Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 72, 2005, стор. 84–92

Teor. Ímovir. ta Matem. Statyst.
No. 72, 2005, pp. 84–92

ЗАУВАЖЕННЯ ДО ПОРЯДКОВОГО ЗАКОНУ ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ

УДК 519.21

І. К. МАЦАК

Анотація. Для банахових граток, які не містить рівномірно l_1^n, доводиться еквівалентність порядкової збіжності та збіжності за нормою у законі великих чисел.

1. Вступ

В банахових просторах закон великих чисел (ЗВЧ) вивчався досить докладно (див. [1, 2]. Звичайно досліджувалась збіжність за нормою (b-збіжність).

Нехай B — банахів простір з нормою $\|\cdot\|$, X_i, $i \geq 1$, — послідовність незалежних копій випадкового елемента (в.е.) X із значеннями в B,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Відомо, що в.е. X із значеннями в сепарабельному банаховому просторі, $\mathsf{E}\,X = 0$, задовольняє b-ЗВЧ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|S_n\|}{n} = 0 \quad \text{м.н.} \tag{1}$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\mathsf{E}\,\|X\| < \infty, \tag{2}$$

(Колмогоров, Мур'є, див., наприклад, [1]).

Для банахових граток нарівні із збіжністю за нормою може розглядатися порядкова збіжність (o-збіжність).

Нагадаємо, що в банаховій гратці B з модулем $|\cdot|$ послідовність елементів (x_n) називається o-збіжною до елемента x, $x = \text{o-}\lim_{n\to\infty} x_n$, якщо існує така послідовність (v_n), що $|x - x_n| < v_n$ і $v_n \downarrow 0$, тобто $v_1 \geq v_2 \geq \dots$ і $\inf_{n\geq 1} v_n = 0$ ([3, 4]).

Казатимемо, що в.е. X, $\mathsf{E}\,X = 0$, задовольняє порядковому закону великих чисел (o-ЗВЧ), якщо

$$\text{o-}\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0 \quad \text{м.н.} \tag{3}$$

Порядковий ЗВЧ досліджувався у роботі автора [5] (причому в [5] розглядався також і випадок неоднаково розподілених в.е.).

Для сепарабельної σ-повної банахової гратки достатньою для виконання o-ЗВЧ (3) буде умова

$$\mathsf{E}\,\|X\|_u < \infty,$$

$\|x\|_u = \inf\{\lambda > 0\colon |x| \leq \lambda u\}$ —норма, породжена деяким елементом $u \in B_+$.

В q-вгнутих банахових гратках достатні умови для o-ЗВЧ записувались в термінах характеристик $\mathfrak{S}_q X$ при $1 < q < \infty$ та $\mathfrak{S}_\psi X$ при $q = 1$ (середнього відхилення степеня q та середнього ψ-відхилення, див. [5]). Ці умови забезпечують також збіжність відповідних моментів у порядковому ЗВЧ.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60B12.

Ясно, що наведені моментні умови на в.е. X досить жорсткі і в загальному випадку мабуть не будуть необхідними. Наприклад, для $X = \xi \cdot x$, де $x \in B$, ξ така в.в. в $\mathbf{R}^1$, що $\mathsf{E}|\xi| < \infty$ і при $q > 1$

$$\mathfrak{S}_q\xi = \infty,$$

o-ЗВЧ (3) буде виконуватись.

Для банахової гратки c_0 o-збіжність і b-збіжність еквівалентні.

Відомо також, що для простору $C[0,1]$ виконується співвідношення

$$\text{b-}\lim_{n\to\infty} x_n = x \Longrightarrow \text{o-}\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

а обернена імплікація невірна. Але неважко помітити, що в банахових гратках при справедливості o-ЗВЧ (3) вірна умова (2) (див. доведення теореми 1).

Таким чином в сепарабельній банаховій гратці умова (2) необхідна для виконання o-ЗВЧ (3), а у просторах c_0 та $C[0,1]$ o-ЗВЧ (3) і b-ЗВЧ (1) еквівалентні умові (2). В загальному випадку сепарабельної банахової гратки це не так.

