Теорія Ймовір. та матем. статист.
Вип. 72, 2005, стор. 24–29

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 72, 2005, pp. 24–29

ПРО ОДНУ СИСТЕМУ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З ПОСЛІДОВНИМ ОБСЛУГОВУВАННЯМ

УДК 519.21

О. К. ЗАКУСИЛО І Н. П. ЛИСАК

Анотація. В роботі розглядається система масового обслуговування з послідовним обслуговуванням, об'єм незавершеної роботи в якій задовольняє рівняння Ланжевіна, та досліджується тривалість перебування вимоги в системі в умовах великого завантаження.

1. Вступ

Об'єктом дослідження даної роботи є одноканальна система масового обслуговування з послідовним обслуговуванням. Вона містить n послідовних обслуговуючих пристроїв, вхідний потік на перший обслуговуючий пристрій задається узагальненим пуассонівським процесом з параметром λ, а швидкість обслуговування на k-му обслуговуючому пристрої прямо пропорційна об'єму незавершеної роботи на цьому пристрої. Вимога, що надходить до системи, повинна пройти обслуговування на всіх обслуговуючих пристроях, причому з i-ю вимогою зв'язується об'єм η^i роботи, необхідної для її обслуговування.

Якщо позначити через $x_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$, об'єм незавершеної роботи на k-му обслуговуючому пристрої в момент часу t, а через $\mu_k x_k(t)$, $\mu_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$, — швидкість обслуговування на цьому пристрої, то об'єм незавершеної роботи

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$$

в такій системі масового обслуговування задовольняє рівняння Ланжевіна

$$dx(t) = Ax(t)\,dt + dz(t), \tag{1}$$

де $z(t) = (z_1(t), 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ — узагальнений пуассонівський процес з параметром λ та стрибками $\eta^1 = \eta, \eta^2, \ldots, \eta^i, \ldots$,

$$A = \begin{Vmatrix} -\mu_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \mu_1 & -\mu_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -\mu_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mu_{n-1} & -\mu_n \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

де $\mu_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60K25, 60Fxx.
Ключові слова і фрази. Система масового обслуговування, велике завантаження, рівняння Ланжевіна.

2. Постановка задачі

[illegible]тимо, що одноканальну систему масового обслуговування з одним обслу[illegible]чим пристроєм, об'єм незавершеної роботи в якій задовольняє диференційне [illegible]

$$dx(t) = -\mu x(t)\,dt + dz(t),$$

[illegible] — узагальнений пуассонівський процес, $\mu > 0$, було розглянуто в [1]. Для [illegible] системи в умовах великого завантаження (тобто при $\lambda \to \infty$) були досліджені [illegible] чекання початку обслуговування та тривалість перебування вимоги в [illegible]

[illegible] інтерес представляє вивчення поведінки тривалості перебування вимоги в [illegible]канальній системі масового обслуговування з послідовним обслуговуванням, [illegible] вище, зокрема, в умовах великого завантаження. Це й складає основну [illegible] даної роботи.

[illegible]льки тривалість перебування вимоги в системі залежить від дисципліни ви[illegible] на обслуговування, будемо вважати, що в системі діє принцип "першим при[illegible] — першим потрапив на обслуговування". Також домовимось надалі таку одно[illegible]льну систему масового обслуговування з послідовним обслуговуванням назива[illegible] фільтровою системою.

3. Умови існування стаціонарного режиму у фільтровій системі

В [1] було показано, що процес $x(t)$ має граничний при $t \to \infty$ розподіл, який не [illegible] від початкового значення $x_0 = x(0)$, тоді і тільки тоді, коли

a) власні значення A лежать в лівій напівплощині,
b) $\mathsf{E}\ln|\eta|;\,|\eta|>1) < \infty$

[illegible]дено, що при виконанні цих умов граничний розподіл є єдиним стаціонарним [illegible]лом процесу $x(t)$.

[illegible] тільки, що умова a) еквівалентна такій умові:

$$\mu_1 > 0, \qquad \mu_2 > 0, \qquad \ldots, \qquad \mu_n > 0,$$

[illegible] побачити з (2).

