Теорія Ймовір. та матем. статист.
Вип. 72, 2005, стор. 93–100

Teor. Imovir. ta Matem. Statyst.
No. 72, 2005, pp. 93–100

ОЦІНКА ЙМОВІРНОСТЕЙ БАНКРУТСТВА ДЛЯ МОДЕЛЕЙ З ДОВГОСТРОКОВОЮ ЗАЛЕЖНІСТЮ

УДК 519.21

ЮЛІЯ МІШУРА

Анотація. Одержано оцінку ймовірності банкрутства для випадку, коли компанія інвестує в акцію, що є семімартингалом з абсолютно неперервними відносно міри Лебега характеристиками. Результат застосовано до моделей з довгостроковою залежністю, зокрема, до дробового броунівського руху та змішаних моделей.

1. Вступ

Розглянемо модель процесу ризику страхової компанії, активи якої складаються з двох компонент. Перша компонента — класична, вона дорівнює

$$R_1(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i,$$

де $x \geq 0$ — початковий резерв страхової компанії, $c \geq 0$ — постійна швидкість надходження страхових внесків, X_i, $i \geq 1$, — незалежні однаково розподілені випадкові величини (вони моделюють страхові виплати), N_t — пуассонівський процес, не залежний від X_i, з інтенсивністю λ. Друга компонента відповідає припущенню про те, що страхова компанія може інвестувати в акцію, ціна якої S_t є м.н. додатною і, в певному розумінні, допускає стохастичний диференціал, вигляд якого буде зумовлено далі. Компанія, безумовно, може інвестувати також і в облігацію зі сталою процентною ставкою, але для нашого підходу це несуттєво, тому припускаємо, що облігації нема. Позначимо $\hat{\varphi}_t$, $t \geq 0$, кількість грошей, яку страхова компанія в момент t вкладає в акцію, введемо фільтрацію

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left\{R_1(u), S_u, 0 \leq u \leq t\right\}$$

і будемо вважати, що $\hat{\varphi}_t$ — $\mathcal{F}_t$-передбачуваний процес, для якого, в певному сенсі, існує стохастичний інтеграл

$$R_2(t) = \int_0^t \hat{\varphi}_s \, dS_s, \qquad t \geq 0.$$

Конструкцію інтеграла будемо уточнювати окремо. Таким чином, капітал компанії дорівнює

$$Y(t, x, \hat{\varphi}) = R_1(t) + R_2(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i + \int_0^t \hat{\varphi}_s \, dS_s. \tag{1}$$

Далі зручніше замість $\hat{\varphi}_s$ розглядати процес $\varphi_s = \hat{\varphi}_s S_s$; якщо $\hat{\varphi}_s$ — $\mathcal{F}_s$-передбачуваний, а S_s — неперервний процес, то і φ_s — $\mathcal{F}_s$-передбачуваний процес. Відповідний капітал позначимо $Y(t, x, \varphi)$. Нашою метою є розгляд моделей акцій з довгостроковою залежністю і оцінки відповідних імовірностей банкрутства.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60H10, 91B30; Secondary 60G44, 60G15.

Роботу підтримано грантом PST.CLG.980408.

Частину 2 присвячено загальній семімартингальній моделі акції, компоненти якої мають абсолютно неперервні відносно міри Лебега характеристики. Знайдено оцінки ймовірності банкрутства і оптимальні стратегії φ_s, $s \geq 0$. Частковий випадок, коли акція описується геометричним броунівським рухом, тобто

$$dS_t = S_t(a\,dt + b\,dW_t),$$

розглянуто в роботі [1].

Частину 3 присвячено семімартингальним моделям акцій з довгостроковою залежністю. До них застосовуються результати частини 2.

Частина 4 описує ситуацію, коли акція моделюється процесами, що не є семімартингалами, наприклад, дробовим броунівським рухом (ДБР) або змішаним ДБР при деяких значеннях параметру Хюрста. Оскільки оптимальна стратегія в цих випадках — нульова, розглянуто апроксимації вказаних моделей, для яких вдається поліпшити оцінки ймовірності банкрутства в порівнянні з нульовою стратегією φ_s.