У роботі [5] побудовано приклад в.е. X із значеннями в банаховій гратці l_1, який задовольняє рівність (1) та нерівність (2), але не задовольняє o-ЗВЧ (3).

Виникає запитання: для яких банахових граток o-ЗВЧ (3) еквівалентний b-ЗВЧ (1) та умові (2)?

В даній роботі буде наведено один досить широкий клас таких банахових граток (який включає простори L_p та l_p, $1 < p < \infty$).

2. Основна теорема

Нехай n — ціле число, $\varepsilon > 0$. Через l_1^n позначаємо простір $\mathbf{R}^n$ з нормою

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|, \qquad a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Кажуть, що банахів простір B містить підпростір $(1+\varepsilon)$-ізоморфний l_1^n, якщо існують елементи $x_1, \ldots, x_n \in B$ такі, що для всіх $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \le \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \le (1+\varepsilon) \sum_{i=1}^{n} |a_i|,$$

і B містить рівномірно l_1^n, якщо він містить підпростори $(1+\varepsilon)$-ізоморфні l_1^n для всіх n і $\varepsilon > 0$ ([1, с. 237]).

Теорема 1. *Нехай B — сепарабельна банахова гратка, яка не містить рівномірно l_1^n, X — випадковий елемент із значеннями в B, $\mathsf{E}X = 0$. Тоді еквівалентні умови:*

(i) *X задовольняє b-закону великих чисел* (1);

(ii) *X задовольняє порядковому закону великих чисел* (3);

(iii) *виконується умова* (2).

Наслідок 1. *Нехай X — випадковий елемент із значеннями у просторі L_p (l_p) при $1 < p < \infty$, $\mathsf{E}X = 0$. Тоді еквівалентні умови* (i)–(iii) *теореми* 1.

Зауваження 1. В [5] робилася спроба побудови прикладу в.е. X у просторі l_p, $1 < p < \infty$, для якого виконується умова (2) і не виконується порядковий закон великих чисел (3). Але, як виявилося, відповідні обчислення (доведення пункту (ii) теореми 3 в [5]) містять помилку. Більше того, як випливає із наслідку 1, такі приклади у просторі l_p, $1 < p < \infty$, не існують. Тому, крім усього іншого, дану роботу слід розглядати і як виправлення одного із попередніх результатів.

Нехай $1 \le p < \infty$. Банахова гратка B називається p-опуклою, якщо існує така стала $D^{(p)} = D^{(p)}(B)$, що для будь-якого n і для будь-яких елементів $(x_i)_1^n \subset B$

$$\left\| \left(\sum_{n=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \right\| \le D^{(p)} \left(\sum_{n=1}^{n} \|x_i\|^p \right)^{1/p}$$

і, аналогічно, q-вгнутою, якщо для деякої сталої $D_{(q)} = D_{(q)}(B)$ виконується обернена нерівність

$$\left(\sum_{n=1}^{n} \|x_i\|^q \right)^{1/q} \le D_{(q)} \left\| \left(\sum_{n=1}^{n} |x_i|^q \right)^{1/q} \right\|.$$

Наслідок 2. *Нехай B — сепарабельна σ-повна p-опукла при $1 < p < \infty$, банахова гратка, X — випадковий елемент із значеннями в B. Тоді умова (2) еквівалентна рівності*

$$\text{o-}\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0 \quad \text{м.н.} \tag{4}$$

Доведення теореми 1. Як було відзначено вище, еквівалентність умов (i) та (iii) — це відомий класичний результат [1].

Покажемо еквівалентність умов (ii) та (iii). Неважко помітити, що коли виконується порядковий закон великих чисел (3), то

$$\sup_{n\ge1} \frac{\|X_n\|}{n} \le 2 \sup_{n\ge1} \frac{\|S_n\|}{n} \le 2 \left\| \sup_{n\ge1} \frac{|S_n|}{n} \right\| < \infty \quad \text{м.н.}$$

Отже існує таке число t_0, для якого

$$\mathsf{P}\left(\sup_{n\ge1} \frac{\|X_n\|}{n} \ge t_0 \right) \le \frac{1}{2}.$$

Звідси за лемою 2.6 книги [1] при $t \ge t_0$

$$\mathsf{P}\left(\sup_{n\ge1} \frac{\|X_n\|}{n} \ge t \right) \ge \frac{1}{2} \sum_{n\ge1} \mathsf{P}(\|X_n\| \ge tn).$$

Із збіжності останнього ряду негайно випливає умова (2) ([6], с. 278).

