) > t\right\} = e^{-\lambda(t-\theta_0)}, \qquad t > 0, \tag{11}$$

$$\mathsf{P}\left\{\xi^{(0)}(1) > t\right\} = e^{-(\lambda+\nu)(t-\theta_1)}, \qquad t > 0. \tag{12}$$

Не важко переконатися, що випадковий процес, визначений співвідношенням (10), також є стаціонарним в широкому розумінні випадковим процесом з φ-перемішуванням, а його функція перемішування $\bar{\varphi}(n)$ має вигляд

$$\bar{\varphi}(n) = 2C\rho^n, \qquad n = 1, 2, \dots . \tag{13}$$

Введемо випадкові процеси $\eta_i(t)$, $i = 1, 2$, $t = 1, 2, \dots,$ наступним чином:

$$\eta_i(t) = \xi_t \xi_{t+i}, \qquad i = 1, 2, \ t = 1, 2, \dots . \tag{14}$$

Тоді, очевидно, $\eta_i(t)$, $i = 1, 2$, $t = 1, 2, \dots$ — стаціонарні в широкому розумінні випадкові процеси з φ-перемішуванням та функцією перемішування (13). Тому на підставі ергодичної теорії для стаціонарних в широкому розумінні випадкових процесів з φ-перемішуванням [4, 5] при $N \to \infty$ з ймовірністю одиниця

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \eta_i(t) \to \mathsf{E}(\eta_i(t)), \quad i = 1, 2.$$

Звідси безпосереднім обчисленням отримуємо твердження леми 1. □

Нехай тепер π визначений співвідношенням (9) вектор стаціонарного розподілу ланцюга $x(k)$, $k = 0, 1, \dots,$ матриця $P^{(2)} = \|p_{ij}^{(2)}\|$ є матрицею його перехідних ймовірностей за два кроки, тобто

$$P^{(2)} = P^2.$$

Введемо статистики

$$Y_n(0) = \sqrt{q_n^{(1)} + \frac{\nu(\lambda+\nu)\left(q_n^{(2)} - q_n^{(1)}\right)}{\nu^2 + (\lambda+\nu)^2}}, \qquad Y_n(1) = \sqrt{\frac{(\lambda+\nu)^2\left(q_n^{(2)} - q_n^{(1)}\right)}{\nu^2 + (\lambda+\nu)^2}},$$

де статистики $q_N^{(1)}$, $q_N^{(2)}$ визначаються співвідношеннями (2), (3).

Теорема 1. *З ймовірністю, яка прямує до одиниці, якщо $N \to \infty$, система рівнянь*

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} \pi_i p_{ij} x_i x_j = q_N^{(1)}, \\ \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} \pi_i p_{ij}^{(2)} x_i x_j = q_N^{(2)} \end{cases} \tag{15}$$

має розв'язки.

Якщо для параметрів системи $M/M/1/0$ виконується умова

$$(\theta_1 - \theta_0) - \frac{\nu}{\lambda(\lambda+\nu)} > 0, \tag{16}$$

то статистики

$$\theta_0^*(n) = Y_n(0) - \frac{\sqrt{\lambda+\nu}}{\sqrt{\nu}} Y_n(1) - \frac{1}{\lambda}, \tag{17}$$

$$\theta_1^*(n) = Y_n(0) + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\lambda+\nu}} Y_n(1) - \frac{1}{\lambda+\nu}, \tag{18}$$

а якщо виконується умова

$$(\theta_1 - \theta_0) - \frac{\nu}{\lambda(\lambda+\nu)} < 0, \tag{19}$$

то статистики

$$\theta_0^*(n) = Y_n(0) + \frac{\sqrt{\lambda+\nu}}{\sqrt{\nu}} Y_n(1) - \frac{1}{\lambda}, \tag{20}$$

$$\theta_1^*(n) = Y_n(0) - \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\lambda+\nu}} Y_n(1) - \frac{1}{\lambda+\nu} \tag{21}$$

є спроможними оцінками параметрів $\{\theta_0, \theta_1\}$. Тобто, для будь-якого додатного числа $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{|\theta_i^*(n) - \theta_i| > \varepsilon\} = 0, \qquad i = 0, 1. \tag{22}$$