2. Оцінка ймовірності розорення і вибір оптимальної стратегії в загальній семімартингальній моделі

Розглянемо повний імовірнісний простір з фільтрацією

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathsf{P})$$

і припустимо, що всі процеси, які розглядаються, узгоджені з фільтрацією $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Нехай в формулі (1) акція

$$S = S_t, \qquad t \geq 0,$$

є семімартингалом вигляду

$$dS_t = S_t(dM_t + dA_t), \qquad t \geq 0, \tag{2}$$

де M_t — квадратично інтегрований неперервний мартингал, квадратична характеристика $\langle M\rangle_t$ якого є абсолютно неперервною відносно міри Лебега,

$$\langle M\rangle_t = \int_0^t \beta_s\,ds, \qquad \int_0^t |\beta_s|\,ds < \infty, \qquad t > 0, \quad \text{м.н.}$$

Нехай до того ж A_t — процес інтегрованої варіації,

$$A_t = \int_0^t \alpha_s\,ds, \qquad \int_0^t |\alpha_s|\,ds < \infty, \qquad t > 0, \quad \text{м.н.}$$

В принципі, всі результати цієї частини залишаються вірними, якщо вважати, що

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left\{M_s, A_s, N_s, R_1(s), 0 \leq s \leq t\right\}.$$

Далі, портфель, що відповідає $\mathcal{F}_s$-передбачуваній стратегії φ_s, має вигляд

$$\int_0^t \varphi_s\,dM_s + \int_0^t \varphi_s\,dA_s.$$

Нехай виконується умова

$$\mathsf{E}\int_0^t \varphi_s^2\beta_s\,ds < \infty, \qquad \int_0^t |\varphi_s\alpha_s|\,ds < \infty. \tag{A}$$

Тоді

$$\int_0^t \varphi_s\,dM_s$$

— інтеграл Іто відносно квадратично інтегрованого мартингала, і він сам є квадратично інтегрованим мартингалом;

$$\int_0^t \varphi_s\,dA_s$$

— інтеграл Лебега-Стілтьєса. Тепер весь портфель страхової компанії має вигляд

$$Y(t,x,\varphi) = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i + \int_0^t \varphi_s\,dM_s + \int_0^t \varphi_s\,dA_s. \tag{3}$$

Далі скрізь припускаємо, що процеси M, A, φ не залежать в сукупності від X_i, $i \geq 1$, та N.

Розглянемо додатний випадковий процес

$$Z(t,x,\varphi,r) = \exp\{-rY(t,x,\varphi)\}, \qquad r > 0,$$

та з'ясуємо умови, за яких $Z(\cdot,x,\varphi,r)$ буде мати супер- або субмартингальні властивості. Позначимо

$$h(r) = \mathsf{E}\exp\{rX_1\} - 1,$$

$$f(t,\varphi,r) = \lambda h(r) - cr + \frac{r^2}{2}\varphi_t^2\beta_t - r\varphi_t\alpha_t.$$

Теорема 1. *Нехай для деякого $r > 0$ і стратегії $\{\varphi_t, t \geq 0\}$ виконуються умови*

$$\begin{aligned} &1)\ \mathsf{E}\exp\{rX_1\} < \infty; \\ &2)\ f(t,\varphi,r) \leq 0, \quad t \geq 0, \ \text{м.н.}; \\ &3)\ \mathsf{E}\exp\left\{\frac{r^2}{2}\int_0^t \varphi_s^2\beta_s\,ds\right\} < \infty, \ t \geq 0. \end{aligned} \tag{B}$$

Тоді процес $\{Z(t,x,\varphi,r), t \geq 0\}$ — $\mathcal{F}_t$-супермартингал. Якщо в умові (B),2) *має місце рівність, то процес $\{Z(t,x,\varphi,r), t \geq 0\}$ — $\mathcal{F}_t$-мартингал.*