Залишається установити імплікацію (iii) $\Rightarrow$ (ii).

Згідно відомому результату Піз'є ([7], [1], гл. 9) банахова гратка, яка не містить рівномірно l_1^n, має тип p Радемахера для деякого $p > 1$ і таким чином буде q-вгнутою та p-опуклою для деяких $q < \infty$, $p > 1$ [3], [8].

Сепарабельна σ-повна банахова гратка порядково ізометрична деякому банаховому ідеальному простору (БІП). Оскільки q-вгнута банахова гратка звичайно буде σ-повною, то без обмеження загальності можна вважати, що B — сепарабельний q-вгнутий БІП, заданий на деякому вимірному просторі (T, Λ, μ), $\mu(T) = 1$ (див. [3, 4]).

Для такого простору умови

$$\mu\left(t \in T\colon \lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t) \right) = 1, \tag{5}$$

і

$$\begin{gathered} \text{існує } y = (y(t),\ t \in T) \in B \quad \text{такий, що} \\ \mu\big(t \in T\colon |x_n(t)| \le y(t)\big) = 1, \end{gathered} \tag{6}$$

достатні для o-збіжності послідовності (x_n) до x [8].

Нехай

$$X_n = (X_n(t), t \in T), \qquad S_n = (S_n(t), t \in T),$$

$$\tau = \left\| \sup_{n\ge1} \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^{n} X_i \right| \right\|.$$

Щоб установити умови (5), (6) досить показати, що

$$\mu\left(t\in T\colon \lim_{n\to\infty}\frac{S_n(t)}{n}=0\right)=1 \quad \text{м.н.,} \tag{7}$$

$$\tau<\infty \quad \text{м.н.} \tag{8}$$

Оскільки

$$\mathsf{E}\,\|X\|\geq \big\|\mathsf{E}\,|X|\big\|,$$

то співвідношення (7) — прямий наслідок теореми Фубіні та ЗВЧ Колмогорова в $\mathbf{R}^1$.

Установимо справедливість оцінки (8). Припустимо спочатку, що X — симетричний в.е. Тоді можна вважати, що $X=\varepsilon\hat{X}$, де $\hat{X}$ і ε —незалежні, $\hat{X}$ — копія X, ε — симетрична в.в. Бернуллі.

Нехай (X_n) — послідовність незалежних копій X. Покладемо

$$\bar{X}_n=\hat{X}_nI(\|\hat{X}_n\|\leq n),\qquad \tilde{X}_n=\hat{X}_nI(\|\hat{X}_n\|>n),$$

$$\bar{S}_n=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\bar{X}_i,\qquad \tilde{S}_n=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\tilde{X}_i.$$

Ясно, що $X_n=\varepsilon_n(\bar{X}_n+\tilde{X}_n)$ і

$$\tau\leq\left\|\sup_{n\geq1}\frac{|\bar{S}_n|}{n}\right\|+\left\|\sup_{n\geq1}\frac{|\tilde{S}_n|}{n}\right\| \quad \text{м.н.} \tag{9}$$

Відомо ([6], с. 278), що із умови (2) випливає обмеженість ряду

$$\sum_{n\geq1}\mathsf{P}(\|X_n\|\geq n)<\infty.$$

За лемою Бореля–Кантеллі це означає, що м.н. лише скінчене число в.е. $\tilde{X}_n$ відмінне від 0, тобто

$$\left\|\sup_{n\geq1}\frac{|\tilde{S}_n|}{n}\right\|<\infty \quad \text{м.н.}$$

Таким чином оцінка (8) буде вірна, якщо ми установимо, що обмежений перший доданок в правій частині нерівності (9). Для цього достатньо показати, що

$$\mathsf{E}_{\hat{X}}\left\|\sup_{n\geq1}\frac{|\bar{S}_n|}{n}\right\|^q<\infty \quad \text{м.н.,} \tag{10}$$

де через $\mathsf{E}_{\hat{X}}(\xi)$ позначаємо математичне сподівання в.в. ξ при фіксованій послідовності $(\hat{X}_n)$.

