Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 72, 2005, стор. 150–157

Theor. Imovir. ta Matem. Statyst.
No. 72, 2005, pp. 150–157

ПРО ЕЙЛЕРОВІ АПРОКСИМАЦІЇ КВАЗІЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З УПЕРЕДЖЕННЯМ

УДК 519.21

ГЕОРГІЙ ШЕВЧЕНКО

Анотація. Отримано швидкість збіжності апроксимацій типу Ейлера для квазілінійного упереджуючого стохастичного диференціального рівняння з інтегралом по білому шуму.

Вступ

Стохастичні диференціальні рівняння з упередженням мають чисельні застосування. Типовим прикладом застосування є моделювання фінансового ринку, на якому є інформований агент ("інсайдер"), який володіє частковою інформацією про подальшу еволюцію цін. Тому виникає необхідність вміти розв'язувати, хоча б наближено, такі рівняння. Як відомо, є кілька варіантів узагальнення інтегралу Іто на упереджуючі інтегранди. Для потраєкторних інтегралів (прямого стохастичного інтегралу, інтегралу Стратоновича) алгоритм отримання наближеного розв'язку досить прозорий: достатньо стандартними методами наблизити потік, породжений неупереджуючим рівнянням, і підставити в нього наближення початкового значення; результати про збіжність апроксимацій для інтегралу Стратоновича отримані у [1, 2]. Прямий інтеграл можна також визначити за допомогою розширення фільтрації, зводячи його до інтегралу по семімартингалу; наближенням рівнянь з семімартингалами присвячено статтю [5]. Ситуація є складнішою з інтегралом Скорохода (або, що фактично те саме, з інтегралом по білому шуму), який не має потраєкторної властивості і не є неперервним оператором в жодному $\mathcal{L}^p$. Це змушує, окрім звичайної дискретизації часу в рівнянні, робити зсув по ω на кожному кроці апроксимації.

1. Апроксимації розв'язку, отриманого варіацією сталих

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathcal{S}'(\mathbb{R})), \mu)$ — стандартний простір білого шуму, $\cdot \diamond \cdot$ — добуток Віка,

$$B(t) = \langle \omega, \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle$$

— вінерівський процес (броунівський рух), $W(t) = \dot{B}(t)$ — білий шум, $D_t F(\omega)$ — стохастична похідна. Визначимо також для $h\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ оператор зсуву

$$T_h F(\omega) = F(\omega + h).$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60H05; Secondary 60H07, 60H40, 60-08.

Ключові слова і фрази. Стохастичне диференціальне рівняння, інтеграл по білому шуму, апроксимації Ейлера, метод splitting-up.

Цю роботу частково підтримано грантом INTAS YS 03-55-2447.

Детально про визначення простору білого шуму можна прочитати у [3, Глава 1]. Всі несуттєві сталі будемо позначати C. Розглянемо квазілінійне стохастичне диференціальне рівняння на відрізку $[0,T]$

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(s, X(s), \omega)\, ds + \int_0^t \sigma(s) X(s) \diamond W(s)\, ds, \tag{1.1}$$

де $X_0 \in \mathbb{R}$, σ — певна обмежена невипадкова дійсна функція, $b(s,x,\omega)$ — взагалі кажучи, упереджуюча випадкова функція. Ми хочемо побудувати апроксимації даного рівняння з дискретним часом, на кшталт ейлерівських. Найприродніший, на перший погляд, шлях — для натурального N визначити $\delta = T/N$, розглянути рівномірне розбиття $\tau_n = n\delta$, $n = 0,\dots,N$, відрізку $[0,T]$ і побудувати апроксимації рекурентно наступним чином:

$$\widetilde{X}(0) = X(0), \qquad \widetilde{X}(\tau_{n+1}) = \widetilde{X}(\tau_n) + b\big(t, \widetilde{X}(\tau_n), \omega\big)\delta + \sigma(s)\widetilde{X}(\tau)_n \diamond \Delta B_n, \tag{1.2}$$

де $\Delta B_n = B(\tau_{n+1}) - B(\tau_n)$. Але, по-перше, виникають проблеми з обчисленням добутку Віка у правій частині. По-друге, якщо навіть нам вдасться його якось апроксимувати, використовуючи рівність

$$F \diamond \Delta B_n = F \cdot \Delta B_n - \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} D_s F\, ds,$$

то при спробі доведення збіжності апроксимацій (1.2) виникнуть проблеми з оцінюванням стохастичного інтегралу, який зараз не є обмеженим в жодному $\mathcal{L}^p$ (і, зрозуміло, виводить з $\mathcal{L}^p$). Отже, цей найприродніший шлях веде до багатьох труднощів. Розглянемо інші можливі підходи до чисельного розв'язання цього рівняння.