Доведення. Умова (B),3) — це умова Новікова, виконання якої забезпечує рівність

$$\mathsf{E}\exp\left\{-r\int_0^t \varphi_s\,dM_s - \frac{r^2}{2}\int_0^t \varphi_s^2\beta_s\,ds\right\} = 1, \qquad t \geq 0,$$

і при цьому процес

$$P_t := \exp\left\{-r\int_0^t \varphi_s\,dM_s - \frac{r^2}{2}\int_0^t \varphi_s^2\beta_s\,ds\right\}$$

є мартингалом. Далі, очевидно за умови (B),1),

$$\mathsf{E}\exp\left\{r\sum_{i=1}^{N_t} X_i\right\} = \exp\{\lambda h(r)t\}.$$

Звідси, з представлення (2), умови (B),2) і незалежності $\{X_i, i \geq 1, N\}$ та $\{M, A, \varphi\}$ випливає, що для будь-якого $t > 0$

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\,Z(t,0,\varphi,r) &= e^{-rct}\,\mathsf{E}\exp\left\{r\sum_{i=1}^{N_t} X_i\right\}\mathsf{E}\exp\left\{-r\int_0^t \varphi_s\,dM_s - r\int_0^t \varphi_s\alpha_s\,ds\right\} \\ &= \exp\{-rct + h(r)\lambda t\}\,\mathsf{E}\exp\left\{-r\int_0^t \varphi_s\,dM_s - \frac{r^2}{2}\int_0^t \varphi_s^2\beta_s\,ds\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{\frac{r^2}{2}\int_0^t \varphi_s^2\beta_s\,ds - r\int_0^t \varphi_s\alpha_s\,ds\right\} \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

тобто $Z(t,x,\varphi,r)$ — інтегрований процес. Тепер, для $0 \leq t_1 < t_2$, в силу незалежності

$$\sum_{i=N_{t_1}+1}^{N_{t_2}} X_i$$

від $\mathcal{F}_{t_1}$ та сукупності (M, A, φ), а також умов (B),2),3),

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left[Z(t_2,x,\varphi,r)/\mathcal{F}_{t_1}\right] \\
&\quad = Z(t_1,x,\varphi,r)\exp\{-rc(t_2-t_1)\} \\
&\qquad \times \mathsf{E}\Bigg[\exp\left\{-r\int_{t_1}^{t_2}\varphi_s\,dM_s - \frac{r^2}{2}\int_{t_1}^{t_2}\varphi_s^2\beta_s\,ds\right\} \\
&\qquad\qquad\qquad \times \exp\left\{\frac{r^2}{2}\int_{t_1}^{t_2}\varphi_s^2\beta_s\,ds - r\int_{t_1}^{t_2}\varphi_s^2\beta_s\,ds\right\}\Big/\mathcal{F}_{t_1}\Bigg] \\
&\quad = Z(t_1,x,\varphi,r) \\
&\qquad \times \mathsf{E}\left[\exp\left\{-r\int_{t_1}^{t_2}\varphi_s\,dM_s - \frac{r^2}{2}\int_{t_1}^{t_2}\varphi_s^2\beta_s\,ds\right\}\exp\left\{\int_{t_1}^{t_2}f(s,\varphi,r)ds\right\}\Big/\mathcal{F}_{t_1}\right] \\
&\quad \le Z(t_1,x,\varphi,r) \\
&\qquad \times \mathsf{E}\left[\exp\left\{-r\int_{t_1}^{t_2}\varphi_s\,dM_s - \frac{r^2}{2}\int_{t_1}^{t_2}\varphi_s^2\beta_s\,ds\right\}\Big/\mathcal{F}_{t_1}\right] = Z(t_1,x,\varphi,r). \quad \square
\end{aligned}$$

Зауваження 1. Як буде видно з подальших оцінок ймовірності розорення, параметр r треба вибирати найбільшим із можливих. Зокрема, доречно вибирати r більшим за (єдиний) корінь рівняння $\lambda h(r) = rc$, тому що оцінку, яка містить цей корінь, можна одержати при $\varphi_s \equiv 0$, тобто, не інвестуючи в акцію.