При доведенні нерівності (10) нам будуть потрібні дві оцінки, які містять наступні леми.

Лема 1 ([9]). *Нехай B — сепарабельний q-вгнутий, $1\leq q<\infty$, банахів ідеальний простір, $Y=(Y(t),t\in T)$ — випадковий елемент із значеннями в B. Тоді*

$$(\mathsf{E}\,\|Y\|^q)^{1/q}\leq D_{(q)}\big\|(\mathsf{E}\,|Y(t)|^q)^{1/q}\big\|.$$

Лема 2. *Нехай (a_i) — послідовність дійсних чисел. Тоді*

$$\max_{1\leq k\leq n}\frac{1}{k}\left|\sum_{i=1}^{k}a_i\right|\leq 2\max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{i}\right|.$$

Лема 2 — частковий випадок однієї нерівності роботи [10].

Із лем 1, 2 маємо

$$\left(\mathsf{E}_{\hat X}\left\|\sup_{n\ge1}\frac{|\bar S_n|}{n}\right\|^q\right)^{1/q}\le D_{(q)}\left\|\left(\mathsf{E}_{\hat X}\sup_{n\ge1}\left|\frac{\bar S_n(t)}{n}\right|^q\right)^{1/q}\right\|$$
$$\le 2D_{(q)}\left\|\left(\mathsf{E}_{\hat X}\sup_{n\ge1}\left|\sum_{i=1}^n\frac{\varepsilon_i\bar X_i(t)}{i}\right|^q\right)^{1/q}\right\|. \tag{11}$$

Далі скористаємось нерівностями Леві ([1], с. 48) та Хінчина ([11], с. 251) для симетричних в.в. Бернуллі:

$$\left(\mathsf{E}_{\hat X}\sup_{n\ge1}\left|\sum_{i=1}^n\frac{\varepsilon_i\bar X_i(t)}{i}\right|^q\right)^{1/q}\le\left(2\,\mathsf{E}_{\hat X}\left|\sum_{n=1}^\infty\frac{\varepsilon_n\bar X_n(t)}{n}\right|^q\right)^{1/q}$$
$$\le C_q\left(\sum_{n=1}^\infty\left|\frac{\bar X_n(t)}{n}\right|^2\right)^{1/2}. \tag{12}$$

Оскільки в банаховій гратці типу p виконується нерівність [8]

$$\left\|\left(\sum_{n=1}^n|x_i|^2\right)^{1/2}\right\|\le C(B)\left(\sum_{n=1}^n\|x_i\|^p\right)^{1/p},$$

то, враховуючи (11) та (12), одержуємо

$$\left(\mathsf{E}_{\hat X}\left\|\sup_{n\ge1}\frac{|\bar S_n|}{n}\right\|^q\right)^{1/q}\le C(B)\left(\sum_{n=1}^\infty\frac{\|\bar X_n\|^p}{n^p}\right)^{1/p}. \tag{13}$$

Щоб завершити доведення теореми 1, залишається показати, що збігається ряд в правій частині нерівності (13). Маємо

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{\mathsf{E}\|\bar X_n\|^p}{n^p}=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^p}\int_0^\infty\mathsf{P}(\|\bar X_n\|^p>t)\,dt$$
$$=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^p}\int_0^{n^p}\mathsf{P}(\|X_n\|^pI(\|X_n\|\le n)>t)\,dt$$
$$\le\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^p}\int_0^{n^p}\mathsf{P}(\|X\|^p>t)\,dt \tag{14}$$
$$=\int_0^\infty\mathsf{P}(\|X\|^p>t)\beta_p(t)\,dt,$$