2. Наближення для зведеного невипадкового рівняння

Перший підхід полягає у тому, що відома формула Г'єссінга (див., наприклад, [3, Теорема 2.10.7]) дозволяє виключити з рівняння (1.1) стохастичний інтеграл, звівши його таким чином до звичайного потраєкторного диференціального рівняння. Більш детально, позначимо

$$J_\sigma(t) = \exp^\diamond\left\{-\int_0^t \sigma(s)\, dB(s)\right\} = \exp\left\{-\int_0^t \sigma(s)\, dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)\, ds\right\}$$

експоненту Віка, $\sigma_t = \sigma\, \mathbb{1}_{[0,t]}$ і визначимо

$$Z(t) = J_\sigma(t) \diamond X(t) = J_\sigma(t) T_{\sigma_t} X(t).$$

Тоді $Z(t)$ задовольняє звичайне диференціальне рівняння

$$Z(t) = X_0 + \int_0^t J_\sigma(s) b\left(s, J_\sigma^{-1}(s) Z(s), \omega + \sigma_s\right)\, ds. \tag{2.1}$$

Тепер дискретизуємо час в цьому рівнянні аналогічно до (1.2), тобто визначимо апроксимації рекурентно наступним чином:

$$\widetilde{Z}(0) = X_0, \qquad \widetilde{Z}(\tau_{n+1}) = \widetilde{Z}(\tau_n) + J_{\widetilde{\sigma}}(\tau_n) b\big(\tau_n, J_{\widetilde{\sigma}}^{-1}(\tau_n)\widetilde{Z}(\tau_n), \omega + \widetilde{\sigma}_n\big)\delta, \tag{2.2}$$

де $\widetilde{\sigma}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{\sigma}^k$, $\widetilde{\sigma}^k = \sigma(\tau_k)\, \mathbb{1}_{[\tau_k, \tau_{k+1}]}$, $\widetilde{\sigma} = \widetilde{\sigma}_N$. Позначивши $n_s = \min\{n \colon \tau_n \le s\}$, $t_s = \tau_{n_s}$, зробимо неперервну інтерполяцію (2.2):

$$\widetilde{Z}(t) = X_0 + \int_0^t J_{\widetilde{\sigma}}(t_s) b\big(t_s, J_{\widetilde{\sigma}}^{-1}(t_s)\widetilde{Z}(t_s), \omega + \widetilde{\sigma}_{n_s}\big)\, ds. \tag{2.3}$$

Апроксимації для вихідного рівняння визначимо як

$$\widetilde{X}(t) = J_{-\widetilde{\sigma}}(t) \diamond \widetilde{Z}(t) = J_{-\widetilde{\sigma}}(t) T_{-\widetilde{\sigma}\, \mathbb{1}_{[0,t]}} \widetilde{Z}(t). \tag{2.4}$$

Сформулюємо умови на коефіцієнти, потрібні для збіжності апроксимацій.

(1) коефіцієнт b задовольняє умову лінійного росту за x і має обмежену похідну b'_x:

$$|b(t,x,\omega)| \le C(1+|x|),\qquad |b'_x(t,x,\omega)| \le C; \tag{2.5a}$$

(2) коефіцієнт b стохастично диференційовний і його похідна має лінійний рост за x:

$$|D_s b(t,x,\omega)| \le C(1+|x|); \tag{2.5b}$$

(3) коефіцієнт b задовольняє умову Гельдера за t з показником $\frac{1}{2}$ і константою, що має лінійний рост за x:

$$|b(t,x,\omega) - b(s,x,\omega)| \le C(1+|x|)\,|t-s|^{1/2}; \tag{2.5c}$$

(4) коефіцієнт σ задовольняє умову Гельдера з показником $\frac{1}{2}$:

$$|\sigma(t) - \sigma(s)| \le C\,|t-s|^{1/2}. \tag{2.5d}$$

Зауважимо, що виконання умови (2.5a) і обмеженість σ гарантує існування розв'язку (1.1), причому цей розв'язок належить всім $\mathcal{L}^p$, $p > 1$ (див. [3, Теорема 3.6.1]). Для того, щоб сформулювати основний результат цього розділу, доведемо спочатку допоміжні результати.