Уточнимо тепер вигляд стратегій $\{\varphi_s, s \ge 0\}$, для яких виконуються умови (B), 2) і 3), і з'ясуємо, яким є найбільше можливе значення параметра $r > 0$.

Теорема 2. *Нехай функції α та β задовольняють умови*

$$\begin{aligned}
&1)\ \beta(s) > 0,\ s \ge 0; \\
&2)\ \textit{існує } c_1 > 0 \textit{ таке, що } \operatorname*{ess\,inf}_{s\ge 0}\frac{\alpha_s^2}{2\beta_s} \ge c_1 \ \textit{м.н.},
\end{aligned} \tag{C}$$

де $\operatorname{ess\,inf}_{s\ge0} = \sup_{A:\,\lambda(A)=0}\inf_{s\in\mathbb{R}\setminus A}$, λ — *міра Лебега на* $\mathbb{R}_+$. *Тоді існує ненульова передбачувана стратегія* $\{\varphi_s, s \ge 0\}$, *що задовольняє умови* (B),2) *і* 3), *і при цьому можна покласти* $r = \hat r$, *де* $\hat r$ — *єдиний корінь рівняння* $\lambda h(r) = cr + c_1$.

Доведення. Спочатку задовольнимо умову (B), 2), тобто нерівність $f(t,\varphi,\hat r) \le 0$. Ця нерівність еквівалентна такій

$$\frac{\hat r^2}{2}\varphi_s^2\beta_s - \hat r\varphi_s\alpha_s + c_1 \le 0, \quad \text{де } c_1 = \lambda h(\hat r) - c\hat r. \tag{4}$$

Дискримінант лівої частини нерівності (3) дорівнює $D(s,\omega) = \hat r^2\alpha_s^2 - 2\hat r^2 c_1\beta_s \ge 0$ при $\alpha_s^2/\beta_s \ge c_1$. Отже, якщо $\operatorname{ess\,inf}_{s\ge0}\alpha_s^2/(2\beta_s) \ge c_1 > 0$, то $D(s,\omega) \ge 0$ (mod $\lambda \times \mathsf{P}$). Тоді виберемо

$$\varphi_s \in \left[\frac{\alpha_s - \sqrt{\alpha_s^2 - 2c_1\beta_s}}{\hat r\beta_s}, \frac{\alpha_s + \sqrt{\alpha_s^2 - 2c_1\beta_s}}{\hat r\beta_s}\right]$$

для тих s, де $D(s,\omega) \ge 0$ і $\varphi_s = 0$ в інших точках. При цьому умову (B), 2) буде виконано. Щоб задовольнити (B), 3), покладемо

$$\varphi_s = \frac{\alpha_s - \sqrt{\alpha_s^2 - 2c_1\beta_s}}{\hat r\beta_s} = \frac{2c_1}{\hat r(\alpha_s^2 - 2c_1\beta_s)}. \tag{5}$$

При цьому

$$\hat r\varphi_s\alpha_s - c_1 = \frac{2c_1\alpha_s}{\alpha_s + \sqrt{\alpha_s^2 - 2c_1}} - c_1 \le c_1,$$

і з нерівності (4)

$$\frac{\hat{r}^2}{2}\varphi_s^2\beta_s \le \hat{r}\varphi_s\beta_s - c_1 \le c_1,$$

звідки випливає умова (B), 3). □

Зауваження 2. Оскільки $h(0) = 0$ і функція $h(r)$ опукла вниз і зростає, то при $c_1 > 0$ рівняння $\lambda h(r) - cr = c_1$ має єдиний корінь $\hat{r} = \hat{r}(c_1)$, $\hat{r}(c_1)$ зростає по c_1. Як уже було відмічено в зауваженні 2, $\hat{r}$ треба буде вибирати щонайбільшим з можливих, тобто нас цікавить найбільше можливе значення c_1, що і зроблено в теоремі 2. Якщо $\operatorname{ess\,inf}_{s\ge 0} \alpha_s^2/(2\beta_s) = 0$ з додатною ймовірністю, то c_1, а тоді корінь $\hat{r} = \hat{r}(0)$ рівняння $\lambda h(\hat{r}) - c\hat{r} = 0$, що фігуруватиме далі в оцінці теореми 3, не дає додаткового "виграшу" в порівнянні з нульовою стратегією φ_s.