де

$$\beta_p(t)=\sum_{n^p\ge t}n^{-p}.$$

Оскільки при $p>1$ і $t\to\infty$

$$\sum_{n\ge t}\frac{1}{n^p}\sim\frac{p-1}{t^{p-1}},$$

то

$$\beta_p(t)\sim\frac{p-1}{t^{1-1/p}}.$$

Тоді скінченість останнього інтеграла в (14) еквівалентна умові

$$\int_0^\infty\mathsf{P}(\|X\|^p>t)t^{1/p-1}\,dt<\infty. \tag{15}$$

Підставляючи у відому рівність ([6], с. 178)

$$\mathsf{E}\,|\xi|^\alpha = \alpha \int_0^\infty \mathsf{P}(|\xi| > t) t^{\alpha-1}\,dt$$

$\alpha = 1/p$ і $\xi = \|X\|^p$, одержуємо, що умова (15) еквівалентна умові (2). Більше того, оскільки можна вважати, що $1 < p \le 2 \le q < \infty$, то із (13)–(15) маємо

$$\mathsf{E}\left\|\sup_{n\ge1}\frac{|\bar S_n|}{n}\right\|^p \le C(B)\,\mathsf{E}\,\|X\|. \tag{16}$$

Таким чином імплікація (iii) $\Rightarrow$ (ii) теореми 1 установлена для симетричних в.е.

Загальний випадок зведемо до симетричного скориставшись стандартною процедурою симетризації. Позначимо

$$\bar X_n^{(s)} = X_n I(\|X_n\| \le n) - X_n' I(\|X_n'\| \le n),$$

$$\bar S_n^{(s)} = \sum_{i=1}^n \bar X_i^{(s)},$$

(X_n') — незалежна копія послідовності (X_n).

Так само як і в симетричному випадку, основний момент доведення пов'язаний з перевіркою нерівності (8). Повторюючи наведені вище викладки для $\bar S_n^{(s)}$ (співвідношення (11)–(15)) одержуємо оцінку близьку до (16)

$$\left(\mathsf{E}\left\|\sup_{n\ge1}\frac{|\bar S_n^{(s)}|}{n}\right\|^p\right)^{1/p} \le C(B)(\mathsf{E}\,\|X\|)^{1/p}.$$

Із цієї нерівності та відомих моментних оцінок для банахових просторів ([11], с. 222) маємо

$$\begin{aligned}\left(\mathsf{E}\left\|\sup_{n\ge1}\frac{|\bar S_n|}{n}\right\|^p\right)^{1/p} &\le \left\|\sup_{n\ge1}\frac{|\sum_{k=1}^n \mathsf{E}\,X_k I(\|X_k\|\le k)|}{n}\right\| + \left(\mathsf{E}\left\|\sup_{n\ge1}\frac{|\bar S_n^{(s)}|}{n}\right\|^p\right)^{1/p}\\ &\le \|\,\mathsf{E}\,|X|\| + C(B)(\mathsf{E}\,\|X\|)^{1/p}.\end{aligned}$$

Звідси та (9) отримуємо оцінку (8). $\square$

Наслідок 1 безпосередньо випливає із теореми 1, оскільки простори L_p та l_p при $1 < p < \infty$ не міститять рівномірно l_1^n.

Доведення наслідку 2 фактично міститься у доведенні теореми 1. Дійсно, q-вгнутість банахової гратки B використовувалась лише в оцінках (11), (12). Відповідна оцінка для наслідку 2 має вигляд

$$\sup_{n\ge1}\left|\frac{\bar X_n}{n}\right| \le \left(\sum_{n=1}^\infty \left|\frac{\bar X_n}{n}\right|^2\right)^{1/2}$$

і вірна для довільної банахової гратки. А далі треба повторити міркування із теореми 1.

Метод, використаний вище, дозволяє також одержати порядковий ЗВЧ і для випадку неоднаково розподілених доданків. Сформулюємо без доведення один результат такого типу.

Твердження 1. *Нехай B — сепарабельний банахів ідеальний простір на (T,Λ,μ), який не містить рівномірно l_1^n, (X_n) — послідовність незалежних випадкових елементів із значеннями в B,*

$$\mathsf{E}\,X_n = 0, \qquad S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \qquad \psi(t) = |t|\ln^{1+\varepsilon}(1+|t|), \qquad \varepsilon > 0.$$

Якщо майже скрізь на T

$$\sup_{n\geq 1} \mathsf{E}\,\psi(X_n(t)) < \infty$$

і

$$\sup_{n\geq 1} \mathsf{E}\,\psi(\|X_n\|) < \infty,$$

то виконується порядковий ЗВЧ (3).