Лема 2.1. *За припущення* (2.5d) *при* $p \ge 1$ *маємо оцінку*

$$\mathsf{E}\left[(J_{\pm\sigma}(s) - J_{\pm\bar\sigma}(t_s))^{2p}\right] \le C\delta^p.$$

Доведення. Дана оцінка випливає з того, що $J_{\pm\sigma}(s)$ є розв'язком СДР

$$dJ_{\pm\sigma}(s) = \pm\sigma(s)J_{\pm\sigma}(s)dB(s),$$

а $J_{\pm\bar\sigma}(s)$ є наближенням Ейлера для цього рівняння, а також з елементарних властивостей розв'язку цього рівняння (див., наприклад, [4]). □

Лема 2.2. *За умови* (2.5b) *для будь-якого* $h \in \mathcal{L}^1[0,T]$ *справедлива оцінка*

$$|b(t,x,\omega) - b(t,x,\omega+h)| \le C(1+|x|)\int_0^T |h(s)|\,ds.$$

Доведення. Запишемо

$$b(t,x,\omega) - b(t,x,\omega+h) = \int_0^T\int_0^1 D_t b(t,x,\omega+sh)h(t)\,ds\,dt,$$

і, враховуючи припущення (2.5b), одержуємо бажану оцінку. □

Лема 2.3. *За умови* (2.5a) *має місце оцінка*

$$\left|e^{\alpha_1}b(t,e^{-\alpha_1}x,\omega) - e^{\alpha_2}b(t,e^{-\alpha_2}x,\omega)\right| \le C(1+e^{\alpha_1}+e^{\alpha_2}+|x|)\,|\alpha_1-\alpha_2|.$$

Доведення. Безпосередньо випливає з теореми Лагранжа про скінченний приріст і припущення (2.5a). □

Лема 2.4. *За припущень* (2.5) *для будь-якого* $p \ge 1$ *справедлива оцінка*

$$\mathsf{E}\left[\left(Z(t) - \widetilde{Z}(t)\right)^{2p}\right] \le C_p\delta^p.$$

Доведення. Спочатку зазначимо, що згідно з [3, Теорема 3.6.1] $Z(t)$ і $X(t)$ належать всім $\mathcal{L}^p$, причому $\mathsf{E}\left[|Z(t)|^p\right]$, $\mathsf{E}\left[|X(t)|^p\right]$ обмежені за t. Тоді з рівняння (2.1) і умови (2.5a) очевидно, що

$$\mathsf{E}\left[\left(Z(t) - Z(s)\right)^{2p}\right] \le C_p\,|t-s|^{2p}. \tag{2.6}$$

Далі, з формули (2.2) і умови (2.5a) маємо

$$\left|\widetilde{Z}(\tau_{n+1})\right| \le (1+C\delta) \le e^{C\delta}\left|\widetilde{Z}(\tau_n)\right|,$$

звідки $\mathsf{E}\big[\widetilde{Z}^{2p}(\tau_n)\big] \le C_p$, тоді з рівняння (2.3) маємо

$$\mathsf{E}\big[\widetilde{Z}^{2p}(t)\big] \le C_p.$$

Тепер оцінимо

$$\left|Z(t) - \widetilde{Z}(t)\right| \le A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5,$$

де

$$A_1 = \left|\int_0^t J_{\tilde{\sigma}}(t_s)\big(b(t_s, J_{\tilde{\sigma}}^{-1}(t_s)Z(t_s), \omega + \tilde{\sigma}_{n_s}) - b(t_s, J_{\tilde{\sigma}}^{-1}(t_s)\widetilde{Z}(t_s), \omega + \tilde{\sigma}_{n_s})\big)\, ds\right|,$$

$$A_2 = \left|\int_0^t \big(J_{\tilde{\sigma}}(t_s) b(t_s, J_{\tilde{\sigma}}^{-1}(t_s)Z(t_s), \omega + \tilde{\sigma}_{n_s}) - J_\sigma(s) b(t_s, J_\sigma^{-1}(s)Z(t_s), \omega + \tilde{\sigma}_{n_s})\big)\, ds\right|,$$

$$A_3 = \left|\int_0^t J_\sigma(s)\big(b(s, J_\sigma^{-1}(s)Z(t_s), \omega + \tilde{\sigma}_{n_s}) - b(t_s, J_\sigma^{-1}(s)Z(t_s), \omega + \tilde{\sigma}_{n_s})\big)\, ds\right|,$$