4. Допоміжні результати

[illegible] стаціонарний розподіл процесу $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T$ співпадає з [illegible]лом $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T$. Позначимо через $F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ функцію розподі[illegible] $\eta = (\eta_1, 0, \ldots, 0)^T$, через $\mathsf{E}\,\eta = (\mathsf{E}\,\eta_1, 0, \ldots, 0)^T$ — математичне сподівання η, де $\mathsf{E}\,\eta_1 = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty y_1\, dF(y_1, y_2, \ldots, y_n) = m_1$, та через $\varphi(s) = \mathsf{E}\{\exp i(s, \eta)\}$ — характе[illegible] функцію η, $s = (s_1, \ldots, s_n)$.

[illegible] 4.1. *Якщо стаціонарний розподіл процесу $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T$ [illegible] з розподілом $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T$, а $\mathsf{E}\,\eta_1 = m_1 < \infty$, то при $\lambda \to \infty$ вектор [illegible] $\xi_2, \ldots, \xi_n)^T$ збігається за ймовірністю до вектора $m_1(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}, \ldots, \mu_n^{-1})^T$.*

[illegible]. Як показано в [1], характеристична функція ξ має вигляд

$$\Xi_\xi(s) = \exp\left\{-\lambda \int_0^\infty \left(1 - \varphi\left(\exp\left\{uA^T\right\} s\right)\right) du\right\}.$$

[illegible]

$$\ln \Xi_{\lambda^{-1}\xi}(s) = \ln \Xi_\xi\left(\lambda^{-1}s\right) = \int_0^\infty \frac{\varphi\left(\exp\left\{uA^T\right\}\lambda^{-1}s\right) - 1}{\lambda^{-1}}\, du$$

$$= \left|\lambda^{-1} = l\right| = \int_0^\infty \frac{\varphi\left(\exp\left\{uA^T\right\} l s\right) - 1}{l}\, du.$$

Позначимо

$$\exp\left\{uA^T\right\} ls = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) = (lk_1(u), lk_2(u), \ldots, lk_n(u)),$$

де

$$k_i(u) = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \exp\{-\mu_l u\} \sum_{j=1}^{r_l} c_{ij} u^{j-1}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

r_l — кратність кореня $\lambda_l = -\mu_l$ матриці A, a_{il}, c_{ij} — деякі сталі.

Тоді

$$\varphi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) = 1 + (im_1, 0, \ldots, 0)(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) + o_u(\rho),$$

де

$$\rho = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_n^2} = |\,l\,| \sqrt{k_1^2(u) + k_2^2(u) + \cdots + k_n^2(u)}.$$

Звідси

$$\ln \Xi_{\lambda^{-1}\xi}(s) = \int_0^\infty \left((im_1, 0, \ldots, 0) \exp\left\{uA^T\right\} s + \frac{o_u(\rho)}{l} \right) du$$
$$= (im_1, 0, \ldots, 0) \int_0^\infty \exp\left\{uA^T\right\} du\, (s_1, s_2, \ldots, s_n)^T + \int_0^\infty \frac{o_u(\rho)}{l}\, du.$$

Позначимо

$$\overline{\lim}_{l\to 0} \left| \int_0^\infty \frac{o_u(\rho)}{l}\, du \right| = \varepsilon.$$

Для довільного $\delta > 0$ виберемо κ так, що $|o_u(\rho)| < \delta\rho$ при $\rho < \kappa$.

Тоді

$$\varepsilon < \overline{\lim}_{l\to 0} \int_0^\infty \frac{\delta\rho}{l}\, du = \overline{\lim}_{l\to 0} \int_0^\infty \frac{\delta |l| \sqrt{k_1^2(u) + k_2^2(u) + \cdots + k_n^2(u)}}{l}\, du$$
$$\le \delta \int_0^\infty \left(k_1^2(u) + k_2^2(u) + \cdots + k_n^2(u)\right)^{1/2} du \le \delta \int_0^\infty \left(n \max_i k_i^2(u)\right)^{1/2} du$$
$$\le \delta n^{1/2} \int_0^\infty \max_i |k_i(u)|\, du.$$

Оскільки $k_i(u) \le n^2 \max_l |a_{il}| \max_j |c_{ij}| \exp\{-\mu_l u\}\, u^{j-1}$, $i = 1, \ldots, n$, то

$$\varepsilon < \delta n \max_{i,l} |a_{il}| \max_{i,j} |c_{ij}| \int_0^\infty u^{j-1} \exp\{-\mu_l u\}\, du = \delta n \max_{i,l} |a_{il}| \max_{i,j} |c_{ij}|\, (j-1)!\, \mu_l^{-j}.$$

Значить $\varepsilon = 0$.