Доведення. Розглянемо спочатку систему рівнянь

$$\begin{cases} x^T \pi P x = Q_1, \\ x^T \pi P^2 x = Q_2, \end{cases} \tag{23}$$

де $x = (x_0, x_1)$ — вектор невідомих, x^T означає операцію транспонування, а величини Q_1 та Q_2 визначаються рівностями (4), (6). Позначимо

$$\Phi_0(\theta_0, \theta_1) = \mathsf{E}\left(\xi^{(0)}(0)\right) = \theta_0 + \frac{1}{\lambda}, \tag{24}$$

$$\Phi_1(\theta_0, \theta_1) = \mathsf{E}\left(\xi^{(0)}(1)\right) = \theta_1 + \frac{1}{\lambda+\nu}. \tag{25}$$

Тоді, як випливає з доведення леми 1, вектор $x^* = (x_0^*, x_1^*)$, де

$$x_0^* = \Phi_0(\theta_0, \theta_1), \qquad x_1^* = \Phi_1(\theta_0, \theta_1),$$

є одним із розв'язків системи рівнянь (23).

Введемо матрицю

$$\hat{\Pi} = \begin{Vmatrix} \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\lambda+2\nu}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\lambda+\nu}}{\sqrt{\lambda+2\nu}} \end{Vmatrix}$$

та визначимо матрицю A наступним чином:

$$A = \hat{\Pi} P \hat{\Pi}^{-1}.$$

Або у явному вигляді:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\lambda+\nu}} \\ \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\lambda+\nu}} & \frac{\lambda}{\lambda+\nu} \end{Vmatrix}.$$

Легко переконатися в справедливості рівності

$$AA^T = A^T A.$$

Проведемо лінійну заміну змінних $x = (x_0, x_1)$ на $z = (z_0, z_1)$ наступним чином:

$$z = \hat{\Pi} x^T. \tag{26}$$

Тоді система рівнянь (23) приймає вигляд:

$$\begin{cases} zAz^T = Q_1, \\ zA^2 z^T = Q_2. \end{cases}$$

Власними числами матриці A є числа

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = -\frac{\nu}{\lambda+\nu},$$

а вектори

$$u^{(1)} = \left(\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\lambda+2\nu}}, \frac{\sqrt{\lambda+\nu}}{\sqrt{\lambda+2\nu}}\right), \qquad u^{(2)} = \left(-\frac{\sqrt{\lambda+\nu}}{\sqrt{\lambda+2\nu}}, \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\lambda+2\nu}}\right)$$

— відповідні їм власні вектори матриці A. При цьому матриця

$$U = \begin{Vmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{Vmatrix}$$

є матрицею ортогональною, тобто $U^{-1} = U^T$, чи

$$UU^T = U^T U = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Позначимо через Λ діагональну матрицю, складену з власних чисел матриці A:

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{Vmatrix}.$$

Тоді матриця A буде ортогонально подібною до матриці Λ, тобто

$$UAU^T = \Lambda.$$

Крім того,

$$UA^2U^T = \Lambda^2.$$

Проведемо ще одну заміну змінних $z = (z_0, z_1)$ на $y = (y_0, y_1)$, а саме

$$y^T = Uz^T \quad \text{чи} \quad z^T = U^T y^T.$$

Або більш детально

$$z_0 = \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\lambda+2\nu}} y_0 - \frac{\sqrt{\lambda+\nu}}{\sqrt{\lambda+2\nu}} y_1, \tag{27}$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{\lambda+\nu}}{\sqrt{\lambda+2\nu}} y_0 + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\lambda+2\nu}} y_1. \tag{28}$$

Тоді остаточно система рівнянь (23) прийме вигляд

$$\begin{cases} y\Lambda y^T = Q_1, \\ y\Lambda^2 y^T = Q_2. \end{cases}$$

Легко знаходимо чотири розв'язки останньої системи, що вичерпуються всіма можливими комбінаціями

$$y_0 = \pm Y(0), \qquad y_1 = \pm Y(1),$$

де

$$Y(0) = \sqrt{Q_1 + \frac{\nu(\lambda+\nu)(Q_2 - Q_1)}{\nu^2 + (\lambda+\nu)^2}}, \qquad Y(1) = \sqrt{\frac{(\lambda+\nu)^2(Q_2 - Q_1)}{\nu^2 + (\lambda+\nu)^2}}.$$