$$A_4 = \left|\int_0^t J_\sigma(s)\big(b(s, J_\sigma^{-1}(s)Z(t_s), \omega + \tilde{\sigma}_{n_s}) - b(s, J_\sigma^{-1}(s)Z(t_s), \omega + \sigma_t)\big)\, ds\right|,$$

$$A_5 = \left|\int_0^t J_\sigma(s)\big(b(s, J_\sigma^{-1}(s)Z(s), \omega + \sigma_t) - b(s, J_\sigma^{-1}(s)Z(t_s), \omega + \sigma_t)\big)\, ds\right|.$$

З леми (2.3) маємо

$$\begin{aligned}
A_2 &\le C\int_0^t \big(1 + J_\sigma(s) + J_{\tilde{\sigma}}(t_s) + |Z(t_s)|\big)\left(\left|\int_0^s (\sigma(u) - \tilde{\sigma}(u))\, dB(u)\right|\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \left|\sigma(t_s)(B(s) - B(t_s))\right| + \frac{1}{2}\int_0^s \left|\sigma^2(u) - \tilde{\sigma}^2(u)\right|\, du\right) ds\\
&\le C\int_0^t \big(1 + J_\sigma(s) + J_{\tilde{\sigma}}(t_s) + |Z(t_s)|\, ds\big)\\
&\qquad\qquad \times\left(\left|\int_0^s (\sigma(u) - \tilde{\sigma}(u))\, dB(u)\right| + |B(s) - B(t_s)| + \delta^{1/2}\right) ds.
\end{aligned}$$

Далі, використовуючи умову (2.5d), маємо

$$A_3 \le C\int_0^t \big(J_\sigma(s) + |Z(t_s)|\big)\, ds\, \delta^{1/2},$$

з леми 2.2 здобуваємо оцінку

$$A_4 \le C\int_0^t \big(J_\sigma(s) + |Z(t_s)|\big)\, ds\, \delta^{1/2}.$$

Вирази A_1 і A_5 оцінюємо, користуючись обмеженістю b'_x:

$$A_1 \le C\int_0^t \left|Z(t_s) - \widetilde{Z}(t_s)\right|\, ds,$$

$$A_5 \le C\int_0^t |Z(s) - Z(t_s)|\, ds.$$

Тоді лема Гронуолла дає

$$\begin{aligned}
\left|Z(t) - \widetilde{Z}(t)\right| &\le C\int_0^T |Z(s) - Z(t_s)|\, ds\\
&\qquad + C\int_0^t \big(1 + J_\sigma(s) + J_{\tilde{\sigma}}(t_s) + |Z(t_s)|\big)\\
&\qquad\qquad \times\left(\left|\int_0^s (\sigma(u) - \tilde{\sigma}(u))\, dB(u)\right| + |B(s) - B(t_s)| + \delta^{1/2}\right)\, ds.
\end{aligned}$$

Піднесши до степеня $2p$, взявши математичне сподівання, використовуючи нерівності Іенсена, Гельдера та Коші–Буняковського, а також обмеженість моментів Z, J_σ, $J_{\tilde\sigma}$ і оцінку (2.6), отримаємо

$$\mathsf{E}\left[\left(Z(t)-\widetilde{Z}(t)\right)^{2p}\right] \le C_p\left(\delta^p + \int_0^T \mathsf{E}\left[\left(\int_0^s (\sigma(u)-\sigma(t_u))\,dB(u)\right)^{2p}\right] ds + \delta^p\right)$$
$$\le C_p\left(\delta^p + \int_0^T \left(\int_0^s (\sigma(u)-\sigma(t_u))^2\,du\right)^p ds\right) \le C_p\delta^p,$$

що і потрібно довести. □

Сформулюємо тепер основний результат.