Нехай тепер $\tau_x^{\varphi} = \inf\{t > 0 \colon Y(t, x, \varphi) \le 0\}$ — момент банкрутства страхової компанії.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* (C) *теореми 2, стратегію φ_s обрано згідно з* (5). *Тоді має місце оцінка ймовірності банкрутства*

$$\mathsf{P}\{\tau_x^{\varphi} < \infty\} \le e^{-\hat{r}x},$$

де $\hat{r} = \hat{r}(c_1)$ — єдиний корінь рівняння $\lambda h(\hat{r}) = c\hat{r} + c_1$.

Зауваження 3. При $M_t = bW_t$ і $A_t = at$ ми одержуємо результат статті [1]:

$$\frac{d_s^2}{2\beta_s} = \frac{a^2}{2b^2},$$

і $\mathsf{P}\{\tau_x^{\varphi} < \infty\} = e^{-\hat{r}x}$, де $\hat{r}$ — єдиний корінь рівняння

$$\lambda h(r) = cr + \frac{a^2}{2b^2}, \qquad \varphi_s = \frac{\alpha_s}{\hat{r}\beta_s} = \frac{a}{\hat{r}b^2}.$$

Доведення. Позначимо $\widetilde{Z}(t, x, \varphi, \hat{r}) = Z(t \wedge \tau_x, x, \varphi, \hat{r})$. Згідно з теоремою 1, $\widetilde{Z}$ — супермартингал відносно фільтрації $(\mathcal{F}_t, t \ge 0)$. Тоді для $t \ge 0$

$$\begin{aligned}
e^{-\hat{r}x} &= \widetilde{Z}(0, x, \varphi, \hat{r}) \\
&\ge \mathsf{E}\,\widetilde{Z}(t, x, \varphi, \hat{r}) = \mathsf{E}\,Z(\tau_x, x, \varphi, \hat{r}) I\{\tau_x < t\} + \mathsf{E}\,Z(t, x, \varphi, \hat{r}) I\{\tau_x \ge t\} \\
&\ge \mathsf{E}\,Z(\tau_x, x, \varphi, \hat{r}) I\{\tau_x < t\}.
\end{aligned}$$

Але, $\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\,Z(\tau_x, x, \varphi, \hat{r}) I\{\tau_x < t\} = \mathsf{E}\,Z(\tau_x, x, \varphi, \hat{r}) I\{\tau_x < \infty\}$. Значить,

$$e^{-\hat{r}x} \ge \mathsf{E}\,[Z(\tau_x, x, \varphi, \hat{r})/\tau_x < \infty]\,\mathsf{P}\{\tau_x < \infty\},$$

звідки

$$\mathsf{P}\{\tau_x < \infty\} \le \frac{e^{-\hat{r}x}}{\mathsf{E}[Z(\tau_x, x, \varphi, \hat{r})/\tau_x < \infty]} \le e^{-\hat{r}x}. \quad \square$$

Зауваження 4. Цілком аналогічно до теорем 4 та 6 [1] можна довести наступний результат. Нехай випадкова величина X_1 задовольняє умову

$$p := \sup_{y\ge 0} \mathsf{E}\left[e^{-r(y-X_1)}/X_1 > y\right] < \infty, \tag{6}$$