Приймаючи до уваги зроблені раніше заміни (27), (28) та (26), приходимо до висновку, що всі розв'язки системи (23) вичерпуються чотирма наступними:

$$x_0 = (\pm Y(0)) - \frac{\sqrt{\lambda+\nu}}{\nu}(\pm Y(1)), \tag{29}$$

$$x_1 = (\pm Y(0)) + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\lambda+\nu}}(\pm Y(1)). \tag{30}$$

Як очевидно випливає з (24), (25) обидві координати x_0^*, x_1^* розв'язку x^* системи рівнянь (23), який нас цікавить, строго додатні. Оскільки x^* є одним з щойно записаних чотирьох розв'язків, а отже повинен мати вигляд:

$$x_0^* = Y^*(0) - \frac{\sqrt{\lambda+\nu}}{\nu}Y^*(1), \qquad x_1^* = Y^*(0) + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\lambda+\nu}}Y^*(1),$$

то очевидно $Y^*(0) = Y(0)$. Визначимо тепер, з яким знаком слід взяти вираз $Y(1)$ в співвідношеннях (29), (30), щоб отримати потрібний нам розв'язок x^*. Як легко допереконатися, умова (16) еквівалентна тому, що різниця $\Phi_1(\theta_0,\theta_1) - \Phi_0(\theta_0,\theta_1)$ є додатною. Відповідно умова (19) еквівалентна від'ємності тієї ж різниці. З другого боку, як випливає з (27), (28) та (26),

$$Y^*(1) = -\frac{\sqrt{\lambda+\nu}}{\sqrt{\lambda+2\nu}}z_0^* + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\lambda+2\nu}}z_1^* = \frac{\sqrt{(\nu)(\lambda+\nu)}}{\lambda+2\nu}(\Phi_1(\theta_0,\theta_1) - \Phi_0(\theta_0,\theta_1)). \tag{31}$$

Тому остаточне доведення теореми 1 отримуємо з рівності (31), використовуючи твердження леми 1. □

Дослідимо тепер точність оцінювання вектора невідомих параметрів $\theta = (\theta_0, \theta_1)$ за допомогою статистик $\theta^*(n) = (\theta_0^*(n), \theta_1^*(n))$, визначених в теоремі 1. Введемо вектор

$$\Delta\theta^*(n) = \theta^*(n) - \theta,$$

і дослідимо поведінку його розкладу при $n \to \infty$. Це дасть можливість дослідити швидкість збіжності вектора оцінок $\theta^*(n)$ до вектора невідомих параметрів θ, а також збудувати інтервальні оцінки для невідомих параметрів та критерії перевірки статистичних гіпотез відносно них.

Введемо векторний випадковий процес $\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t))$, $t = 1, 2, \ldots$, де випадкові процеси $\eta_i(t)$, $i = 1, 2$, $t = 1, 2, \ldots$, визначаються співвідношенням (14). Також визначимо випадкові вектори $q_n = (q_n^{(1)}, q_n^{(2)})$ та

$$\Delta q_n = \left(\sqrt{n}\left(q_n^{(1)} - \mathsf{E}\left(q_n^{(1)}\right)\right), \sqrt{n}\left(q_n^{(2)} - \mathsf{E}\left(q_n^{(2)}\right)\right)\right),$$

де статистики $q_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, визначаються співвідношеннями (2), (3). Використовуючи зв'язок між статистиками $q_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, та випадковими процесами $\eta_i(t)$, $i = 1, 2$, $t = 1, 2, \ldots$, а також використовуючи центральну граничну теорему для стаціонарних в широкому розумінні випадкових процесів з φ-перемішуванням з функцією перемішування (13) [4, 5], можна довести наступне твердження.