Теорема 2.5. *Нехай виконані умови* (2.5). *Тоді апроксимації* $\widetilde{X}$, *що визначені рівністю* (2.4), *збігаються до розв'язку* X *рівняння* (1.1) *у середньому квадратичному, причому порядок збіжності дорівнює* $\frac{1}{2}$:

$$\mathsf{E}\left[\left(X(t)-\widetilde{X}(t)\right)^2\right] \le C\delta.$$

Доведення. Оцінимо спочатку

$$|T_hZ(t)-Z(t)| \le A_1+A_2+A_3,$$

$$A_1 = \int_0^t T_hJ_\sigma(s)\left|b(s,(T_hJ_\sigma^{-1})T_hZ(s),\omega+h+\sigma_s)-b(s,(T_hJ_\sigma^{-1})Z(s),\omega+h+\sigma_s)\right| ds,$$

$$A_2 = \int_0^t T_hJ_\sigma(s)\left|b(s,(T_hJ_\sigma^{-1})Z(s),\omega+h+\sigma_s)-b(t,(T_hJ_\sigma^{-1}(s))Z(s),\omega+\sigma_s)\right| ds,$$

$$A_3 = \int_0^t \left|T_hJ_\sigma(s)b(t,(T_hJ_\sigma^{-1}(s))Z(s),\omega+\sigma_s)-J_\sigma(s)b(t,J_\sigma^{-1}(s)Z(s),\omega+\sigma_s)\right| ds.$$

З умови (2.5а) маємо $A_1 \le C\int_0^t |T_hZ(s)-Z(s)|\,ds$, з леми 2.2

$$A_2 \le C\int_0^T (T_hJ_\sigma(s)+|Z(s)|)\,ds \int_{\mathbb{R}} |h(s)|\,ds,$$

з леми 2.3

$$A_3 \le C\int_0^T (1+T_hJ_\sigma(s)+J_\sigma(s)+|Z(s)|)\left|\int_0^s h(u)\sigma(u)\,du\right| ds.$$

Застосувавши лему Гронуолла, отримаємо

$$|T_hZ(t)-Z(t)| \le C\int_0^T (1+T_hJ_\sigma(s)+J_\sigma(s)+|Z(s)|)\left(|h(s)|+\left|\int_0^s h(u)\,dB(u)\right|\right) ds.$$

Піднесши цю нерівність до $2p$-го степеня ($p\ge 1$), взявши математичне сподівання і використавши нерівність Гельдера і обмеженість моментів Z та J_σ, приходимо до

$$\mathsf{E}\left[\left(T_hZ(t)-Z(t)\right)^{2p}\right] \le C_p\int_0^T |h|^{2p}(s)\,ds.$$

Оцінимо тепер

$$\mathsf{E}\left[\left(X(t)-\widetilde{X}(t)\right)^2\right] \le 3\Big(\mathsf{E}\left[\left(J_{-\tilde\sigma}(t)T_{-\tilde\sigma\,\mathbf{1}_{[0,t]}}(Z(t)-\widetilde{Z}(t))\right)^2\right]$$
$$+\mathsf{E}\left[\left((J_{-\sigma}(t)-J_{-\tilde\sigma}(t))T_{-\tilde\sigma\,\mathbf{1}_{[0,t]}}Z(t)\right)^2\right]$$
$$+\mathsf{E}\left[\left(J_{-\sigma}(t)(T_{\sigma_t}-T_{\tilde\sigma\,\mathbf{1}_{[0,t]}})Z(t)\right)^2\right]\Big).$$

Для оцінки кожного з доданків двічі використаємо нерівність Коші–Буняковського і потім у першому скористаємося лемою 2.4, у другому — лемою 2.1, теоремою Гірсанова й обмеженістю моментів Z, у третьому — теоремою Гірсанова й отриманою вище оцінкою і матимемо бажану нерівність. □

3. Наближення для розв'язку, побудовані аналогом методу "splitting-up"

Наведемо нестрогі міркування, що приводять до іншої конструкції апроксимацій. Припустимо, що в рівняння (1.1) існує єдиний стохастично диференційовний розв'язок, стохастична похідна якого інтегровна з квадратом. З цього, зокрема, випливає, що інтеграл по білому шуму у правій частині (1.1) співпадає з інтегралом Скорохода, який за відомою формулою можна обчислити як

$$\int_0^t \sigma(s)X(s)\diamond W(s)\,ds = \int_0^t \sigma(s)X(s)\,d^-B(s) - \int_0^t \sigma(s)D_s^-X(s)\,ds,$$

де $\int \dots d^-B(s)$ — прямий стохастичний інтеграл, $D_s^-X(s) = \lim_{\varepsilon\to 0+} D_sX(s-\varepsilon)$ (див., наприклад, [6, Розділ 3.1]). Таким чином, ми приходимо до рівняння

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(s,X(s),\omega) + \int_0^t \sigma(s)X(s)\,d^-B(s) - \int_0^t \sigma(s)D_s^-X(s)\,ds, \tag{3.1}$$