Враховуючи це та ті факти, що матриця A неособлива, власні значення A лежать в лівій напівплощині, а отже

$$\int_0^\infty \exp\left\{uA^T\right\} du = -\left(A^T\right)^{-1},$$

(див. [2]) маємо

$$\lim_{\lambda\to\infty} \ln \Xi_{\lambda^{-1}\xi}(s) = (im_1, 0, \ldots, 0) \left(-A^T\right)^{-1} (s_1, s_2, \ldots, s_n)^T,$$

де матриця $\left(-A^T\right)^{-1}$, як легко отримати з (2), має вигляд

$$\left(-A^T\right)^{-1} = \begin{Vmatrix} \mu_1^{-1} & \mu_2^{-1} & \mu_3^{-1} & \ldots & \mu_{n-1}^{-1} & \mu_n^{-1} \\ 0 & \mu_2^{-1} & \mu_3^{-1} & \ldots & \mu_{n-1}^{-1} & \mu_n^{-1} \\ 0 & 0 & \mu_3^{-1} & \ldots & \mu_{n-1}^{-1} & \mu_n^{-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mu_{n-1}^{-1} & \mu_n^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \mu_n^{-1} \end{Vmatrix},$$

Отже,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Xi_{\lambda^{-1}\xi}(s) = \exp\left\{i\left(s_1 m_1 \mu_1^{-1} + s_2 m_1 \mu_2^{-1} + \dots + s_n m_1 \mu_n^{-1}\right)\right\}.$$

Таким чином

$$\lambda^{-1}\left(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\right)^T \xrightarrow[\lambda\to\infty]{P} m_1\left(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}, \dots, \mu_n^{-1}\right)^T. \quad \square$$

Лема 4.2. *Якщо $z(t) = (z_1(t), 0, \dots, 0)^T$ — узагальнений пуассонівський процес, а $\mathsf{E}\tau_1 = m_1 < \infty$, то при $\lambda \to \infty$ вектор $\lambda^{-1}(z_1(t), 0, \dots, 0)^T$ збігається за ймовірністю до вектора $(m_1 t, 0, \dots, 0)^T$.*

Доведення. Характеристична функція $\lambda^{-1}z(t)$ має вигляд

$$\Psi_{\lambda^{-1}z(t)}(s) = \mathsf{E}\exp\left\{is\lambda^{-1}z(t)\right\} = \exp\left\{\lambda t\left(\varphi\left(\lambda^{-1}s\right) - 1\right)\right\}.$$

Таким чином,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \ln\Psi_{\lambda^{-1}z(t)}(s) = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda t\left(\varphi(\lambda^{-1}s) - 1\right) = \left|\lambda^{-1} = l, \lambda^{-1}s_i = \theta_i\right|$$
$$= \lim_{l\to 0} \frac{t\left(\varphi(ls) - 1\right)}{l} = \lim_{l\to 0} t\frac{d}{dl}\varphi(ls) = \lim_{l\to 0} t\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i}\frac{d\theta_i}{dl}.$$

Оскільки $d\theta_i/dl = s_i$, маємо

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Psi_{\lambda^{-1}z(t)}(s) = \exp\{im_1 t s_1\},$$

що й доводить твердження леми. $\square$

5. Дослідження тривалості перебування вимоги у фільтровій системі в умовах великого завантаження

Припустимо, що для обслуговування вимоги, яка надходить до системи в момент часу t_0, потрібно y одиниць роботи і що

$$x(t_0) = \left(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)\right) = \left(x_1^* + y, x_2^*, \dots, x_n^*\right).$$

Позначимо через S тривалість перебування цієї вимоги в системі, а через W_i — загальну тривалість чекання початку обслуговування вимоги від моменту надходження її до системи до моменту початку обслуговування її на i-му обслуговуючому пристрої ($i = 1, \dots, n$). Для визначення розподілів цих характеристик введемо процес $\beta_i(t)$, який дорівнює об'єму роботи, виконаної на i-му обслуговуючому пристрої в момент часу $t \geq t_0$. Не обмежуючи загальності, покладемо $t_0 = 0$. Тоді з визначення процесу $\beta_i(t)$ випливає

$$\{S > t\} = \left\{x_1^* + x_2^* + \dots + x_n^* + y > \beta_n(t)\right\}, \tag{3}$$

$$\{W_i > t\} = \left\{x_1^* + x_2^* + \dots + x_i^* > \beta_i(t)\right\}, \tag{4}$$