Лема 2. *Розклад випадкового вектора* Δq_n *збігається слабо при* $n \to \infty$ *до багатовимірного нормального розподілу з нульовим вектором середніх та коваріаційною матрицею*

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix}.$$

При цьому

$$b_{ii} = \mathsf{E}(\eta_i(1) - Q_i)^2 + 2\sum_{t=2}^{\infty} \mathsf{E}(\eta_i(1) - Q_i)(\eta_i(t) - Q_i), \qquad i = 1, 2, \tag{32}$$

$$\begin{aligned} b_{12} = b_{21} = {} & \mathsf{E}(\eta_1(1) - Q_1)(\eta_2(1) - Q_2) \\ & + \sum_{t=2}^{\infty} \mathsf{E}[(\eta_1(1) - Q_1)(\eta_2(t) - Q_2) + (\eta_1(t) - Q_1)(\eta_2(1) - Q_2)]. \end{aligned} \tag{33}$$

Нехай вектор $x^*(n) = (x_0^*(n), x_1^*(n))$ визначається рівностями

$$x_0^*(n) = \sqrt{q_n^{(1)} + \frac{\nu(\lambda+\nu)\left(q_n^{(2)} - q_n^{(1)}\right)}{\nu^2 + (\lambda+\nu)^2}} - \frac{\sqrt{\lambda+\nu}}{\sqrt{\nu}}\sqrt{\frac{(\lambda+\nu)^2\left(q_n^{(2)} - q_n^{(1)}\right)}{\nu^2 + (\lambda+\nu)^2}},$$

$$x_1^*(n) = \sqrt{q_n^{(1)} + \frac{\nu(\lambda+\nu)\left(q_n^{(2)} - q_n^{(1)}\right)}{\nu^2 + (\lambda+\nu)^2}} + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\lambda+\nu}}\sqrt{\frac{(\lambda+\nu)^2\left(q_n^{(2)} - q_n^{(1)}\right)}{\nu^2 + (\lambda+\nu)^2}},$$

якщо для параметрів системи $M/M/1/0$ виконується умова (16), та рівностями

$$x_0^*(n) = \sqrt{q_n^{(1)} + \frac{\nu(\lambda+\nu)\left(q_n^{(2)} - q_n^{(1)}\right)}{\nu^2 + (\lambda+\nu)^2}} + \frac{\sqrt{\lambda+\nu}}{\sqrt{\nu}}\sqrt{\frac{(\lambda+\nu)^2\left(q_n^{(2)} - q_n^{(1)}\right)}{\nu^2 + (\lambda+\nu)^2}},$$

$$x_1^*(n) = \sqrt{q_n^{(1)} + \frac{\nu(\lambda+\nu)\left(q_n^{(2)} - q_n^{(1)}\right)}{\nu^2 + (\lambda+\nu)^2}} - \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\lambda+\nu}}\sqrt{\frac{(\lambda+\nu)^2\left(q_n^{(2)} - q_n^{(1)}\right)}{\nu^2 + (\lambda+\nu)^2}}$$

у випадку виконання умови (19). Введемо випадковий вектор

$$\Delta x^*(n) = \left(\sqrt{n}(x_0^*(n) - x_0^*), \sqrt{n}(x_1^*(n) - x_1^*)\right),$$

де величини $x^* = (x_0^*, x_1^*)$ визначаються співвідношеннями (24), (25). Як очевидно випливає з рівностей (17), (18), (20), (21) та (24), (25)

$$\sqrt{n}\Delta\theta^*(n) = \Delta x^*(n).$$

З доведення теореми 1 робимо висновок, що вектор $x^*(n) = (x_0^*(n), x_1^*(n))$ зв'язаний з вектором $y^*(n) = (y_0^*(n), y_1^*(n))$ розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} y\Lambda y^T = q_n^{(1)}, \\ y\Lambda^2 y^T = q_n^{(1)} \end{cases}$$

наступним співвідношенням:

$$(y^*(n))^T = U\hat{\Pi}(x^*(n))^T$$

(не залежно від того, яка з умов (16) чи (19) має місце).