яке можна розглядати як диференціальне рівняння з необмеженим лінійним оператором $A(s) = -\sigma(s)D_s$ у правій частині. Цей оператор породжує еволюційну сім'ю зсувів на $L_p(\Omega)$:

$$U(t,s)F(\omega) = F\left(\omega - \sigma(\cdot)\,1\!\!1_{[s,t]}(\cdot)\right) = T_{-\sigma\,1\!\!1_{[s,t]}}F(\omega).$$

Отже, отримуємо наступне рівняння, аналогічне до формули варіації сталих

$$X(t) = X_0 + \int_0^t U(t,s)b(s,X(s),\omega)\,ds + \int_0^t U(t,s)\sigma(s)X(s)\,d^-B(s), \tag{3.2}$$

яке можна перевірити диференціюванням. Зауважимо, що прямий стохастичний інтеграл $\int f(s)\,d^-B(s)$ є за певних припущень границею прямих інтегральних сум $\sum f(s_i)(s_{i+1}-s_i)$, і це наштовхує на ідею побудувати апроксимації рівняння (1.1) рекурентно наступним чином:

$$\begin{gathered} X^\delta(0) = 0, \\ X^\delta(\tau_{n+1}) = U^\delta(\tau_{n+1},\tau_n)\left[X^\delta(\tau_n) + b(\tau_n, X^\delta(\tau_n),\omega)\delta + \sigma(\tau_n)\Delta B_n\right], \end{gathered} \tag{3.3}$$

де $U^\delta(\tau_{n+1},\tau_n)F(\omega) = F(\omega - \widetilde{\sigma}^n)(\cdot))$.

Зауваження 3.1. Дані апроксимації можна розглядати як аналог відомого для наближеного розв'язання звичайних диференціальних рівнянь методу "splitting-up". Спочатку рівняння (3.1) розбивається на два:

$$dX_1(t) = a(t,X_1(t))\,dt + b(t,X_1(t),\omega)\,d^-B(t),$$

$$dX_2(t) = \sigma(t)D_t^-X_2(t)\,dt.$$

Далі діємо рекурентно: покладаємо $X^\delta(0) = X_0$; апроксимацію $X^\delta(\tau_n)$ розв'язку в n-му вузлі розбиття беремо за початкове значення для першого рівняння і розв'язуємо його наближено на відрізку $[\tau_n,\tau_{n+1}]$

$$X_1^\delta(\tau_{n+1}) = X^\delta(\tau_n) + b(\tau_n, X^\delta(\tau_n),\omega)\delta + b(\tau_n, X^\delta(\tau_n))\Delta B_n,$$

потім отримане значення беремо як початкову умову для другого рівняння, яке також розв'язуємо наближено, вважаючи функцію σ сталою на $[\tau_n,\tau_{n+1}]$:

$$X^\delta(\tau_{n+1}) = X_2^\delta(\tau_{n+1}) = U^\delta(\tau_{n+1},\tau_n)X_1^\delta(\tau_{n+1}).$$

Перепишемо (3.3) в іншому вигляді:

$$X^\delta(\tau_{n+1}) = T_{-\tilde{\sigma}^n}\left[X^\delta(\tau_n) + b(\tau_n, X^\delta(\tau_n), \omega)\delta + \sigma(\tau_n)X^\delta(\tau_n)\Delta B_n\right]. \tag{3.4}$$

Визначимо тепер по аналогії до попереднього

$$Z^\delta(\tau_n) = J_{\tilde{\sigma}}(\tau_n) \diamondsuit X^\delta(\tau_n).$$

Використовуючи формулу Г'ессінга [3, Теорема 2.10.7], легко переконатися у тому, що

$$\begin{aligned}Z^\delta(\tau_{n+1}) &= J_{\tilde{\sigma}^n}(\tau_{n+1})Z^\delta(\tau_n)\\ &+ J_{\tilde{\sigma}^n}(\tau_{n+1})J_{\tilde{\sigma}}(\tau_n)T_{\tilde{\sigma}_n}\big(b(\tau_n, X^\delta(\tau_n), \omega)\delta + \sigma(\tau_n)X^\delta(\tau_n)\Delta B_n\big),\end{aligned}$$