а стратегію φ_s вибрано таким чином, що $\frac{1}{2}r^2\varphi_s^2\beta_s - r\varphi_s\alpha_s + \lambda h(r) - cr \ge 0$ для всіх $s \ge 0$ і деякого $r > 0$. Тоді процес $\widetilde{Z}(t, x, \varphi, r)$ буде рівномірно інтегрованим субмартингалом і $\mathsf{P}\{\tau_x^{\varphi} < \infty\} \ge Ce^{-rx}$, де $C = p^{-1} > 0$. В цьому розумінні умови (B), 2) і 3) визначають оптимальну стратегію. Крім того, якщо виконується нерівність (6), то при будь-якому виборі стратегії φ зупинений процес $\widetilde{Y}(t, x, \varphi) := Y(t \wedge \tau_x^{\varphi}, x, \varphi)$ збігається до ∞ на множині $\{\tau_x^{\varphi} = \infty\}$ при $t \to \infty$.

3. Оцінка ймовірності банкрутства для семімартингальних моделей з довгостроковою залежністю

3.1. Широкий клас процесів семімартингального типу з довгостроковою залежністю будується як згортка деякого гладкого ядра з вінерівським процесом. Дещо модифікуємо приклад таких процесів, розглянутий в [2], а саме, введемо процеси вигляду

$$R_t^\zeta = \int_0^t \zeta(t-s)\,dW_s, \qquad t \geq 0,$$

де W_t — вінерівський процес, $\zeta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\zeta(x) = 0$, $x < 0$, $\zeta(x) = \zeta(0) + \int_0^x \psi(y)\,dy$, $x \geq 0$, $\psi \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $\zeta(0) \neq 0$. Тоді

$$R_t^\zeta = \zeta(0)W_t + \int_0^t \int_0^s \psi(s-u)\,dW_u\,ds, \tag{7}$$

що доводиться за допомогою стохастичної теореми Фубіні. Представлення (7) — канонічне представлення семімартингала R_t^ζ з довгостроковою залежністю ([2]).

Нехай тепер зміна вартості акції описується рівнянням

$$dS_t = S_t\big(dR_t^\zeta + c_2\,dt\big), \quad \text{де } c_2 > 0. \tag{8}$$

Тоді, в термінах частини 1, $\alpha_s = \int_0^s \psi(s-u)\,dW_u + c$, $\beta_s = \zeta^2(0)$. Перевіримо тепер основну умову (C), 2): оскільки випадковий процес $\alpha_s = \int_0^s \psi(s-u)\,dW_u + c$ — гауссівський, то $\operatorname{ess\,inf}_{s\geq 0} \alpha^2(s)/(2\beta_s) = 0$ з додатною ймовірністю. Тобто, оптимальна стратегія φ_s в цьому випадку — нульова. Тепер дещо модифікуємо модель (8).

(а) Розглянемо замість α_s процес

$$\alpha_s^1 = \left(\int_0^s \psi(s-u)\,dW_u\right) \wedge (c_1 - c_2) + c_2,$$

де $c_1 > 0$ — деяка стала. Тоді, згідно з теоремами 2 та 3, $\mathsf{P}\{\tau_x^\varphi < \infty\} \leq e^{-\hat{r}x}$, де $\hat{r}$ — єдиний корінь рівняння

$$\lambda h(r) = cr + \frac{c_1^2}{2\zeta^2(0)},$$

а

$$\varphi_s = \frac{\alpha_s^1 - \sqrt{(\alpha_s^1)^2 - 2c_1\zeta^2(0)}}{\hat{r}\zeta^2(0)}.$$

(б) Розглянемо замість α_s випадковий процес $\alpha_s^2 = \int_0^s \psi(s-u)\,dB_u$, де B_s — неспадний процес, $B_0, \psi \geq 0$, і вказаний інтеграл існує для будь-якого $s \geq 0$. Наприклад, візьмемо

$$\alpha_s^2 = \int_0^s \psi(s-u)\,|W_u|\,du.$$

Очевидно, відповідний процес

$$R_t := \alpha W_t + \int_0^t \int_0^s \psi(s-u)|W_u|\,du\,ds, \qquad \alpha \neq 0,$$

є процес з довгостроковою залежністю, і якщо акція, аналогічно (8), змінюється за законом $dS_t = S_t(dR_t + c_3 dt)$, то $\mathsf{P}\{\tau_x^\varphi < \infty\} \leq e^{-\hat{r}x}$, $\hat{r}$ — єдиний корінь рівняння $\lambda h(r) = cr + c_3^2/(2\alpha^2)$.