де

$$d\beta_i(t) = \mu_i x_i(t)\,dt, \qquad \beta_i(0) = 0.$$

Перепишемо систему (1) у такому вигляді:

$$\begin{cases} dx_1(t) = dz_1(t) - \mu_1 x_1(t)\,dt, \\ dx_2(t) = \mu_1 x_1(t)\,dt - \mu_2 x_2(t)\,dt, \\ \dots \\ dx_n(t) = \mu_{n-1} x_{n-1}(t)\,dt - \mu_n x_n(t)\,dt. \end{cases} \tag{5}$$

Склавши всі рівняння системи (5), отримаємо

$$dx_1(t) + dx_2(t) + \cdots + dx_n(t) = dz_1(t) - \mu_n x_n(t)\, dt,$$
$$\mu_n x_n(t)\, dt = dz_1(t) - dx_1(t) - dx_2(t) - \cdots - dx_n(t),$$
$$d\beta_n(t) = dz_1(t) - dx_1(t) - dx_2(t) - \cdots - dx_n(t),$$
$$\int_0^t d\beta_n(u) = \int_0^t dz_1(u) - \int_0^t dx_1(u) - \int_0^t dx_2(u) - \cdots - \int_0^t dx_n(u),$$
$$\beta_n(t) = z_1(t) - x_1(t) + x_1(0) - x_2(t) + x_2(0) - \cdots - x_n(t) + x_n(0).$$

Отже маємо

$$\beta_n(t) = z_1(t) - x_1(t) - x_2(t) - \cdots - x_n(t) + x_1^* + x_2^* + \cdots + x_n^* + y.$$

Використовуючи цю рівність та рівність (3), отримаємо

$$\{S > t\} = \{x_1^* + \cdots + x_n^* + y > z_1(t) - x_1(t) - \cdots - x_n(t) + x_1^* + \cdots + x_n^* + y\}$$
$$= \{x_1(t) + x_2(t) + \cdots + x_n(t) > z_1(t)\}.$$

Звідси

$$\mathsf{P}\{S > t\} = \mathsf{P}\{x_1(t) + x_2(t) + \cdots + x_n(t) > z_1(t)\}. \tag{6}$$

Аналогічним чином отримаємо

$$\mathsf{P}\{W_i > t\} = \mathsf{P}\{x_1(t) + x_2(t) + \cdots + x_i(t) > z_1(t) + y\}. \tag{7}$$

Розглянемо тепер тривалість перебування вимоги у системі T та загальну тривалість чекання початку обслуговування вимоги на i-му обслуговуючому пристрої W_i^s в припущенні, що система знаходиться в стаціонарному режимі. Розподіли цих характеристик задаються виразами (6) та (7) відповідно, причому стаціонарний розподіл $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T$ співпадає з розподілом $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T$ [3].

Теорема 5.1. *Якщо* $\mathsf{E}\,\eta_1 = m_1 < \infty$, *то при* $\lambda \to \infty$

$$\left(\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \cdots + \mu_n^{-1}\right)^{-1} T \overset{cd}{\Rightarrow} 1.$$

Доведення. З рівності (6) випливає:

$$\mathsf{P}\{T > t\} = \mathsf{P}\{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n > z_1(t)\} = \mathsf{P}\left\{\lambda^{-1}(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) > \lambda^{-1} z_1(t)\right\}.$$

З лем 4.1 та 4.2 отримаємо, що при $\lambda \to \infty$

$$\mathsf{P}\{T > t\} \overset{cd}{\Rightarrow} \mathsf{P}\left\{m_1\mu_1^{-1} + m_1\mu_2^{-1} + \cdots + m_1\mu_n^{-1} > m_1 t\right\}$$
$$= \mathsf{P}\left\{\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \cdots + \mu_n^{-1} > t\right\} = \begin{cases} 1, & t < t^1_{\text{кр.}}, \\ 0, & t \ge t^1_{\text{кр.}}, \end{cases}$$

де $t^1_{\text{кр.}} = \mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \cdots + \mu_n^{-1}$. Це й доводить твердження теореми. □

Теорема 5.2. *Якщо* $\mathsf{E}\,\eta_1 = m_1 < \infty$, *то при* $\lambda \to \infty$

$$\left(\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \cdots + \mu_i^{-1}\right)^{-1} W_i^s \overset{cd}{\Rightarrow} 1.$$