після елементарних перетворень приходимо до

$$\begin{aligned}Z^\delta(\tau_{n+1}) &= J_{\tilde{\sigma}^n}(\tau_{n+1})Z^\delta(\tau_n)\big(1 + \sigma(\tau_n)\Delta B_n\big)\\ &+ J_{\tilde{\sigma}}(\tau_{n+1})b\big(\tau_n, J_{\tilde{\sigma}}^{-1}(\tau_n)Z^\delta(\tau_n), \omega + \tilde{\sigma}_n\big)\delta,\end{aligned} \tag{3.5}$$

що вже схоже на (2.2). Зробимо неперервну інтерполяцію Z^δ, тобто для $t \in [\tau_n, \tau_{n+1}]$ покладемо

$$\begin{aligned}Z^\delta(t) &= J_{\tilde{\sigma}^n}(t)Z^\delta(\tau_n)\big(1 + \sigma(\tau_n)(B(t) - B(\tau_n))\big)\\ &+ J_{\tilde{\sigma}}(t)b\big(\tau_n, J_{\tilde{\sigma}}^{-1}(\tau_n)Z^\delta(\tau_n), \omega + \tilde{\sigma}_n\big)(t - \tau_n).\end{aligned} \tag{3.6}$$

Інтерполяція X^δ робиться очевидним чином. Ми готові сформулювати основний результат цього розділу.

Теорема 3.2. *Нехай виконані умови* (2.5). *Тоді апроксимації* X^δ, *визначені* (3.4), *збігаються до розв'язку* X *рівняння* (1.1), *причому*

$$\mathsf{E}\left[\big(X(t) - X^\delta(t)\big)^2\right] \le C\delta.$$

Доведення. Як і в попередній теоремі, легко переконатися в тому, що достатньо довести оцінку $\mathsf{E}\left[(Z(t) - Z^\delta(t))^{2p}\right] \le C_p\delta^p$, яка, завдяки лемі 2.4, випливатиме з нерівності $\mathsf{E}\left[(\widetilde{Z}(t) - Z^\delta(t))^{2p}\right] \le C_p\delta^p$. З рівності (3.5) легко отримуємо

$$\left|Z^\delta(\tau_{n+1})\right| \le J_{\tilde{\sigma}^n}(\tau_{n+1})\big(|1 + \sigma(\tau_n)\Delta B_n| + C\delta\big)\left|Z^\delta(\tau_n)\right|,$$

звідки для $q \ge 1$, використовуючи нерівність

$$(x + \delta)^{2q} \le (1 + \delta)^{2q-1}x^{2q} + (1 + 1/\delta)^{2q-1}\delta^{2q} \le (1 + C_q\delta)x^{2q} + C_q\delta,$$

отримаємо

$$\begin{aligned}\left|Z^\delta(\tau_{n+1})\right|^{2q} &\le J_{\tilde{\sigma}^n}^{2q}(\tau_{n+1})\big((1 + C_q\delta)(1 + \sigma(\tau_n)\Delta B_n)^{2q} + C\delta\big)\left|Z^\delta(\tau_n)\right|^{2q}\\ &\le \exp\left\{C_q(\delta + \sigma(\tau_n)\Delta B_n)\right\}\left|Z^\delta(\tau_n)\right|^{2q}.\end{aligned}$$

Тоді маємо

$$\big(Z^\delta(\tau_n)\big)^{2q} \le C_q\exp\left\{\int_0^{\tau_n}\sigma(t_s)\,dB(s)\right\}|x_0|,$$

звідки $\mathsf{E}\left[\big(Z^\delta(\tau_n)\big)^{2q}\right] \le C_q$, що, в свою чергу, через рівність (3.6) дає

$$\mathsf{E}\left[\big(Z^\delta(s) - Z^\delta(t_s)\big)^{2p}\right] \le C_p\delta^p.$$

Отже, достатньо довести $\mathsf{E}\left[\big(\widetilde{Z}(\tau_n) - Z^\delta(\tau_n)\big)^{2p}\right] \le C_p\delta^p$. Позначимо

$$\alpha_n = 1 - J_{\tilde{\sigma}^n}(\tau_{n+1})(1 + \sigma(\tau_n)\Delta B_n)),$$

$$\beta_n = J_{\tilde{\sigma}^n}(\tau_{n+1}) - 1.$$

Безпосередньо можна переконатися, що

$$\mathsf{E}\left[\alpha_n^{2q}\right] \le C_q\delta^{3q},$$

$$\mathsf{E}\left[\beta_n^{2q}\right] \le C_q\delta^q.$$

Тоді, записавши $d_{n+1} := \left|\widetilde{Z}(\tau_{n+1}) - Z^\delta(\tau_{n+1})\right| = |a_1 + a_2 + a_3 + a_4|$, де