3.2. Інший клас моделей акцій з довгостроковою пам'яттю — це змішані моделі вигляду

$$dS_t = S_t\left(d\mathrm{M}_t^{\beta,H} + \alpha\,dt\right),$$

де $\mathrm{M}_t^{\beta,H} = W_t + \beta W_t^H$, $\beta \neq 0$, W_t^H — незалежний від W_t дробовий броунівський рух з індексом Хюрста $H \in (\frac{1}{2}, 1)$, тобто гауссівський процес зі стаціонарними приростами.

$$W_0^H = 0, \qquad \mathsf{E} W_t^H = 0, \qquad \mathsf{E} W_t^H W_s^H = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

Саме при значенні індекса Хюрста $H > \frac{1}{2}$ процес W_t^H називають процесом з довгою пам'яттю, через те, що $\mathsf{E} W_t^H \left(W_{t+k}^H - W_k^H\right) \sim k^{2H-2}$, $t \to \infty$ і $\sum_{k=1}^{\infty} k^{2H-2} = \infty$. В цьому випадку $S_t = S_0 \exp\{W_t + \alpha W_t^H - \frac{1}{2}t\}$, $\mathsf{E} S_t^2 < \infty$, інтеграл

$$\int_0^t S_s \, d\mathrm{M}_s^{\beta,H} = \int_0^t S_s dW_s + \beta \int_0^t S_s \, dW_s^H,$$

де $\int_0^t S_s \, dW_s$ — стохастичний інтеграл Іто, квадратично інтегрований мартингал, $\int_0^t S_s \, dW_s^H$ існує потраєкторно як границя інтегральних сум Рімана–Стилтьєса ([3]).

Тепер, згідно з теоремами 4, 2 і 4.15 [2], для будь-якого $H \in (\frac{3}{4}, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ та $T > 0$ існує дійсне ядро Вольтерра $r = r(t,s) \in L^2[0,T]^2$ і вінерівський процес B_t, $t \in [0,T]$, на просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ такий, що B лінійно виражається через $\mathrm{M}^{H,\beta}$ і не залежить від $(N, X_i, i \geq 1)$, і

$$\mathrm{M}^{H,\beta} = B_t + \int_0^t \int_0^s r(s,u) \, dB_u \, ds.$$

Тобто, в цьому випадку ми знов приходимо до моделі, аналогічної п. 3.1. Подальші рекомендації повторюють з очевидними відмінностями випадки (а) та (б) з п. 3.1.

4. Дробова броунівська та змішана моделі акції несемімартингального типу

Розглянемо спочатку акцію вигляду

$$dS_t = S_t \left(b \, dW_t^H + a \, dt\right), \qquad H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Тоді $S_t = S_0 \exp\{at + b W_t^H\}$. Незважаючи на те, що ця модель допускає арбітраж [2, 4], арбітражні стратегії, наведені в цих роботах, лише приводять до нерівності

$$\int_0^t \varphi_s \left(a \, ds + b dW_s^H\right) \geq 0 \quad \text{м.н.},$$

але це не дає ніякого виграшу в оцінці ймовірності банкрутства в порівнянні зі стратегією $\varphi_s \equiv 0$. Ті самі міркування стосуються і змішаної моделі

$$dS_t = S_t \left(b_1 \, dW_t + b_2 \, dW_t^H + a \, dt\right),$$

яка не є семімартингалом при $b_2 \neq 0$ і $H \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$. Тому розглянемо наступну апроксимацію процесу W_t^H. Згідно з [4], подамо процес W_t^H у вигляді

$$W_t^H = \int_0^t s^{H-1/2} \, dY_s, \tag{9}$$

де

$$Y_t = c_H \int_0^t (t-s)^{H-1/2} s^{1/2-H} \, dW_s = c_H \int_0^t \left[\int_s^t (u-s)^{H-3/2} \, du\right] s^{1/2-H} \, dW_s,$$