Доведення. З рівності (7) випливає:

$$\mathsf{P}\{W_i^s > t\} = \mathsf{P}\{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_i > z_1(t) + y\}$$
$$= \mathsf{P}\left\{\lambda^{-1}(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_i) > \lambda^{-1} z_1(t) + \lambda^{-1} y\right\}.$$

З лем 4.1, 4.2 та з того, що $\lambda^{-1} y \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$ при $\lambda \to \infty$, отримаємо, що при $\lambda \to \infty$

$$\mathsf{P}\{W_i^s > t\} \overset{cd}{\Rightarrow} \mathsf{P}\left\{m_1\mu_1^{-1} + m_1\mu_2^{-1} + \cdots + m_1\mu_i^{-1} > m_1 t\right\}$$
$$= \mathsf{P}\left\{\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \cdots + \mu_i^{-1} > t\right\} = \begin{cases} 1, & t < t^2_{\text{кр.}}, \\ 0, & t \ge t^2_{\text{кр.}}, \end{cases}$$

де $t^2_{\text{кр.}} = \mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \cdots + \mu_i^{-1}$, що й доводить теорему. □

6. Наслідки

Базуючись на результатах теорем 5.1, 5.2, можна дослідити такі характеристики:

- T_i — тривалість перебування вимоги у системі від моменту надходження її до системи до моменту повного виходу з i-го пристрою,
- T_i' — тривалість перебування вимоги у системі від моменту надходження її в чергу на i-й пристрій до моменту повного виходу з системи,
- V_i — тривалість перебування вимоги на i-му пристрої,
- K_i — тривалість перебування вимоги в черзі на i-му пристрої,
- S_i — тривалість обслуговування вимоги на i-му пристрої

в припущенні, що система знаходиться в стаціонарному режимі.

Теорема 6.1. *Якщо* $\mathsf{E}\,\eta_1 = m_1 < \infty$, *то при* $\lambda \to \infty$

$$\left(\mu_i^{-1} + \cdots + \mu_n^{-1}\right)^{-1} T_i' \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} 1.$$

Доведення. Оскільки T_i' починається з моменту, коли вимога починає обслуговуватись на $(i-1)$-му пристрої, то

$$\mathsf{P}\left\{T > t\right\} = \mathsf{P}\left\{W^s_{i-1} + T_i' > t\right\}.$$

Вважаючи, що усі випадкові величини та випадкові процеси задані на одному ймовірносному просторі, та використовуючи твердження теорем 5.1 та 5.2, отримаємо твердження теореми 6.1. □

Теорема 6.2. *Якщо* $\mathsf{E}\,\eta_1 = m_1 < \infty$, *то при* $\lambda \to \infty$

$$\mu_i K_i \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} 1.$$

Доведення. Доведення випливає з теорем 5.1, 5.2, 6.1 та з того, що

$$\mathsf{P}\{T > t\} = \mathsf{P}\left\{W^s_{i-1} + K_i + T'_{i+1} > t\right\}. \quad \square$$

Теорема 6.3. *Якщо* $\mathsf{E}\,\eta_1 = m_1 < \infty$, *то при* $\lambda \to \infty$

$$\mu_i V_i \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} 1.$$

Доведення. З того, що T_i співпадає з T у випадку, коли система містить i обслуговуючих пристроїв, та $\mathsf{P}\left\{T_i > t\right\} = \mathsf{P}\left\{W_i^s + S_i > t\right\}$, випливає

$$S_i \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} 0.$$

Оскільки $\mathsf{P}\left\{V_i > t\right\} = \mathsf{P}\left\{K_i + S_i > t\right\}$, то твердження теореми отримаємо з теореми 6.2. □

Література

1. О. К. Закусило, *Марковські процеси з напівдетермінованими частинами траєкторій*, "Фада", Київ, 2002.
2. П. Ланкастер, *Теория матриц*, "Наука", Москва, 1978.
3. R. W. Wolff, *Poisson arrivals see time averages*, Oper. Res. **30** (1982), 223–231.

Кафедра дослідження операцій, факультет кібернетики, Київський Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна
Адреса електронної пошти: do@unicyb.kiev.ua

Кафедра дослідження операцій, факультет кібернетики, Київський Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна
Адреса електронної пошти: lysak@unicyb.kiev.ua

Надійшла 28/04/2004