3. Приклад

В.е. X із контрприкладу до о-ЗВЧ в l_1 із роботи [5] зображувався у вигляді

$$X = (a_i\xi_i), \qquad \xi_i \text{ — незалежні копії в.в. } \xi. \tag{17}$$

Для такого в.е. X (а також для ξ) виконується умова (2), але

$$\mathsf{E}\,\|X\|\ln(1+\|X\|) = \infty.$$

Якщо при деякому $m > 1$

$$\mathsf{E}\,\|X\|^m < \infty, \tag{18}$$

і в.е. X зображується у вигляді (17), то вірний о-ЗВЧ (3). Виникає запитання: чи не будуть моментні умови типу (18) достатні для справедливості о-ЗВЧ в загальних банахових гратках?

Наступний приклад показує, що це не так. Побудуємо в.е. X із значеннями в l_1 такий, що для всіх $m > 1$ виконується умова (18), а

$$\left\|\sup_{n\geq 1}\left|\frac{X_n}{n}\right|\right\|_{l_1} = \infty \quad \text{м.н.}, \tag{19}$$

(X_n) — послідовність незалежних копій в.е. X.

Звичайно, для в.е. X о-ЗВЧ (3) не виконується.

Покладемо $L(t) = \ln t$ при $t > 2$ і $L(t) = 1$ при $t \leq 2$,

$$\theta = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{kL^2(k)}, \qquad p_k = \frac{1}{\theta k L^2(k)}, \quad k \geq 1.$$

Зрозуміло, що $\sum_{k\geq 1} p_k = 1$.

Нехай (ξ_k) — послідовність н.в.в., для яких

$$\mathsf{P}(\xi_k = +1) = p_k/2, \quad \mathsf{P}(\xi_k = -1) = p_k/2, \quad \mathsf{P}(\xi_k = 0) = 1 - p_k.$$

Тоді в.е. $X = (\xi_k)$ задовольняє умови

$$\mathsf{E}\,|\xi_k| = p_k, \qquad \mathsf{E}\,\|X\|_{l_1} = \sum_{k\geq 1} p_k = 1. \tag{20}$$

Щоб показати, що в.е. X задовольняє умову (18), скористаємось рівномірною по n оцінкою для сум обмежених н.в.в. із книги Скорохода ([12], с. 22).

Лема 3 ([12]). *Нехай $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — послідовність незалежних випадкових величин,*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\eta_i,$$

і

$$|\eta_i| \leq 1 \quad \text{м.н.}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Якщо існує таке a, що

$$\mathsf{P}(|S_n| > a) \leq \frac{1}{8e},$$

то для $m > 0$

$$\mathsf{E}\,|S_n|^m \le L_m(a+1)^m.$$

Із рівності (20) та нерівності Маркова одержуємо

$$\mathsf{P}(\|X\|_{l_1} > 8e) \le \frac{1}{8e}.$$

Тому згідно леми 3 для будь-якого $m > 0$ в.е. X задовольняє умову (18).

Перевіримо рівність (19). Для $X_n = (\xi_{nk}), (\xi_{nk})$ — незалежні копії послідовності (ξ_k), запишемо

$$\left\|\sup_{n\ge1}\left|\frac{X_n}{n}\right|\right\|_{l_1} = \sum_{k\ge1}\sup_{n\ge1}\left|\frac{\xi_{nk}}{n}\right|. \tag{21}$$

За побудовою $|\xi_{nk}| \le 1$ м.н. Тому ряд у рівності (21) збігається тоді і тільки тоді (див. [13], с. 53), коли

$$\sum_{k\ge1}\mathsf{E}\sup_{n\ge1}\left|\frac{\xi_{nk}}{n}\right| < \infty. \tag{22}$$