$c_H > 0$ — стала. Якщо формально застосувати до правої частини (9) теорему Фубіні, то одержимо

$$Y_t = c_H \int_0^t \left[\int_0^u (u-s)^{H-3/2} s^{1/2-H} \, dW_s\right] du,$$

але внутрішній інтеграл в останній рівності не існує, оскільки

$$\int_0^u (u-s)^{2H-3} s^{1-2H}\, ds = \infty.$$

Тому розглянемо наступну апроксимацію при $0 < \alpha < 1$:

$$Y_t^\alpha = c_H \int_0^t \left[\int_0^{\alpha u} (u-s)^{H-3/2} s^{1/2-H}\, dW_s \right] du.$$

Тоді

$$W_t^{H,\alpha} := \int_0^t s^{H-1/2}\, dY_s^\alpha = c_H \int_0^t s^{H-1/2} \int_0^{\alpha s} (s-v)^{H-3/2} v^{1/2-H}\, dW_v\, ds$$

буде апроксимацією дробового броунівського руху: $\mathsf{E}(W_t^H - W_t^{H,\alpha})^2 \to 0$, $\alpha \to 1$.

Розглянемо модель акції

$$dS_t = S_t \left(b\, dW_t^{H,\alpha} + c_4\, dt \right).$$

Оскільки $W_t^{H,\alpha}$ є неперервним процесом обмеженої варіації, то утворимо стратегію

$$\varphi_t^K = K t^{1/2-H} \left(\int_0^{\alpha t} (t-z)^{H-3/2} z^{1/2-H}\, dW_z + c_4 \right)^{-1} \times I\left\{ \int_0^{\alpha t} (t-z)^{H-3/2} z^{1/2-H}\, dW_z + c_4 \neq 0 \right\}, \qquad K > 0.$$

Тоді процес ризику набуває простого вигляду

$$Y(t,x,\varphi) = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i + Kt,$$

звідки

$$\mathsf{P}\{\tau_x^\varphi < \infty\} \le e^{-\hat{r}(K)x},$$

де $\hat{r}(K)$ — єдиний корінь рівняння $\lambda h(r) = (c+K)r$. Оскільки $K > 0$ — будь-яке число і при $K \to \infty$

$$\hat{r}(K) \to \infty \quad \text{і} \quad \mathsf{P}\{\tau_x^\varphi < \infty\} \to 0.$$

У випадку змішаної моделі поліпшити оцінку ймовірності розорення можна, розглянувши таку апроксимацію

$$dS_t = S_t \left(b_1\, dW_t + b_2\, dW_t^{H,\alpha} + c\, dt \right),$$

а далі застосувати міркування п. 3.1 до суми $b_2\, dW_t^{H,\alpha} + c\, dt$.

Література

1. I. Gaier, P. Grandits, and W. Schachermayer, *Asymptotic ruin probabilities and optimal investment*, Ann. Appl. Probab. **13** (2003), № 3, 1054–1076.
2. P. Cheridito, *Regularizing Fractional Brownian Motion With a View Towards Stock Price Modelling*, PhD Thesis, ETH, Zürich, 2001.
3. M. Zaehle, *Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus I*, Prob. Theory Related Fields **111** (1998), 333–374.
4. I. Norros, E. Valkeila, and J. Virtamo, *An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions*, Bernoulli **5** (1999), № 4, 571–587.
5. A. N. Shiryaev, *On arbitrage and replication for fractal models*, Research Report, т. 20, MaPhySto, 1998.

Кафедра теорії ймовірностей і математичної статистики, механіко-математичний факультет, Київський Національний университет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, 01033 Київ

Адреса електронної пошти: myus@univ.kiev.ua

Надійшла 12/03/2004