$$a_1 = \widetilde{Z}(\tau_n) - Z^\delta(\tau_n), \qquad a_2 = \alpha_n Z^\delta(\tau_n),$$

$$a_3 = J_{\widetilde{\sigma}}(\tau_n)\left(b\big(t, J_{\widetilde{\sigma}}^{-1}(\tau_n)\widetilde{Z}(\tau_n), \omega - \widetilde{\sigma}_n\big) - b\big(t, J_{\widetilde{\sigma}}^{-1}(\tau_n)Z^\delta(\tau_n), \omega - \widetilde{\sigma}_n\big)\right)\delta,$$

$$a_4 = \beta_n J_{\widetilde{\sigma}}(\tau_n) b\big(\tau_n, J_{\widetilde{\sigma}}^{-1}(\tau_n)Z^\delta(\tau_n), \omega - \widetilde{\sigma}_n\big)\delta,$$

і застосувавши нерівність $(x+y)^{2p} \le (1 + C_p\delta)x^{2p} + (1 + 1/\delta)^{2p-1}y^{2p}$, маємо

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left[\big(Z(\tau_{n+1}) - Z^\delta(\tau_{n+1})\big)^{2p}\right] \\
&\quad\le (1 + C_p\delta)\,\mathsf{E}\left[a_1^{2p}\right] + C_p(1 + 1/\delta)^{2p-1}\left(\mathsf{E}\left[a_2^{2p}\right] + \mathsf{E}\left[a_3^{2p}\right] + \mathsf{E}\left[a_4^{2p}\right]\right) \\
&\quad\le (1 + C_p\delta)\,\mathsf{E}\left[\big(Z(\tau_n) - Z^\delta(\tau_n)\big)^{2p}\right] \\
&\qquad + C_p(1 + 1/\delta)^{2p-1}\left(\delta^{3p} + \mathsf{E}\left[\big(Z(\tau_n) - Z^\delta(\tau_n)\big)\right]^{2p}\delta^{2p} + \delta^{3p}\right) \\
&\quad\le (1 + C_p\delta)\,\mathsf{E}\left[\big(Z(\tau_n) - Z^\delta(\tau_n)\big)^{2p}\right] + C_p\delta^{p+1}.
\end{aligned}$$

Звідси, використовуючи індукцію, легко маємо

$$\mathsf{E}\left[\big(Z(\tau_n) - Z^\delta(\tau_n)\big)\right]^{2p} \le C_p\delta^p e^{C_pT} \le C_p\delta^p. \quad \square$$

Зауваження 3.3. Абсолютно аналогічно для $s \ge 1$ можна отримати оцінки вигляду

$$\mathsf{E}\left[\left|X(t) - \widetilde{X}(t)\right|^s\right] \le C_s\delta^{s/2}$$

$$\mathsf{E}\left[\left|X(t) - X^\delta(t)\right|^s\right] \le C_s\delta^{s/2}.$$

Теореми 2.5, 3.2 сформульовано для $s = 2$ лише для спрощення викладок і надання "класичної форми" результатам.

Література

1. H. Ahn and A. Kohatsu-Higa, *The Euler scheme for anticipating stochastic differential equations*, Stoch. Stoch. Rep. **54** (1995), 247–269.
2. S. Fang, *Théorème limite pour une equation différentielle stochastique anticipative*, Stoch. Stoch. Rep. **39** (1992), 95–106.
3. H. Holden, B. Øksendal, J. Ubøe, and T. Zhang, *Stochastic Partial Differential Equations. A Modeling, White Noise Functional Approach*, Birkhäuser, Boston, MA, 1996.
4. P. E. Kloeden and E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer, Berlin, 1992.
5. A. Kohatsu-Higa and P. Protter, *The Euler scheme for SDE's driven by semimartingales*, Stochastic analysis on infinite-dimensional spaces, Pitman Res. Notes in Math. Ser. vol 310, 1994, стор. 141–151.
6. D. Nualart, *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Probability And Its Applications, Springer-Verlag, New York, 1995.

Кафедра теорії ймовірностей і математичної статистики, механіко-математичний факультет, Київський Національний университет імені Тараса Шевченка, 64 Володимирська, 01033 Київ

Адреса електронної пошти: `zhora@univ.kiev.ua`

Надійшла 17/12/2004