Визначимо вектор $y^* = (y_0^*, y_1^*)$ рівністю

$$(y^*)^T = U\hat{\Pi}(x^*)^T,$$

а також вектор

$$\Delta y^*(n) = \left(\sqrt{n}(y_0^*(n) - y_0^*), \sqrt{n}(y_1^*(n) - y_1^*)\right).$$

Тоді з одного боку має місце наступне співвідношення:

$$(\Delta y^*(n))^T = U\hat{\Pi}(\Delta x^*(n))^T \quad \text{або} \quad (\Delta x^*(n))^T = \hat{\Pi}^{-1}U^T(\Delta y^*(n))^T.$$

З іншого боку, враховуючи, що $\mathsf{E}(q_n^{(i)}) = Q_i$, $i = 1, 2$, приходимо до висновку про справедливість наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} a_1\left[(y_0^*(n))^2 - (y_0^*)^2\right] + a_2\left[(y_1^*(n))^2 - (y_1^*)^2\right] = q_n^{(1)} - \mathsf{E}\left(q_n^{(1)}\right), \\ a_1^2\left[(y_0^*(n))^2 - (y_0^*)^2\right] + a_2^2\left[(y_1^*(n))^2 - (y_1^*)^2\right] = q_n^{(2)} - \mathsf{E}\left(q_n^{(2)}\right), \end{cases} \tag{34}$$

де a_1, a_2 визначені при доведенні теореми 1 власні числа матриці A. Якщо ввести матриці

$$W = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{Vmatrix}, \qquad H_n = \begin{Vmatrix} y_0^*(n) + y_0^* & 0 \\ 0 & y_1^*(n) + y_1^* \end{Vmatrix},$$

то систему рівнянь (34) можна записати наступним чином:

$$W H_n \Delta y^*(n) = \Delta q_n. \tag{35}$$

Тому, спираючись на результат теореми 1, використовуючи властивості багатовимірного нормального розподілу, враховуючи асимптотичні властивості вектора Δq_n, описані в лемі 1, а також зв'язок між векторами $\Delta\theta^*(n)$, $\Delta x^*(n)$, $\Delta y^*(n)$ та Δq_n, отримуємо наступне твердження.

Теорема 2. *Розклад випадкового вектора $\Delta\theta^*(n)$ похибок оцінювання вектора невідомих параметрів $\theta = (\theta_0, \theta_1)$ збігається слабо при $n \to \infty$ до багатовимірного нормального розподілу з нульовим вектором середніх та коваріаційною матрицею*

$$K = \left(\hat{\Pi}^{-1}U^T H^{-1} W^{-1}\right) \cdot B \cdot \left(\hat{\Pi}^{-1}U^T H^{-1} W^{-1}\right)^T,$$

де матриця B визначена в лемі 2, а матриці W та H визначаються наступним чином:

$$W = \begin{Vmatrix} 1 & -\frac{\nu}{\lambda+\nu} \\ 1 & \frac{\nu^2}{(\lambda+\nu)^2} \end{Vmatrix}, \qquad H = \begin{Vmatrix} 2y_0^* & 0 \\ 0 & 2y_1^* \end{Vmatrix}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. О. А. Война, О. О. Жигайло, *Про параметричне оцінювання для марковських систем за частковими деформованими спостереженнями*, Доповіді АН УРСР, Сер. А (2001), № 2, 70–74.
2. О. А. Война, Е. Чапля, *Оцінювання параметрів зсуву для СМО за спостереженнями змішаних вхідного та вихідного потоків*, Доповіді АН УРСР, Сер. А (2001), № 8, 54–57.
3. А. А. Война, *Статистическое оценивание для случайных величин на цепи Маркова при неполных наблюдениях*, Теор. вероятн. и матем. статист. **37** (1987), 16–26.
4. Дж. Л. Дуб, *Вероятностные процессы*, "Иностранная литература", Москва, 1956.
5. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, "Наука", Москва, 1977.

Кафедра кількісних методів факультету економіки та управління, Кошалінський Політехнічний Університет, м. Кошалін, Польща

Адреса електронної пошти: avoina@hotmail.com

Кафедра кількісних методів факультету економіки та управління, Кошалінський Політехнічний Університет, м. Кошалін, Польща

Надійшла 30/08/2003