Далі застосуємо оцінку роботи [14]:

$$C_1\mathfrak{S}_\psi(|\xi_k|) \le \mathsf{E}\sup_{n\ge1}\left|\frac{\xi_{nk}}{n}\right| \le C_2\mathfrak{S}_\psi(|\xi_k|),$$

де $\psi(t) = |t|\ln(1+|t|)$, $\mathfrak{S}_\psi(\xi)$ — середнє ψ-відхилення в.в. ξ (див., [14]), тобто норма Орліча в.в. ξ:

$$\mathfrak{S}_\psi\xi = \sup(x \in K_\psi),$$
$$K_\psi = (\mathsf{E}\,\eta\xi\colon\ \mathsf{E}\,\psi^*(\eta) \le 1),$$

де

$$\psi^*(t) = \sup_{s\in\mathbb{R}^1}(st - \psi(s))$$

— доповняльна функція до N-функції $\psi(t)$ [4]. Із останніх нерівностей випливає, що умова (22) еквівалентна нерівності

$$\sum_{k\ge1}\mathfrak{S}_\psi(|\xi_k|) < \infty. \tag{23}$$

Відомо ([4], с. 150–151), що норма $\mathfrak{S}_\psi\xi$ еквівалентна нормі

$$\|\xi\|_1 = \inf\left(\lambda > 0\colon\ \mathsf{E}\,\psi\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) \le 1\right).$$

А норму $\||\xi_k|\|_1$ неважко оцінити знизу безпосередньо із означення в.в. ξ_k. Дійсно

$$\||\xi_k|\|_1 = \inf\left(\lambda > 0\colon\ \frac{1}{\lambda}\ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{\theta k L^2(k)} \le 1\right).$$

Так як $\theta > 1$, то вибираючи $\lambda = (\theta k\ln(k))^{-1}$ при $k > 2$ маємо

$$\frac{1}{\lambda}\ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{\theta k L^2(k)} \ge 1.$$

Отже при $k > 2$

$$\||\xi_k|\|_1 \ge \frac{1}{\theta k\ln(k)}.$$

Звідси, враховуючи еквівалентність норм $\|\cdot\|_1$ та $\mathfrak{S}_\psi(\cdot)$, отримуємо, що нерівність (23) не виконується. Це і означає справедливість рівності (19).

Література

1. M. Ledoux and M. Talagrand, *Probability in Banach Spaces*, Springer, Berlin, 1991.
2. J. Hoffmann-Jørgensen, *Probability in B-spaces*, Lect. Notes Series, т. 48, 1977.
3. J. Lindenstraus and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces*, т. 2, Springer, Berlin, 1979.
4. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, "Наука", Москва, 1984.
5. І. К. Мацак, *Порядковий закон великих чисел у банахових гратках*, Теорія ймовірност. та мат.статист. **62** (2000), 83–95.
6. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, "Мир", Москва, 1984.
7. G. Pizier, *Sur les espaces qui ne contiennent pas l_n^1 uniformement*, Seminare Maurey–Schwartz 1973–74, Ecole Politechnique, Paris, 1974.
8. А. В. Бухвалов, А. И. Векслер, В. А. Гейлер, *Нормированные решетки*, Итоги науки. Мат. анализ **18** (1980), 125–184.
9. І. К. Мацак, А. М. Плічко, *Про максимуми незалежних випадкових елементів у функційній банаховій гратці*, Теорія ймовірност. та мат. статист. **61** (1999), 105–116.
10. J. A. Wellner, *A martingale inequality for the empirical process*, Annals of Probab. **5** (1977), № 2, 303–308.
11. Н. Н.Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян, *Вероятностные распределения в банаховых пространствах*, "Наука", Москва, 1985.
12. А. В. Скороход, *Случайные процессы с независимыми приращениями*, "Наука", Москва, 1964.
13. Ж. Л. Кахан, *Случайные функциональные ряды*, "Мир", Москва, 1973.
14. І. К. Мацак, *Оцінки моментів супремума нормованих сум незалежних випадкових величин*, Теорія ймовірност. та мат. статист. **67** (2002), 104–116.

Кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: `d.i.m.@ukrpost.net`

Надійшла 15/01/2004